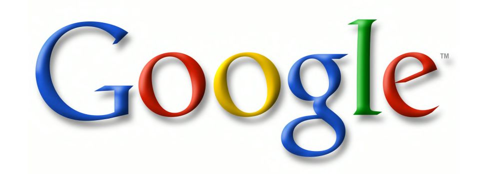
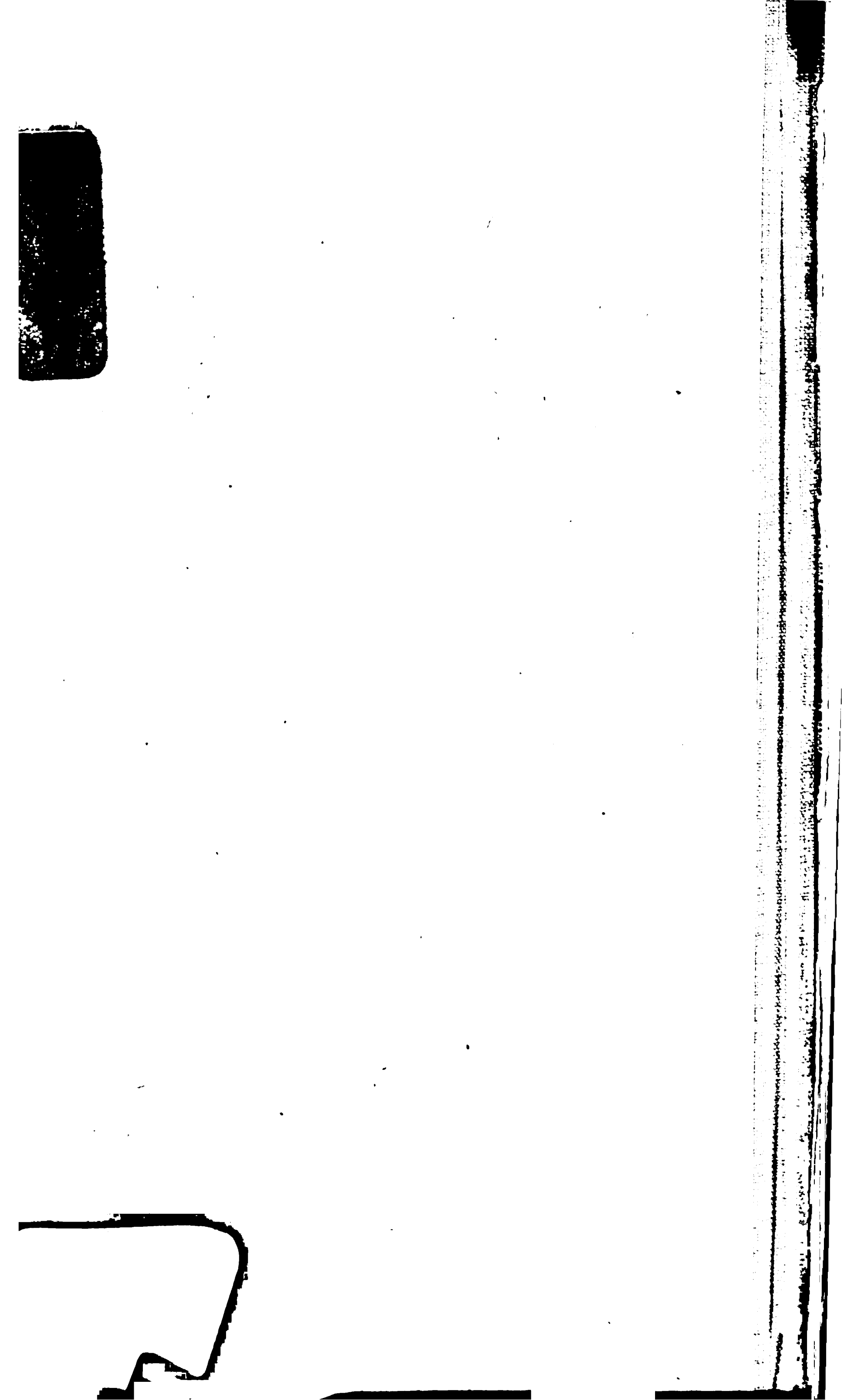
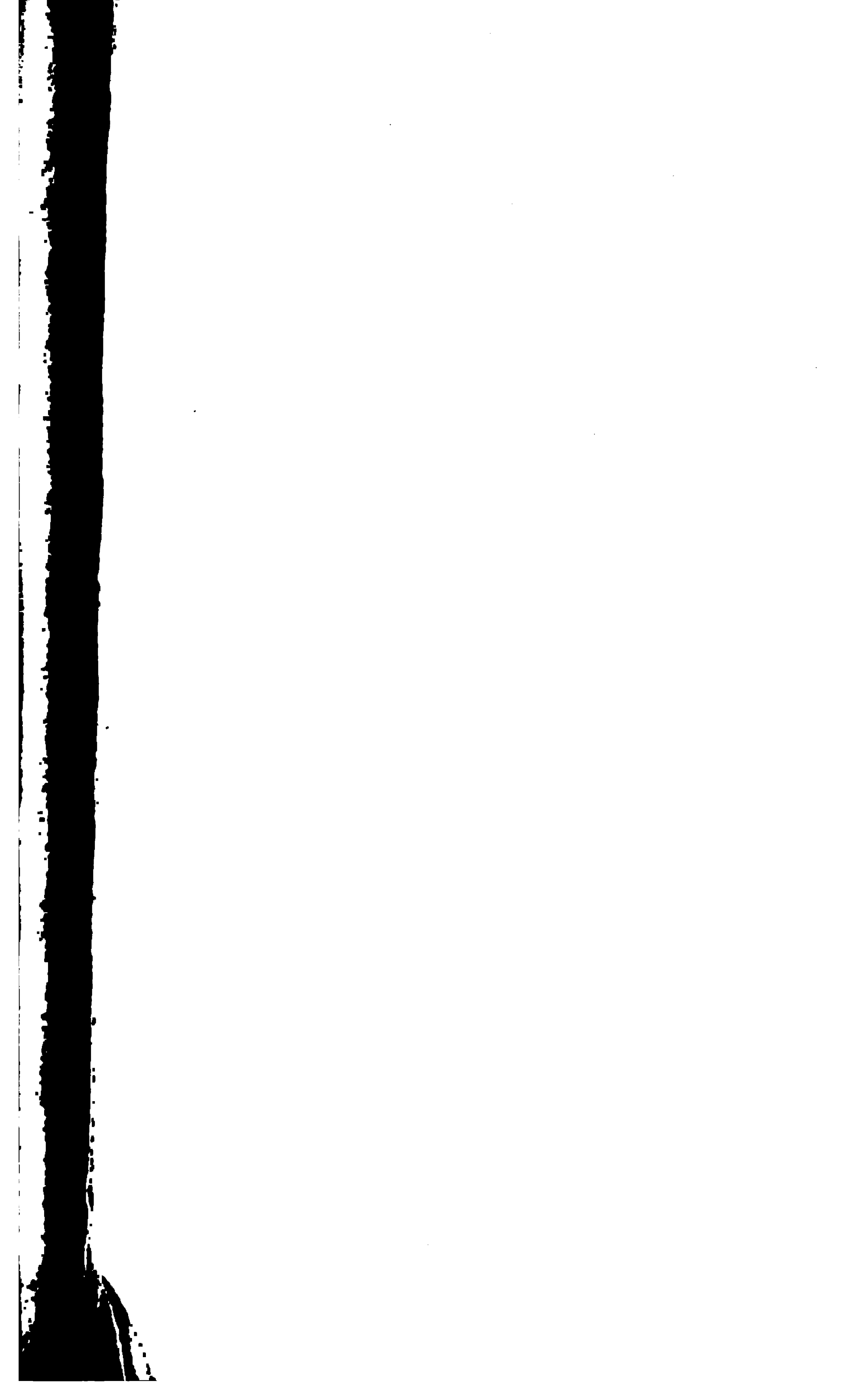
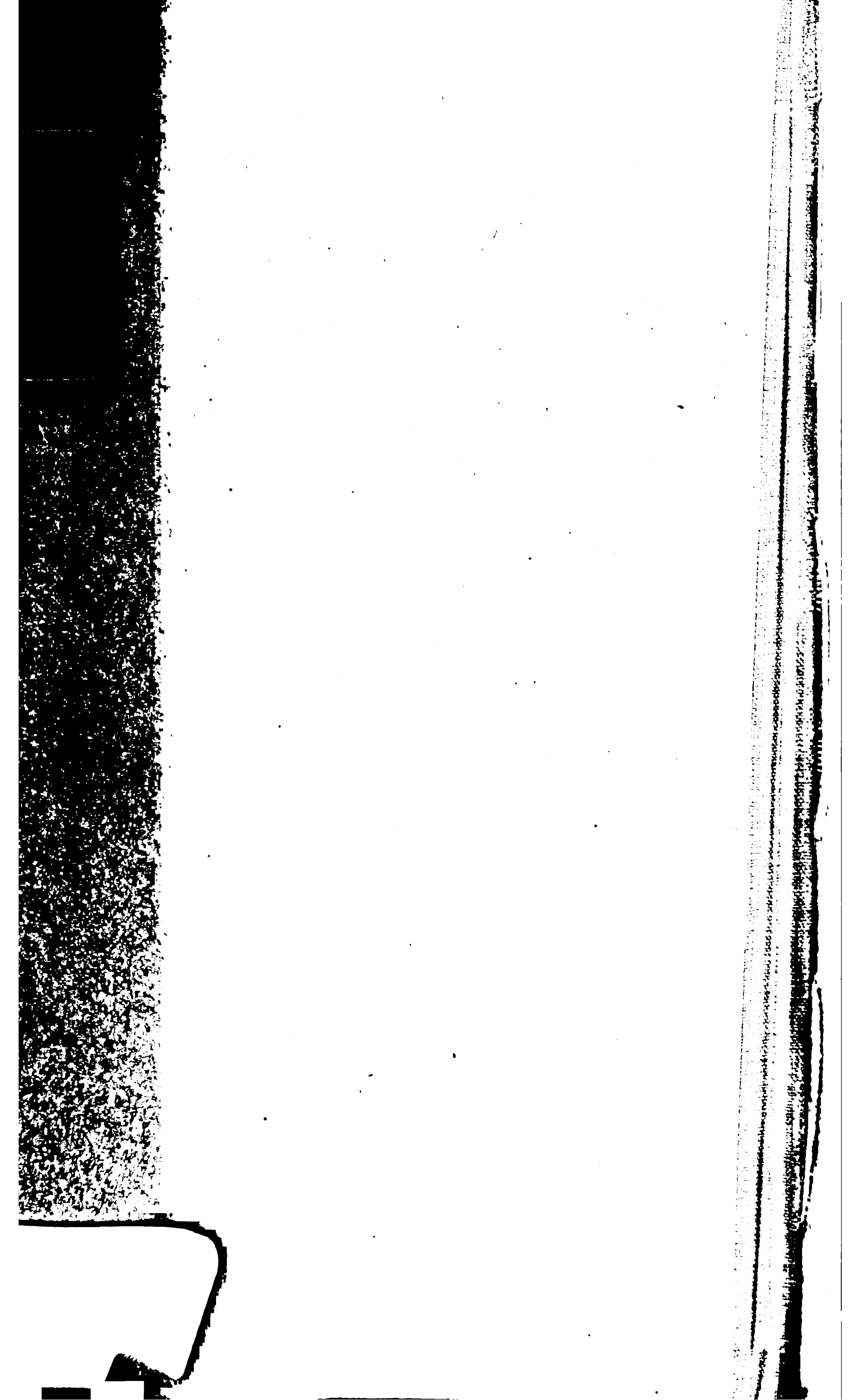
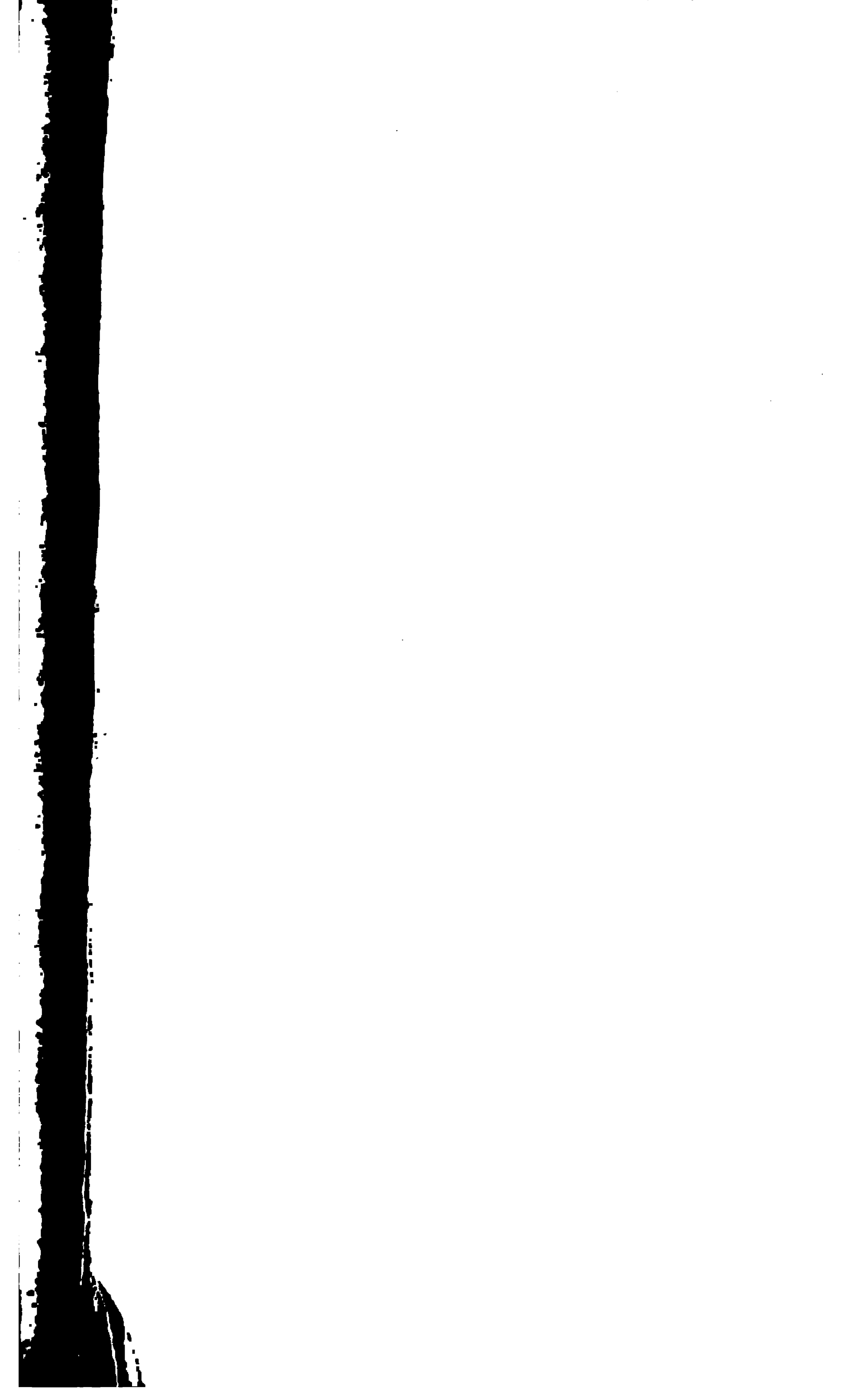












Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**
herausgegeben
von
Max Henoch und **Emil Lampe.**

Band XVIII.
Jahrgang 1886.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1889.


ASTOR LIBRARY
APR
21
1890
NEW YORK

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört. Einige periodische Schriften, in welchen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4⁰. VII, VIII, IX.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. V. 1886 Paris. Au Bureau du Journal de Physique.

Amst. Jaarb.: Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) II, III.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas etc. Paris. Masson. 8⁰.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars. 4⁰. (3) III.

Ann. Hydr.: Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. Berlin. 4⁰.

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann u. Co. New-York.

Arch f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. 50. Jahrgang. Bd. XCIII. Berlin. Mittler u. Sohn.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4⁰. CXIV.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, H. Seliger. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Batt. G.: Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXIV.

Belg. Annu.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Ann.: Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XI, XII.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. XLVI.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez. XXVII-XXIX.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez 4°. XLVII, XLVIII.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1886.

Berl. phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Berlin. G. Reimer. 8°. 1886.

Bern Mitt.: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1886. Bern. Huber u. Co.

Besso Per. mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario diretto da D. Besso. Roma. 8°. I.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. Stockholm 1886.

Böklen Mitt.: Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen herausgegeben von Dr. O. Böklen. Tübingen. Fr. Fues.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (4) VI, VII.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XVIII, XIX.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (3) II. III.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4°. (2) XIV.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). X.

Bull. Soc. Vaud.: Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles. Publié sour la direction du Comité par M. F. Roux. Lausanne. F. Rouge. (3) XXII.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Casop : Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) XV.

Centralb. d. Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. VI.

Chark. Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) I, II.

Christiania Forh.: Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°.

Christ. G. d. W.: Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania. Christiania.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung einer Redactions-Commission herausgegeben von Dr. E. Hartig. Jahrg. 1886. (Der neuen Folge Bd. XXXII.) Leipzig. Arthur Felix. 4°.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CII, CIII.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc., sous la direction de la Commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°. (2) X.

Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.: Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill. II.

Dorpat. Naturforscher Ges. Ber.: Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat.

Dtsche Baustg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche. XX.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXVIII.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. IV.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XIII.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. XLIV, XLV.

Elektrot. Z.: Elektrotechnische Zeitschrift. Herausgegeben vom elektrotechnischen Verein. Berlin. 4°.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°. XVIII.

Ermakow J.: Journal der elementaren Mathematik, herausgegeben von Ermakow. Kiew. (Russisch.)

Exner Rep.: Repertorium der Physik herausgegeben von Exner. München und Leipzig. gr. 8°. XXII.

Flammarion, Rev. d'Astr.: L'Astronomie. Revue d'astronomie populaire, de météorologie et de physique du globe, exposant les progrès de la science pendant l'année. Paris. Gauthier-Villars. gr. 8°. V.

Franc. Ass.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles.

Gen. Mém.: Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle de Genève. Genève. 4°. Librairie H. Georg.

Genova G.: Giornale della Società di letture e conversazioni scientifiche in Genova. 8°. 1886.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1886.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. 1886. No. 6.

Hannov. Zeitschr.: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. XXXII.

Helsingf. Vet. soc. Acta: Acta societatis scientiarum Fennicae. 4°. XIV.

Helsingf. Vetensk. soc. Öfv.: Öfversigt af finska vetenskaps-societetens förhandlingar. Helsingfors. 8°. XXIX.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XVII.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig C. A. Koch. 8°. (2) III, IV.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°. Cah. LVI.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars. Baltimore.

Jordan J.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié de 1875 à 1884 par H. Resal. Publié par C. Jordan avec la collaboration de G. Halphen, E. Laguerre, M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Resal. Paris. (4) II.

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von W. Jordan. XV.

Kazan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kazan.

Kazan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kazan. (Russisch.) IV.

Kazan Nachr.: Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kazan.

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen.

Klein Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. VonderMühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XXVI, XXVII, XXVIII.

Kopenh. Overs.: Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.)

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) XII.

Kronecker J.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass. Mit thätiger Beförderung hoher Königl. Preussischer Behörden. Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826-1856) und C. W. Borchardt (1856-1880) herausgegebenen Journals. Berlin G. Reimer. 4°. IC, C.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig. 1886.

Lie Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. (2) XII, XIII.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa. XII.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XIX.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XVII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXVII.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8° XL, XLI.

Lund Arsskr.: Acta universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årsskrift. Lund. XXII.

Manch. Mem.: Memoirs of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste, Paris. Gauthier-Villars. 8°. VI.

Mem. R. Astr. S.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mess.: The Messenger of Mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°. (2) XV, XVI.

Met. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben von der Oestreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. W. Koeppen. Berlin. IV.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XVII.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena. (2) IV.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8°.

Moscou Mém.: Nouveaux Mémoires de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.

Mosk. Math. Samml.: Mathematische Sammlung herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XII, XIII.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität. Moskau. (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°.

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°. XXV.

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London. XXXIV, XXXV.

Néerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°. XXI.

Newcomb Am. J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. VIII, IX.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XIII.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) V.

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch). VI, VII.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. I.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Paris Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. (Russisch). LII.

Pétersb. Mél. math.: Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.

Phys. Ges. St. Pet.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg.

Phys. Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. II.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Kane, Thomson, Francis. London. 8°. (5) XXI, XXII.

Phil. Trans.: = Lond. Phil. Trans.

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1885, 1886.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8°. XXI, XXII.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XXVI, XXVII, XXVIII.

Rev. d. qu. sc.: Revue des questions scientifiques.

Revista Scientifica: Revista scientifica do Porto.

Revue de l'instr. p.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8°.

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma 4°. (4) II.

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°. (4) III.

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti della Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XXXVII, XXXVIII.

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXXI.

Hl. A.: Historisch-literarische Abteilung (besonders paginirt).

Sill. J.: The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana. New-Haven. (3) XXXI.

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XIV.

Stockh. Handl.: Handlingar af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens. Stockholm.

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. XLII, XLIII.

Stockh. Vetensk. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar. Stockholm. 8°. XI.

Techn. Inst. St. Pet.: Die Mitteilungen des Technologischen Instituts in St.-Petersburg.

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. VIII.

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXI.

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino.

Toul. Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°. (8) VIII.

Ups. N. Act: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Upsala. 4°.

Ven. At. Atti: Atti dell' Ateneo Veneto. Venezia. Cecchini. 8°.

Ven. At. Riv.: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (6) III, IV.

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XXVII, XXVIII, XXIX.

Wiedemann Beibl.: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie. Herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. X, XI.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°. 1886.

Wien. Bauztg.: Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung der Architekten E. v. Förster, Th. v. Hansen, Fr. Schmidt von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim. LI

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. XCIII, XCIV.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°. LIII.

Wochenbl. für Bauk.: Wochenblatt für Baukunde. Organ der Architekten- u. Ingenieurvereine von Bayern, Elsass-Lothringen, ... Herausgegeben von Fr. Scheck. Frankfurt a. Main. VIII.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXI.

Z. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. K. Schäfer. Berlin. Ernst u. Korn. XXXVI.

Z. Oestr. Ing. u. Arch.: Zeitschrift des Oestreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur J. Melan. Wien. XXXVII.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin. 4°. XXX.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af J. P. Gram og H. G. Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (5) IV.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Seite

B. Pädagogik.

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische Gleichungen.)

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1. Niedere Arithmetik.

Capitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

Seite

B. Theorie der Formen.

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Absch[illegible] und

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Seite

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

B. Elliptische Functionen.

Seite

D. Kugel- und verwandte Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Seite

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen.

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

D. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

Seite

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung.

Seite

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Seite

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie.

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

Capitel 2. Astronomie.

Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

Anhang.

Verzeichnis
der Herren, welche für den achtzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
B. „ Prof. Bruns in Leipzig.
Bg. „ Prof. Björling in Lund.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
E. „ Prof. G. Eneström in Stockholm.
E. K. „ Dr. E. Kötter in Berlin.
El. „ Dr. Engel in Leipzig.
F. K. „ Dr. F. Kötter in Berlin.
G. „ Prof. v. Geer in Leiden.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm. „ Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr. „ Prof. Günther in München.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hch. „ Dr. Henoch in Berlin.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
H. S. „ Dr. Heinr. Simon in Berlin.
Ht. „ Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Königsberg i. Pr.
Js. „ Dr. Jolles in Aachen.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg.
La. „ Prof. Loria in Genua.
Lbg. „ Dr. Lorberg in Strassburg.
Lg. „ Dr. Lange in Berlin.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
Ls. Herr Lazarus in Hamburg.
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
M. L. „ Prof. Mittag-Leffler in Stockholm.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
M-n. „ Prof. Mellin in Helsingfors.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Dr. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. Neumann in Leipzig.
No. „ Prof. Netto in Giessen.
P. „ Dr. Petzold in Hannover.
Rdt. „ Dr. Reinhardt in Meissen.
R. M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Rs. „ Dr. Rosochatius in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Dr. Schlegel in Hagen.
Schn. „ Prof. Schumann in Berlin.
Scht „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sn. „ Dr. P. Simon in Berlin.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
T. „ Dr. Toeplitz in Breslau.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kazan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. „ Prof. W. Stahl in Aachen.
Wz. „ Dr. Weltzien in Berlin.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Boncompagni. Sur l'„Histoire des sciences mathématiques et physiques" de M. Maximilien Marie. Biblioth. Mathem. 43-45, 87-90.

Der Verfasser zeigt verschiedene Fehler an, welche in der Arbeit des Herrn Marie vorkommen, und beweist an Beispielen, dass besonders die Behandlung des Mittelalters unvollständiger ist, als zulässig erscheint. E.

A. Starkoff und W. Habbe. Die russische Bibliographie der Mathematik, Mechanik, Astronomie, Physik und Meteorologie für das Jahr 1885. Odessa. Ges. Bd. VII (Russisch.)

Zebrawski. Ergänzungen zu der (im Jahre 1873 herausgegebenen) „Polnischen Bibliographie im Gebiete der Mathematik und Physik". Krakau. Verlag der Kurnik'schen Bibliothek. (Polnisch.)

Dn.

P. TANNERY. Question 9; G. ENESTRÖM. Questions 10—13; P. RICCARDI. Réponse à la question 4. Biblioth. Mathem. 47-48, 96, 144, 244, 95-96.

Sämtlich Fragen mathematisch-historischen Inhalts:

9) Ueber die Original-Ausgabe von Snell's „Apollonius Batavus".

10) Ueber ein von Maclaurin angegebenes Convergenzkriterium.

11) Ueber eine allgemeine Summenformel.

12) Ueber die Original-Ausgabe von Rudolff's „Behend und hübsch Rechnung etc."

13) Ueber eine von Vieta angegebene Formel für das Ausziehen von Quadratwurzeln.

Die Antwort des Herrn Riccardi bezieht sich auf eine Anfrage betreffs eine Schrift von Frisi und Melanderhjelm.

E.

G. ENESTRÖM. Notice sur les écrits mathématiques d'auteurs étrangers publiés en Suède ou traduits en suédois. Biblioth. Mathem. 45-47, 92-95, 140-141.

Fortsetzung und Schluss des in F. d. M. XVII. 1885. 14. erwähnten bibliographischen Verzeichnisses. Hier werden 21 deutsche und 2 griechische Arbeiten besprochen. Für die in Schweden gedruckten Uebersetzungen des Euklid wird auf Aufsätze in der Bibl. Mathem. 1884 und im Bulletino des Fürsten Boncompagni verwiesen. E.

P. TANNERY. La tradition touchant Pythagore, Oenopide et Thalès. Darb. Bull. (2) X. 115-128.

Die Stelle des Jamblichus „ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία" übersetzt Tannery so: „et la géométrie fut appelée Tradition touchant Pythagore"; er construirt sich hieraus den Titel eines Buches, des „ersten Lehrbuches griechischer Geometrie", welches um die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. von

versprengten mittellosen Pythagoreern des Gelderwerbes wegen veröffentlicht wurde und die Lehren ihres Meisters enthielt: des Buches „Rahmen war schon der, welchen Euklid's Elemente ausfüllen“, und höchst wahrscheinlich waren in ihm auch schon die zwei Aufgaben enthalten, welche Eudemus dem Oinopides zuschreibt, nicht minder auch die sonst dem Thales zugeschriebenen Einzelbeweise für den Satz, dass die Summe der Dreieckswinkel zwei Rechte beträgt. „Was Thales kannte und was ihm unbekannt war, vermögen wir nicht zu beurteilen.“ Tn.

P. Tannery. Les géomètres de l'Académie. Darb. Bull. (2) X. 303-314.

Der Verfasser bespricht, hauptsächlich dem von Proklus gegebenen Verzeichnis folgend, die Mathematiker der Akademie, sammelt die dieselben erwähnenden Stellen der Alten, hebt die wissenschaftliche Bedeutung Athens im vierten Jahrhundert hervor, handelt eingehender von Eudoxus und Menächmus und sucht die wesentlichen Fortschritte der Geometrie in der Zeit von 370 bis 300 v. Chr. festzustellen. Tn.

Fr. Hultsch. Autolyci de sphaera quae movetur liber. — De ortibus et occasibus libri duo. — Una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit, latina interpretatione et commentariis instruxit F. H. Leipzig. Teubner. — Darb. Bull. (2) X. 195-205.

Durch diese neue streng kritische Ausgabe eines lange nur wenig berücksichtigten Autors hat Herr Hultsch seinen vielen Verdiensten um die Mathematik der Alten ein neues hinzugefügt. Autolykus war ein älterer Zeitgenosse des Euklides, seine Bearbeitung der Sphaerik lässt erkennen, dass damals auch noch nicht die allererste Grundlage des später als Trigonometrie bekannt gewordenen Wissenszweiges vorhanden war; allein gerade dieser primitive Standpunkt des Autors verleiht seinen beiden Werkchen ein besonderes historisches Interesse.

Wir ersehen aus denselben, wie die Fixirung des Auf- und Untergangspunktes eines Gestirnes und die damals natürlich nur approximativ zu leistende Berechnung seines Tages- und Nachtbogens das erste und bedeutsamste Untersuchungsobject der älteren griechischen Astronomen bildete. Bis jetzt besass man nur eine einzige Druckausgabe dieses ältesten vollständigen Denkmals der mathematischen Literatur Griechenlands, diejenige von Auria (XV. Jahrhundert); der neue Herausgeber hat Auria's Scholien mit in seine Bearbeitung aufgenommen. Tannery's oben erwähnte gründliche Besprechung enthält auch einige kritische Bemerkungen. Gr.

EUCLIDIS OPERA OMNIA. Ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Euclidis Elementa. III. Librum X continens. Lipsiae. Teubner. 417 S.

Das zehnte Buch behandelt bekanntlich die Lehre von den rationalen und irrationalen Zahlen. Der eigentliche Text mit lateinischer Uebersetzung umfasst 371 Seiten; dann folgt ein Appendix. M.

P. TANNERY. La constitution des Éléments. Darb. Bull. (2) X. 183-194.

Das geschichtliche Entstehen des Inhalts der Euklidischen Elemente nachzuweisen, die Bausteine zu bezeichnen, welche unser Altmeister schon vorfand und die er in genialer Weise verwertete, ist wiederholt versucht worden, zuerst am gründlichsten von Bretschneider. Auch Tannery's Arbeit gilt diesem Ziele. Er weist, wie seine Vorgänger, als Leistung des Eudoxus nach die Theorie der Proportionen, den wesentlichen Gehalt des 5. Buches, ebenso den des 12. über die Ausmessung von Pyramide und Kegel, er hebt die nach Entdeckung der Incommensurabilität besonders wichtige Fundirung der Aehnlichkeitslehre hervor und die durch Euklid bewirkte Späterstellung der letzteren im System; Tannery schreibt, im Gegensatze zu Bretschneider, dem Theätet die Haupt-

sache des 13. Buches zu, nämlich die Bestimmung der Beziehungen, welche zwischen den Seiten der regelmässigen Körper und dem Radius ihrer umgeschriebenen Kugel statthaben, und damit in inniger Gedankenverknüpfung die Grundlagen des berühmten 10. Buches. Zur Kontrole gewissermassen werden die Leistungen der genannten zwei Mathematiker mit denen der Pythagoreer verglichen, um noch etwaige Lücken festzustellen. Tn.

P. Mansion. Sur Euclide. Brux. S. sc. X. A. 46.

Von den dreizehn Büchern der Elemente Euklid's ist das zehnte über die incommensurablen Grössen am meisten seine eigenste persönliche Schöpfung. Mn. (Lp.)

P. Tannery. Le résumé historique de Proclus. Darb. Bull. (2) X. 49-64.

In des Proklus Commentar zum ersten Buch von Euklid's Elementen findet sich eine für die Geschichte der griechischen Mathematik höchst wichtige Stelle (Friedlein's Ausgabe S. 64-70), deren auf die voreuklidische Zeit bezüglicher Teil gewöhnlich als aus des Eudemus Werk entnommen betrachtet wird, wie denn namentlich Bretschneider (S. 27) denselben als „ganz unbezweifelt aus des Eudemos Geschichte der Geometrie ausgezogen“ erwähnt und verwertet.

Tannery tritt dem entgegen, und nachdem er eine Uebersetzung der Stelle gegeben, „versucht er zu beweisen, dass das Bruchstück ganz und gar Geminus zugehört, abgesehen von einigen minder bedeutenden Abänderungen, welche sich Proklus erlauben konnte“. Er begründet seine Meinung durch den Hinweis auf die, stoische Glaubenssätze verratende Einleitungsstelle, auf die chronologische Erörterung betreffs der Lebenszeit des Euklid, auf die reine Namenserwähnung der „Trugschlüsse“ Euklid's, auf die an ihrem Platz ungehörige Lobeserhebung der „Elemente“, die für den Geminus erklärlich sei. Des weiteren findet Tannery

eine Bestätigung seiner Meinung bei der Untersuchung der Quellen des Geminus und auch in der Erwähnung der apokryphen „Nebenbuhler“ Platon's und im ständigen Zurückkommen auf die Elemente Euklid's. Zum Schlusse wendet sich der Verfasser noch gegen Bretschneider's Meinung (S. 168) betreffend „den Schnitt“, von welchem in unserer Stelle die Rede ist: nicht der einer Geraden nach mittlerem und äusserem Verhältnis sei gemeint, sondern der Schnitt von Körpern, der das Vorspiel war zur Auffindung der Kegelschnitte. Tn.

M. Steinschneider. Euklid bei den Arabern. Schlömilch Z. XXXI. Hl. A. 81-110.

Enthält in § 1 die Angabe von Uebersetzungen der „Elemente“, § 2-6 eine Liste von 39 Commentatoren und Bearbeitern eben derselben mit einer Fülle bibliographischer Bemerkungen, in § 6-9 Nachweise von Uebersetzungen und Bearbeitungen der übrigen ächten und unächten Schriften Euklid's. Ein erster Anhang weist als den rätselhaften Tideus den Diokles nach und sein bis dahin undeutbares Buch περὶ πυρείων als „von Brennspiegeln“ handelnd; ein zweiter Anhang weist noch 5 arabische Gelehrte nach, welche Euklid studirten. Tn.

P. Tannery. Démocrite et Archytas. Darb. Bull. (2) X. 295-302.

Es werden Demokrit's Beziehungen zu den Pythagoreern dargethan; durch diese, insbesondere durch seine Atomenlehre, ward er auf das mathematische Gebiet gewiesen, und das Ergebnis seiner Studien sind seine mathematischen Werke, welche, bezw. deren Titel, in drei Tetralogien verteilt, aufgezählt werden. Die Uebereinstimmung der Stofffolge der ersten mit Euklid's Elementen wird hervorgehoben. Des Archytas Lebenszeit wird festzustellen gesucht, der von allen Schriftstellern behauptete mechanische Charakter seiner Construction mittlerer Proportionalen wird bestritten, die Beziehungen des Pseudo-Boetius zum Pseudo-Archytas erläutert. Tn.

P. Tannery. Hippocrate de Chios. Darb. Bull. (2) X. 213-226.

Nach einer kaum zum Thema gehörigen Erörterung über synthetisches und analytisches Verfahren und über Platon's zweifelhafte Bedeutung für letzteres werden des Hippokrates Versuche einer Kreisquadratur besprochen; insbesondere wird im Vergleich zu den Darstellungen der Sache durch Bretschneider, Allman, Diels, Usener und Heiberg des Verfassers eigener Standpunkt in Kürze klar gemacht. Tn.

G. Eneström. Anteckningar om matematikern Petrus de Dacia och hans skrifter. III. Stockh. Öfv. XLII. 57-60.

Nachträge zu den Noten über Petrus de Dacia, über die in F. d. M. XVII. 1885. 4. berichtet worden ist. E.

A. Favaro. Appendice agli studi intorno alla vita ed alle opere di Prosdocimo de' Beldomandi, matematico padovano del secolo XV. Bonc. Bull. XVIII. 405-423.

Zusätze zu der ausführlichen Biographie des Prosdocimo de' Beldomandi, der durch Werke über Astrologie, Mathematik und Musik sich ausgezeichnet hat (Bonc. Bull. XII. 1-74, 115-261; F. d. M. XI. 1879. 9). M.

L. de Marchi. Sull' ortografia del nome del matematico messinese Maurolicio. Biblioth. Mathem. 90-92.

Herr de Marchi lenkt die Aufmerksamkeit darauf, dass der italienische Mathematiker Maurolico in einer 1528 gedruckten Schrift und in einer handschriftlich aufbewahrten Arbeit „Maurolicius“ genannt wird, und dass die Form „Maurolicus“ als Maurolícus (nicht Maurólicus) ausgesprochen werden muss, da sie eine lateinische Form des griechischen Namens Marulí ist.

E.

A. Pringsheim. Historische Notiz, betreffend die Originalausgabe von Chr. Rudolff's „Behend und hübsch Rechnung etc." Biblioth. Mathem. 239-244.

Die Originalausgabe der Algebra Rudolff's ist bekanntlich eine bibliographische Rarität, und man hat sogar behauptet, dass kein Exemplar dieser Schrift mehr vorhanden ist. Herr Pringsheim, der selbst ein solches Exemplar besitzt, hat die Notizen, welche frühere Bibliographen und Historiker darüber gegeben haben, zusammengestellt, woraus erhellt, dass nur zwei der genannten Verfasser das Buch gesehen, die übrigen aber nur aus der zweiten Hand unvollständige oder incorrecte Notizen mitgeteilt haben. E.

A. Favaro. Intorno ad alcuni nuovi studi sulla vita e sulle opere di Galileo Galilei. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 355-362.

Der unermüdliche Galilei-Forscher begründet, „wenn auch nicht die absolute Notwendigkeit, so doch die allerhöchste Nützlichkeit" einer neuen vollständigen und handlichen Galilei-Ausgabe, führt seine 28 seit 1880 veröffentlichten, Galilei betreffenden Arbeiten auf und giebt den Plan dreier Bände Miscellanea Galileiana inedita, deren ersten Band er dem Institut überreicht. Tn.

A. Favaro. Intorno ad alcuni documenti Galileiani recentemente scoperti nella biblioteca nazionale di Firenze. Bonc. Bull. XIX. 1-55.

Enthält S. 1-22 die Angabe des Inhaltes von 25 Schriftpaketen, welche sich in der Nationalbibliothek zu Florenz wiedergefunden haben und auf Galilei bezügliche Schriften und Documente enthalten, und S. 22-55 einen „Anhang", welcher des genaueren die im 17. der genannten Pakete enthaltenen Manuscripte Nelli's aufzählt, des Biographen Galilei's. Tn.

A. Favaro. La libreria di Galileo Galilei descritta ed illustrata. Bonc. Bull. XIX. 219-290.

Auf den Nachweis der Quellen für Abfassung dieser Arbeit und die Begründung der getroffenen Anordnung folgt (von S. 235 ab) der „Catalogo sistematico della libreria di Galileo", 521 Werke verschiedensten Inhaltes aufzählend, von welchen u. a. der Astronomie 87, der Astrologie 15, der Mathematik 37, der Theologie 25, der Philosophie 34 zugewiesen werden.

Tn.

C. Anschütz. Drei noch unbekannte Briefe des Astronomen Joh. Kepler an Herwart von Hohenburg. 1599. Aus der k. Staatsbibliothek zu München. Prag. Ber. 417-523.

Die drei umfangreichen Originalbriefe Kepler's, welche von Herrn Anschütz in dem Codex 1607 der Münchener Staatsbibliothek aufgefunden und in den Prag. Ber. mit eingehenden Erläuterungen abgedruckt sind, füllen eine Lücke im Briefwechsel zwischen Kepler und Herwart aus, deren Vorhandensein Frisch, der Herausgeber der Opp. Omnia Kepleri, an verschiedenen Stellen angezeigt hat. Frisch hatte den betreffenden Codex deshalb nicht durchgesehen, weil dieser im Zettelkatalog aus Versehen bei Kepler nicht erwähnt ist. Die drei Briefe datiren vom 9. und 10. April, vom 30. Mai und vom 6. August 1599. Der Text der Briefe umfasst 65 Druckseiten. Der sehr reiche Inhalt erstreckt sich auf chronologische Fragen (über Lucanus, den Geburtstag des Octavianus), in welche astrologische Betrachtungen verwebt sind, auf den Magnetismus der Erde, auf die atmosphärische Strahlenbrechung und auf eine Reihe astronomischer Fragen.

Lp.

A. Favaro. Ricerche ulteriori intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero, matematico svizzero del secolo XVII. Bonc. Bull. XIX. 99-114.

Nachträge zu den Nachrichten über Soverus in Bonc. Bull. XV. (F. d. M. XIV. 1882. 12). 1) Ein Schreiben dieses Mathematikers vom 26. Febr. 1623, in welchem er sich um die Professur der Mathematik zu Bologna bewirbt, mit Angaben aus dem Leben des Bewerbers. 2) Ein Schreiben von Cesare Marsili vom 5. Juli 1626 an Galileo Galilei mit der Nachricht, dass B. Soverus sich mit der Verstärkung von Magneten beschäftigt hat. 3) Ein Protokoll der Academia Delia zu Padua, aus welchem hervorgeht, dass Soverus während seiner Professur zu Padua im Jahre 1627 für 100 Dukaten an dieser Akademie die Mathematik gelehrt hat. 4) Ein Schriftstück vom 24. August 1629, welches darüber Aufklärung giebt, wie die Manuscripte des Soverus in die Universitäts-Bibliothek von Padua gekommen sind, von wo sie dann in die Bibliotheca Marciana von Venedig übergeführt wurden. Lp.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis-en natuurkundige wetenschappen in Nederlanden. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 69-119.

Fortsetzung der früheren historischen Notizen (siehe F d. M. XVII. 1885. 12).

XXX. Handelt über Jan Jansz. Stampioen den Jüngern und Jacob a Waessenaer. Der erstere hat seiner Zeit eine gewisse Berühmtheit dadurch erhalten, dass er eine Regel für die Wurzelziehung aus einem Binom mit Wurzelzeichen gab und über diesen Gegenstand mit dem zweiten in Streit geraten ist. Davon wird Erwähnung gethan in dem Briefwechsel von Constantyn Huygens mit seinem Sohne Christiaan. Stampioen wurde im Jahre 1610 in Rotterdam geboren; 1644 wurde er von Constantyn Huygens zum Lehrer seiner Söhne in der Mathematik berufen. Weiter ist über sein Leben nicht viel bekannt. Von seinem Gegner Jacob a Waessenaer wissen wir noch weniger; nur dass er ein Anhänger von Descartes war, der viel von ihm hielt. Der Streit beider über die Wurzelziehung, woran sich auch Descartes beteiligte, wird ausführlich dargelegt. Die Entscheidung fiel

zum Nachteile Stampioen's aus, der in Folge einer eingegangenen Wette 600 fl. zum Besten der Armen bezahlen musste. Doch auch für die Wissenschaft wurde dieser Streit fruchtbar. Denn F. van Schooten hat die richtigen Resultate in seine Ausgabe der „Geometria a Renato Descartes“, die 1649 erschien, aufgenommen.

G.

Liste alphabétique de la correspondance de Christiaan Huygens qui sera publiée par la société hollandaise des sciences à Harlem. **Harlem. Jean Enschedé & fils. XV S.**

Diese Liste muss als Vorläufer der vollständigen Ausgabe von Huygens' Briefen angesehen werden, wovon der erste Teil bald erscheinen wird. Schon liegen 2700 Briefe zur Veröffentlichung bereit, wovon hier die Liste mit Angabe des Schreibers und des Datums mitgeteilt wird. Nach der Einleitung hat dies den Zweck, die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf diese Veröffentlichung zu lenken, so dass immer noch vor ihrem Erscheinen der Commission Mitteilung gemacht werden kann, wenn sich hier und da Briefe befinden, welche auf die Sache Bezug haben und der Commission unbekannt geblieben sind. Jetzt sind noch 108 Briefe einzuordnen, deren Datum oder Adresse nicht bestimmt werden kann. Doch hofft die Commission, dass auch dies gelingen werde. G.

MONCHAMPS. Histoire du Cartésianisme en Belgique. **Belg. Mém. C. XXXIX. 1-643.**

Ein für die Geschichte der philosophischen Lehren des Descartes ungemein wichtiges Werk, in welchem hier und da einige Nachrichten über Mathematiker vorkommen (Sluse, Huygens u. s. w.). Mn. (Lp.)

CH. HENRY. Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Lesage, Clairault etc. publiée avec notices. **Bonc. Bull. XVIII. 507-570, 605-649.**

Henry hat im Jahre 1886 „Literarische und philosophische Schriften“ von d'Alembert (1717-1783) herausgegeben, hat aber von einer Veröffentlichung der ungedruckten, handschriftlich noch vorhandenen Werke mathematischen Inhaltes Abstand genommen, weil dieselben „keine Ergebnisse enthalten, welche nicht schon in der gedruckten Sammlung seiner Abhandlungen mehr oder weniger klar dargelegt wären“. So giebt denn Henry am Schlusse des von uns anzuzeigenden Aufsatzes (S. 646-648) nur ein Verzeichnis jener Werke und widmet volle 105 Seiten dem Abdrucke von d'Alembert's Briefwechsel oder, sagen wir besser, der noch vorhandenen Briefe, welche d'Alembert in einem Zeitraume von viertehalb Jahrzehnten (1748-1783) geschrieben und empfangen hat.

Von seinem aus besonderem Grunde hier (S. 634) abgedruckten Taufschein und von einem d'Alembert nur betreffenden Briefe (Nr. 69, S. 611), sowie von zwei aus d'Alembert's Feder geflossenen Denkschriften (S. 534-537 und S. 567) abgesehen, sind es im ganzen 109 Briefe, welche dem Leser hier geboten werden: 78 derselben sind von d'Alembert geschrieben, und zwar 7 an unbekannte Adressen, 71 aber an 45 Personen im ganzen gerichtet; die übrigen 31 Briefe tragen seine Adresse und rühren von 18 Personen her. Die grosse Mehrzahl der vorkommenden Namen ist bedeutungslos; es sind nur etwa Cramer, Rousseau, Turgot, Mme Necker, Castillon, Clairault, Condorcet, Friedrich der Grosse und Papst Benedict XIV., die sich herausheben lassen.

Und der Inhalt dieser aus ganz Europa zusammengesuchten Briefe? Die wissenschaftliche Ausbeute ist nur gering. Bloss gelegentlich erwähnt werden von reiner Mathematik die Grundlegung der Infinitesimalrechnung (S. 513, 560), Convergenz von Reihen (513, 624), arithmetische Reihen höherer Ordnung einfachster Art (531), von Physik der Parallelogrammsatz (638, 642), Reibung (517), Ballistik (642, 544), Gravitation (641), etwas eingehender im Briefwechsel mit Castillon die Anfertigung und Zusammenfügung von Linsengläsern (543, 546, 549 f., 606), von Astronomie die Theorie der Mondbewegung (511, 514, 614 f., 612, wo der Gedanke an eine den Mond beeinflussende und der magnetischen

vergleichbare Kraft der Erde besondere Hervorhebung verdient), die Präcession der Nachtgleichen (524, 539, 630), das Problem der drei Körper (629), die Gestalt der Erde (630) und verhältnismässig am eingehendsten der betreffs der Förderung der Astronomie zwischen Engländern und Franzosen entbrannte Streit (630ff.). Weit reicher ist die Ausbeute an Urteilen über literarische und politische Ereignisse: so über Rousseau, über die Jesuiten (540, 560), über die Kriege (528 u.ff.), am reichsten natürlich über persönliche Verhältnisse: so betreffend das Fortschreiten der Encyklopädie (512, 515, 521, 524) und sich anknüpfende religiöse Streitigkeiten (532, 539, 626ff.), die Berufung nach Russland (528), Organisation der Akademie (567) und, bei einem Akademiker so naheliegend, Wahlen zu derselben (520, 523, 529, 609), ferner das Gesuch bei Friedrich d. Gr. um Gewährung von 2000 Thlrn. für eine Erholungsreise nach Italien und dessen köstliche, die Bitte gewährende Antwort (605), dass „ces rois... sont au moins bons à quelque chose". Tn.

Ch. Henry. Lettres inédites d'Euler à d'Alembert. Bonc. Bull. XIX. 136-148.

Die sechs hier veröffentlichten Briefe aus den Jahren 1747 bis 1749 stammen aus den d'Alembert'schen Papieren her, welche Frau O'Connor, Tochter Condorcet's, der Bibliothek des Institut de France vermachte. Die vier ersten beziehen sich auf die eben erschienene Introductio in analysin; insbesondere muss Euler wiederholt d'Alembert's Bedenken gegen die Theorie der imaginären Logarithmen negativer Zahlen widerlegen. Der vierte Brief giebt darüber Aufschluss, wie im Cap. 14 lib. II § 33 die widerspruchsvolle Darstellung über die Spitzen zweiter Art an Curven entstanden ist. Der fünfte Brief zeigt, dass Euler mit der Differentialgleichung einer von ihm erzeugten Curve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2)}{x(1-x^2)}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{1-x^2}$$

damals nichts anzufangen wusste. Endlich der letzte Brief ist das Begleitschreiben zur Scientia navalis. Lp.

P. RICCARDI. Per una completa collezione delle opere matematiche di Lorenzo Mascheroni. Bonc. Bull. XIX. 59-66.

Aufzählung und kurze Besprechung derjenigen Schriften von Lorenzo Mascheroni (geb. 13. Mai 1750, gest. 14. Juli 1800), die in einer Säcularausgabe zum Abdruck zu bringen sind.

Lp.

E. MAILLY. Les sociétés savantes et littéraires établies à Bruxelles sous la domination française. Belg. Bull. (3) XII. 786-794.

Ein einziger Mathematiker, de Nieuport, spielte darin eine Rolle. Mn.

CH. HENRY. Lettres inédites de Laplace publiées avec une première rédaction de sa méthode pour déterminer les orbites des comètes et une notice sur les manuscrits de Pingré. Bonc. Bull. XIX. 149-178.

Drei Briefe an Cordorcet (aus den Jahren 1771-75), deren erster auf die Integration von Differentialgleichungen Bezug hat, und drei Briefe an d'Alembert: der erste derselben (15. Nov. 1777) hebt des Adressaten Verdienste um das eben genannte Thema hervor, der zweite (aus 1777) behandelt das Gleichgewicht homogener Sphäroide, der dritte (10. März 1782) das Problem der schwingenden Saiten. Biographischen Bemerkungen über Pingré (S. 150f.) und einer Aufzählung seiner Schriften (S. 152-156) folgen dann zwei Briefe von Laplace an denselben, welche sich auf die Bestimmung der Kometenbahnen beziehen sowie (S. 166 bis 176) auf die erste ursprüngliche Darstellung seiner Lösungsweise dieser Aufgabe. Tn.

CH. HENRY. Sur quelques billets inédits de Lagrange. Bonc. Bull. XIX. 129-136.

Sieben kurze Briefe oder Bruchstücke von Briefen rein

privater Natur; dazu ein Brief von d'Alembert (7. Jan. 1764), worin dieser den in Paris krank liegenden Lagrange in den höchsten Lobsprüchen dem sardinischen Gesandten empfehlen lässt. Tn.

J. H. GRAF. Der Mathematiker Johann Georg Tralles (1763—1822). Bern. K. J. Wyss. 21 S. 8⁰.

Das Schriftchen, ein Separatabdruck aus der „Sammlung Bernischer Biographien", trägt im Titel noch den Zusatz: „Eine biographische Skizze, der Naturforschenden Gesellschaft in Bern zur Erinnerung an die am 18. Dez. 1786 erfolgte Gründung gewidmet". Geb. am 15. Oct. 1763 zu Hamburg, studirte Tralles in Göttingen unter Kästner, wurde 1785-1803 Professor in Bern, wo er 1786 einer der sieben Gründer der Naturforschenden Gesellschaft war, hielt sich bis 1804 in Neuenburg auf und lehrte zuletzt als Akademiker und Professor von 1804-1822 in Berlin; gest. in London am 18./19. Nov. 1822 (Vgl. Poggendorff, Biogr. lit. Handwörterbuch, das der Verfasser nicht citirt). Lp.

FR. PORRO. Notizie intorno alla vita ed agli scritti di Giuseppe Zecchini Leonelli, matematico cremonese. Bonc. Bull. XVIII. 652-671.

Biographische Notizen über den am 12. October 1847 als Director des physikalischen Kabinets zu Corfu verstorbenen Giuseppe Zucchini Leonelli, den Erfinder der Additions- und Subtractions-Logarithmen, die immer nach Gauss genannt werden; nebst einem Verzeichnis der von ihm hinterlassenen Schriften. M.

S. REALIS. Giovanni Plana (1781-1864). Bonc. Bull. XIX. 121-128.

Lobrede auf Plana, insbesondere als Lehrer der sogenannten höheren Mathematik; seine treffliche Art, die Geschichte seiner

Wissenschaft zu berücksichtigen, wird besonders hervorgehoben und an einzelnen Beispielen erläutert. Tn.

C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin. G. Reimer. 4°.

Dritter Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. 1884. VIII u. 612 S.

Vierter Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. 1886. IV u. 542 S.

Supplementband. Herausgegeben von E. Lottner. 1884. VIII u. 300 S.

Das Erscheinen von Bd. II. der gesammelten Werke von C. G. J. Jacobi ist F. d. M. XIV. 1882. 314 angezeigt worden. Bd. III., der 1884 erschienen ist, vereinigt die sämtlichen algebraischen und die auf die Transformationen vielfacher Integrale sich beziehenden Abhandlungen Jacobi's. Die letzteren sollten nach dem ursprünglichen, von C. W. Borchardt ausgearbeiteten Plane einen besonderen Band bilden; es ist aber Herrn Weierstrass zweckmässiger erschienen, sie von ersteren nicht zu trennen, weil in allen die algebraischen Untersuchungen, welche sie enthalten, die Hauptsache ausmachen. Der Inhalt umfasst 27 Nummern; die ersten 22 bringen Arbeiten, welche Jacobi selbst veröffentlicht hat, beginnend mit der Inauguraldissertation Jacobi's vom Jahre 1825, dann in chronologischer Folge fortschreitend bis zu einem Briefe Jacobi's an Hesse vom Jahre 1849. Mit Ausnahme zweier derselben, von denen die eine in den Astronomischen Nachrichten, die andere in Liouville's Journal erschienen ist, wurden alle übrigen in Crelle's Journal veröffentlicht. Die folgenden 4 Nummern geben Arbeiten aus dem Nachlasse Jacobi's. Zunächst hat sich in den hinterlassenen Papieren ein Exemplar der Dissertation vorgefunden, in welchem von Jacobi an vielen Stellen stilistische Aenderungen vorgenommen, zugleich aber auch mehrere Paragraphen mit handschriftlichen Zusätzen von erheblicher Ausdehnung versehen worden sind;

diese Zusätze sind unter dem Titel „Additamenta ad commentationem quae inscripta est“ etc. abgedruckt worden (30 S.). Die nächstfolgenden beiden Nummern sind bereits von Borchardt im Journal f. Math. LIII. 265-270, 275-280 bekannt gemacht. Die letzte Nummer des Nachlasses endlich, welche von Herrn H. Kortum aus den hinterlassenen Papieren Jacobi's mitgeteilt wird, betrifft „Bemerkungen zu einer Abhandlung Euler's über die orthogonale Substitution“. Die Nummer 27 enthält die Anmerkungen des Herausgebers, aus deren letzter hervorgeht, dass die Herren Baltzer, Kortum, Mertens und Netto neben Herrn Weierstrass für diesen Band thätig gewesen sind.

Der von Herrn E. Lottner herausgegebene Supplementband, welcher ebenfalls 1884 erschienen ist, enthält die im Jahre 1866 von A. Clebsch herausgegebenen „Vorlesungen über Dynamik“ in einer zweiten, revidirten Ausgabe ohne die damals ihnen beigefügten fünf Abhandlungen aus Jacobi's Nachlasse. Die letzteren sollen nämlich nach dem für die Herausgabe der Werke festgestellten Plane in diesen ihren Platz finden, und zwar in Bd. V neben einigen anderen. Der Herausgeber der neuen Ausgabe der Dynamik hat gerade wie Clebsch nur an einigen Stellen, wo er den Ausdruck nicht genau oder nicht deutlich genug fand, leichte stilistische Aenderungen an dem Texte der ersten Ausgabe angebracht, welchem die von C. W. Borchardt mit grosser Sorgfalt ausgearbeiteten Vorträge Jacobi's im Wintersemester 1842-43 zu Grunde liegen, im übrigen aber hat er sich darauf beschränkt, die in der ersten Ausgabe stehen gebliebenen, nicht zahlreichen Druck- und Rechenfehler zu berichtigen.

Der vierte Band endlich enthält sämtliche auf die Theorie der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen, sowie auf die Dynamik sich beziehenden Abhandlungen, welche von Jacobi selbst veröffentlicht sind. Aus dem bisher ungedruckten Nachlasse ist nur die letzte Abhandlung (Nr. 19, Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium) aufgenommen worden; in ihr wird ein S. 484 dieses Bandes ohne Beweis ausgesprochener Satz begründet. Von den Abhandlungen des Ban-

des sind die Nummern 1, 2, 6 von Herrn Frobenius, Nr. 9 vom Herausgeber, alle übrigen von Herrn Wangerin revidirt worden. Die Reihenfolge der Abhandlungen ist wieder die chronologische. Während die umfangreichen und wichtigen Arbeiten zuerst in Crelle's Journal für Mathematik veröffentlicht sind, finden sich auch in anderen Zeitschriften, den C. R. der Pariser Akademie, dem Giornale arcadico und den Astronomischen Nachrichten, zerstreut kleinere Mitteilungen über die Gegenstände, welche in den grossen Abhandlungen untersucht sind. Lp.

A. F. Möbius. Gesammelte Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. II und III. Herausgegeben von F. Klein. Leipzig. S. Hirzel. VIII u. 708 S., VI u. 508 S. gr. 8°.

Der erste Band dieser Möbius-Ausgabe ist F. d. M. XVII. 1885. 16-17 angezeigt worden. Nach dem dort angegebenen Programme bringt der vorliegende zweite Band diejenigen geometrischen Untersuchungen von Möbius, welche nicht unmittelbar mit dem barycentrischen Calcül zusammenhängen. Dieselben umfassen fünf Gruppen von Abhandlungen, nämlich: 1) drei Arbeiten zur analytischen Sphärik, 2) drei über die Grundformen der Curven dritten Grades, 3) sieben zur Lehre von der Kreisverwandtschaft, 4) fünf zur Theorie der Symmetrie und Involution, 5) vier zur Polyedertheorie, unter diesen zwei umfangreiche aus dem Nachlasse. Innerhalb dieser fünf Abteilungen ist die Reihenfolge der Arbeiten eine chronologische. Die beiden hier zum ersten Male veröffentlichten Abhandlungen des Nachlasses sind Teile eines grösseren Aufsatzes, mit welchem Möbius 1861 um den grossen Preis der Mathematik in Paris sich beworben hat (question des polyèdres), von der er aber, wie sich das jetzt zeigt, selber bereits den wesentlichen Inhalt in seinen beiden letzten Schriften hat erscheinen lassen. Herr C. Reinhardt, dem die Bearbeitung des Nachlasses zugefallen ist, teilt mit, dass Möbius elf vollständige datirte Diarien hinterlassen hat, aus denen sich die Zeit und Art der Entstehung aller Möbius'-

schen Arbeiten von 1820-65 erkennen lässt, und dass im vierten Bande ein zusammenfassender Bericht über den sonstigen Inhalt des Nachlasses abgedruckt wird.

Der dritte Band, welcher dem zweiten schnell gefolgt ist, gestaltete sich verhältnismässig einfach, indem es sich in der Hauptsache um einen Abdruck des „Lehrbuchs der Statik" handelte. Des weiteren schliessen sich in chronologischer Reihenfolge sechs kleinere Abhandlungen verwandten Inhaltes an, von denen fünf im Crelle'schen Journale, die sechste in den Leipziger Sitzungsberichten erschienen sind. Zwei andere ebenfalls hierhergehörige sind wegen ihrer geometrischen Bedeutung mit dem barycentrischen Calcül zusammen im ersten Bande abgedruckt worden. Der Herausgeber, dem Herr Staude wie beim zweiten Bande ausgiebige Hülfe leistete, hat den Wiederabdruck unter Beobachtung derselben Grundsätze wie dort geleitet, die Ausdrucksweise von Möbius, wie billig, möglichst ungeändert beibehalten, die ursprünglich auf einzelnen Kupfertafeln vereinigten Figuren jedoch in den Text eingefügt. Die Wichtigkeit des Lehrbuchs der Statik für die Entwickelung der Mechanik hat R. Baltzer in dem Vorworte zum ersten Bande zwar kurz, aber vortrefflich geschildert. Es führte gleich am Anfange die Kräftepaare ein, operirte mit den Strecken, gab die Theorie der Nullsysteme, u. s. w. Lp.

G. Eneström. Carl Johan Malmsten. Illustrerad Tidning (Stockholm). 75-76.

C. J. Malmsten, geboren den 9. April 1814 zu Uddetorp in Schweden, wurde 1840 Privatdocent und 1842 ord. Professor der Mathematik an der Universität in Upsala; 1859 wurde er zum Staatsrath ernannt, war 1866-1879 Landeshauptmann der Provinz Skaraborg und starb zu Upsala den 11. Febr. 1886. Als Universitätslehrer übte er einen grossen und dauernden Einfluss; er war der erste, der in Schweden die Functionentheorie Cauchy's bekannt machte. Seine Abhandlungen berühren verschiedene Gegenstände der mathematischen Analysis; die bedeutendste ist die

Untersuchung über das Restglied der Euler'schen Summenformel (Crelle Journal für Math. XXXV. 1847), welche von vielen späteren Verfassern benutzt worden ist. Auch hat er sich um die Entwickelung der schwedischen Lebensversicherungsanstalten grosse Verdienste erworben. E.

E. DE JONQUIÈRES. Notice sur la vie et les travaux de Louis-François Clément Bréguet. C. R. CIII. 5-14.

Geb. zu Paris am 22. Dec. 1804, gest. ebenda am 27. Oct. 1883, Mitglied der Akademie 1874, war Bréguet Leiter einer Werkstatt für wissenschaftliche Instrumente, aus welcher die Apparate für die Versuche von Fizeau, Cornu u. a. m. hervorgegangen sind. Als Nachfolger von ihm in der Akademie hielt Herr de Jonquières die in den C. R. abgedruckte Rede. Lp.

A. MARRE. Notice sur la vie et les travaux de François-Joseph Lionnet. Bonc. Bull. XVIII. 424-440.

Lionnet, 1805 geboren, wächst in ärmlichen Verhältnissen auf, wird Kaufmannslehrling, dann Corrector, bildet sich durch beharrlichen Fleiss aus zum Institutslehrer, wird dann (1826) Lehrer in Epinal, wo er sofort einen Arbeiterbildungsverein gründet, und 1832 Prof. der Mathematik in Nancy, 1839 in Metz, 1840 in Paris, wo er über ein Vierteljahrhundert lehrt und von 1847-76 examinateur d'admission à l'École navale ist. Er stirbt 26. August 1884. Besonders hervorgehoben werden seine Verdienste um Gründung (1848) und langjährige Leitung der unentgeltlicher gewerblicher Ausbildung dienenden Association philotechnique in Paris, welche mit 13 Lehrcursen begann und gegenwärtig deren 280 zählt mit 12000 Zuhörern. S. 429-440 enthält das Verzeichnis von Lionnet's Schriften. Tn.

W. DYCK. Zur Erinnerung an Ludwig Scheeffer. Schlömilch Z. XXXI. Hl. A. 50-55.

Geb. am 1. Juni 1859 in Königsberg i. Pr., gest. am 11. Juni 1885 in München. Vgl. den Nekrolog von G. Cantor in Bibl. Math. 1885 (F. d. M. XVII. 1885. 19). Lp.

G. H. HALPHEN. Notice sur les oeuvres de M. Bouquet (Jean - Claude), membre de l'Académie des Sciences. C. R. CII. 1267-1273.

Ein kurzer Bericht über die Entstehung und den Zusammenhang der Werke von Bouquet (geb. den 7. Sept. 1819, Lehrer in Lyon mit seinem Mitschüler Briot aus der École Normale, später in Paris, Mitglied der Akademie am 19. April. 1875, gest. am 9. Sept. 1885. Vgl. F. d. M. XVII. 1884. 20). Am Schlusse der Notiz eine chronologische Liste der Schriften Bouquet's. Lp.

AUG. SCHMIDT. Wilhelm Unverzagt. Ein Nekrolog von einem ehemaligen Schüler. Schlömilch Z. XXXI. Hl. A. 41-50.

Wilhelm Unverzagt, geb. zu Bad Ems am 17. Dec. 1830, Lehrer und später Director in Wiesbaden, Verfasser der „Theorie der goniometrischen und longimetrischen Quaternionen“ (1876) und einer Reihe von mathematischen Abhandlungen, unter ihnen die Programmabhandlung (1871): „Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden“, welche die von Herrn Schwering weiter bearbeiteten Liniencoordinaten in den Unterricht einführte, verunglückte auf dem zugefrorenen Rhein Ende Januar 1885, wurde erst im August des Jahres aufgefunden und in Wiesbaden am 3. October begraben. Lp.

ED. PHILLIPS. Notice sur M. de Saint - Venant et sur ses travaux. C. R. CII. 141-147.

Barré de Saint-Venant (Adhémar-Jean-Claude), geboren zu Villiers-en-Bièrre (Seine-et-Marne) den 23. August 1797, Schüler

der École Polytechnique, war während fünfundzwanzig Jahre Ingénieur des Ponts et Chaussées. Im Jahre 1848 zog er sich vom praktischen Leben zurück und widmete sich ganz der Wissenschaft. 1868 zum Mitglied der Académie des Sciences gewählt, starb er hochbetagt am 6. Januar 1886 zu Vendôme.

Hch.

Ed. Weyr. Dr. Ludwig Kraus, sein Leben und Wirken. Casop. XV. 49. (Böhm.)

Dieser der mathematischen Wissenschaft leider zu früh entrissene Schüler von Klein, Weierstrass und Kronecker wurde am 9. April 1857 zu Turnau in Böhmen geboren, studirte in Wien, Prag, München und Berlin, habilitirte sich als Privatdocent der Mathematik an der Prager Universität und begann 1882/3 seine Vorlesungen an der mittlerweile abgetrennten böhmischen Abteilung derselben. Stets kränkelnd, suchte er im Süden Linderung seines Brustübels, erlag demselben jedoch trotz aller Schonung am 1. Januar 1886 zu Arco. Die Wissenschaft verlor in ihm einen tiefsinnigen Forscher, was auch die von ihm veröffentlichten Abhandlungen, über welche in diesem Jahrbuch berichtet ist, bestätigen.

Std.

J. Bertrand, L. Troost. Discours prononcés aux obsèques de M. Jamin. C. R. CII. 337-343.

Jules Jamin, geb. zu Termes in den Ardennen am 31. Mai 1818, gest. im Febr. 1886 zu Paris, Schüler der École Normale, Lehrer 1841 zu Caen, 1844 in Paris am Collège Louis-le-Grand, 1852 Professor an der École Polytechnique, 1863 ausserdem an der Faculté des Sciences, in seinem letzten Lebensjahre Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

Lp.

E. Catalan. Savin Realis †. Nouv. Ann. (3) V. 200-203.

A. Genocchi. Cenni sull' ingegnere Savino Realis. Batt. G. XXIV. 56. Torino Atti XXI. 549-551.

A. Genocchi. Brevi cenni della vita dell' ingegnere Savino Realis. Bonc. Bull. XIX. 55-58.

Savino Realis, geb. zu Turin am 18. Oct. 1818, gest. ebenda am 9. Febr. 1886, studirte die Ingenieurwissenschaften zu Turin unter Plana, Bidone, Giulio, zu Paris von 1840-42 auf der École Royale des Ponts et Chaussées, wurde Ingenieur im Staatsdienst (zu Turin) 1846, Privat-Ingenieur 1851, lebte nach der Vollendung der piemontesischen Eisenbahnen nur der Beschäftigung mit der reinen Mathematik bis an seinen Tod. Lp.

D. Padelletti. Ettore Caporali. Napoli Annuario.

Lebensskizze des Geometers Ettore Caporali (geb. zu Perugia den 17. Aug. 1855, gest. zu Neapel den 2. Juli 1886) mit darauf folgender kurzer Besprechung der von ihm veröffentlichten Schriften sowie derer, die noch nicht gedruckt sind und mit den ersteren zusammen in einem unter der Presse befindlichen Buche erscheinen werden, betitelt: „Memorie di geometria di Ettore Caporali" (Napoli, Pallerano). La. (Lp.)

J. Bertrand, G. H. Halphen. Discours prononcés aux obsèques de M. Laguerre. C. R. CIII. 407, 424-425.

Laguerre starb am 13. Aug. 1886 im Alter von 52 Jahren, nachdem er 22 Jahre Professor der Mathematik an der École Polytechnique, ein Jahr Professor der mathematischen Physik am Collège de France gewesen war. Lp.

E. Catalan. Mélanges mathématiques. Liège Mém. (2) XII, XIII.

In diesen beiden ungemein interessanten Bänden hat der Verfasser eine Unzahl von Noten vereinigt, die er von 1838 bis 1886 in verschiedenen französischen, belgischen und italienischen Zeitschriften veröffentlicht hat, ausserdem aber auch eine gewisse Anzahl nicht veröffentlichter Artikel. Die seit 1868 gedruckten

sind in Darboux Bull. und im Jahrbuch über die F. d. M. je nach ihrem Bekanntwerden angezeigt worden; die meisten anderen sind an der ihrem Gedankeninhalte zukommenden Stelle in dem „Discours sur les travaux mathématiques de M. Eugène Charles Catalan“ von P. Mansion (Liège Mém. XII. 1-38, F. d. M. XVII. 1885. 21) angeführt.

Beide Bände enthalten u. a. aus der Zahlentheorie mehrere Noten über die partitio numerorum, ferner mehrere Noten über die Bernoulli'schen Zahlen, unzählige Untersuchungen über die Reihen und besondere bestimmte Integrale, viele allgemeine oder specielle Sätze aus der Theorie der Oberflächen (abwickelbare Oberflächen, Elassoide, Orthogonalflächen, krummlinige Coordinaten). Manche sind auch elementarer Natur aus der Algebra, der Geometrie, der ebenen analytischen Geometrie, der sphärischen Trigonometrie; einige beziehen sich auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es ist indes unmöglich, in wenigen Zeilen unter scharf gefassten Titeln die 215 grossen oder kleinen Noten einzuordnen, welche der Verfasser auf 800 Seiten gesammelt hat und welche mit der allen seinen Werken eigentümlichen Klarheit und Schärfe geschrieben sind. Mn. (Lp.)

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Houzeau. Coup d'oeil sur l'évolution scientifique. Belg. Bull. XII. 795-813.

Nach dem Verfasser ist die Reihenfolge in der Entwickelung: Die subjectiven Wissenschaften, deren Ursprung im Menschen selbst liegt und die deductiv verfahren (Mathematik, Philosophie), dann die objectiven, auf die Beobachtung sich stützenden, inductiv vorgehenden. (Die Geschichte der Astronomie im Altertume scheint dieser Ansicht zu widersprechen; der Verfasser scheint uns auch den Hindus und den Arabern Kenntnisse zuzuschreiben, welche die Griechen schon besassen). Mn. (Lp.)

JOHN. Ueber die Einführung der allgemeinen Zahlzeichen in die Mathematik. Wien. Pichler's Wwe. & S.

P. TANNERY. Sur la représentation des fractions chez les Grecs. Biblioth. Mathem. 235-236.

Herr Tannery bemerkt, dass der angebliche Bruchstrich, dessen Gebrauch bei den Griechen von Gardthausen angekündigt worden ist, nur das Resultat einer Addition bezeichnet, und dass ein wirklicher Bruchstrich niemals in griechischen Handschriften vorkommt. E.

C. DEMME. Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes und Hero. Schlömilch Z. XXXI. Hl. A. 1-27.

Die ersten fünf Seiten sind der Begründung der Meinung gewidmet, dass die von Tannery und Zeuthen gegebenen Wiederherstellungen altgriechischer Wurzelausziehungen, bzw. Auffindungen von Näherungswerten, entweder nicht dem altgriechischen Geiste angepasst oder, weil teilweise erst im sechsten oder gar neunten Näherungswert Richtiges gebend, nicht einfach genug oder, wie die zweite Tannery'sche Methode, zwar einfach, aber manchen der alten Lösungen nicht entsprechend sind. So macht sich der Verfasser an die Auffindung eines neuen Weges. Von zwei Archimedischen Näherungswerten für $\sqrt{3}$ ausgehend, gelangt er (S. 6) zunächst zu der Näherungsformel $\sqrt{\frac{a\mp 2}{a\pm 2}} \lessgtr \frac{a\mp 1}{a\pm 1}$, und in Verwertung pythagoreischer Flächenvergleichung, insbesondere der zur Erläuterung des Satzes von den achtfachen Dreieckszahlen dienenden Figur, sowie unter Annahme der Benutzung einer Quadratzahlentabelle durch die alten Griechen kommt er zur Aufstellung von vier Näherungsformeln, deren letzte in besonderem Falle in die vorhin genannte übergeht. Eine Erprobung der aufgestellten Rechenformeln an den überlieferten 7 Archimedischen und 25 Heronischen Zahlwerten

sowie ein Ausblick auf die verwandten indischen Rechenergebnisse macht den Abschluss. Tn.

E. Mahler. Zur talmudischen Mathematik. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 121-132.

Es wird durch Uebersetzung und Besprechung betreffender Talmudstellen nachgewiesen, dass ausser den bis jetzt bekannten Näherungswerten $1\frac{2}{5}$ und $1\frac{31}{75}$ für $\sqrt{2}$ auch der weitere bei Archimedes vorkommende Näherungswert $\frac{99}{70}$ talmudisch ist, und dass der Verfasser des bezüglichen Tractates deutlich die Unmöglichkeit einer genauen Wertbestimmung angiebt, zufolge seinen Worten: „Man gelangt nie zu den Grenzen der Rechnung.... Und es liegt dies nicht in einem Wissensmangel unsererseits, sondern in der Art und Eigenschaft dieser Rechnung“. Eine beigegebene Blütenlese von Talmudstellen geometrischer Art beweist Stärke und Schwäche der alten Rabbiner im Gebiete des pythagoreischen Satzes. Tn.

A. Genocchi. Intorno all' ampliazione d'un lemma del Gauss. Bonc. Bull. XVIII. 650-651.

Hinsichtlich der Schering'schen Erweiterung des Gauss'schen Kriteriums für den quadratischen Rest-Charakter und Kronecker's Bemerkung dazu (Berl. Monatsber. 1876, 330-341; F. d. M. VIII. 1876. 93-95) erinnert der Verfasser an eine von ihm bereits am 6. Nov. 1852 der Belgischen Akademie überreichte Abhandlung. M.

P. Nekrassoff. Die Bedeutung und die historische Entwickelung der Theorie der Determinanten. Phys.-math. Wiss. (A). II. 169-178. (Russisch.)

E. Catalan. Une polémique entre Goldbach et Daniel Bernoulli. Bonc. Bull. XVIII. 464-468.

Um d. J. 1729 schreibt Goldbach (1690-1764) an D. Bernoulli Folgendes: Wenn in der Reihe $A = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$, deren allgemeines Glied $= \frac{1}{(x+1)^2}$, alle die Glieder weggestrichen werden, deren Nenner auch eine oder mehrere 3te, 4te, ... Wurzeln haben, und wenn in den Nennern der übrigbleibenden Brüche je 1 subtrahirt wird, so dass

$$B = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} + 0 + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{48} + 0 + 0 + \tfrac{1}{99} + \cdots$$

entsteht, so ist $B = A$. Bernoulli bestreitet dies und versucht einen Gegenbeweis; Goldbach beharrt aber bei seinem Satze und verallgemeinert ihn noch dahin, dass der Exponent 2 durch ein positives n ersetzt werde. Bei dieser Gelegenheit bemerkt er auch, dass die dabei vorkommende Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\cdots$ den Wert 1 habe; Euler hat (1737) einen Beweis hierfür gegeben, den aber, als ungenügend, Catalan passend ersetzte (1842).

Tn.

G. Eneström. Sur un théorème de Goldbach (Lettre à Boncompagni). Bonc. Bull. XVIII. 468.

Catalan war zu seiner in der vorigen Nummer mitgeteilten Notiz gekommen beim Suchen nach dem Wortlaut des sog. Satzes von Goldbach, dass jede gerade Zahl die Summe zweier Primzahlen sei. Terquem hat nämlich diesen Satz Waring zugesprochen, Eneström sowenig aber als Buniakowsky vermochten bis dahin das erstmalige Auftreten desselben festzustellen.

Tn.

G. Pfeifer. Leonardo von Pisa (Fibonacci) und die von ihm zuerst aufgestellte recurrente Reihe. Hoffmann Z. XVII. 250-254.

G. Pfeifer. Die Beziehungen der mathematischen Verhältnisse musikalischer Intervalle zur recurrenten Reihe. Hoffmann Z. 482-491.

Die in Rede stehende Reihe wird gewöhnlich die Lamé'sche genannt, kommt aber schon bei Leonardo im 13. Jahrhundert vor,

und zwar bei der Lösung der Aufgabe: Wie viele Paare Kaninchen entstehen im Laufe eines Jahres aus einem Paare? Ihr allgemeines Glied ist $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, so dass sie mit den Anfangsgliedern $u_0 = 0$ und $u_1 = 1$ lautet: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Nimmt man innerhalb der ersten Octave die Consonanzen Prime, Octave, Quinte, grosse Sexte, kleine Sexte mit den Intervallen 1:1, 1:2, 2:3, 3:5, 5:8 und bildet für jedes die Differenz der Verhältniszahlen, so erhält man die 5 ersten Glieder der Reihe 0, 1, 1, 2, 3. Auch bei drei- und vierstimmigen Accorden wird ihr Vorkommen nachgewiesen. Lg.

S. Mansion et G. Eneström. Notes historiques sur la formule générale d'interpolation de Newton. Biblioth. Mathem. 141-144.

Herr Mansion macht darauf aufmerksam, dass die allgemeine Interpolationsformel Newton's schon in einem Briefe an Oldenburg vom 24. October 1676 angedeutet ist. Herr Eneström giebt einige Notizen über die Beweise derselben Formel, die von Cotes, Hermann und Craig gegeben worden sind. E.

P. M. Pokrowsky. Historische Skizze der Theorie der ultraelliptischen und Abel'schen Functionen. Phys.-math. Wiss. (A). II. 47-65, 159-169. (Russisch.)

Th. Reye. Die synthetische Geometrie im Altertum und in der Neuzeit. Strassburg i. E. Rectoratsrede.

C. Demme. Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes und des Baudhâyana über die Quadratur des Kreises. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 132-135.

Im mathematischen Papyrus Rhind wird als Seite des der Kreisfläche gleichen Quadrates der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Durchmesser gewählt. Verfasser versucht den Weg anzugeben, wie man dazu gelangte: werden die einen Kreis in 12 gleiche

Teile teilenden Punkte fortlaufend mit 1-12 bezeichnet, so bilden die Linien $\overline{13}, \overline{46}, \overline{79}, \overline{10\,12}$ ein Quadrat, das dem Kreise gleich wäre, wenn jedes den Kreis überragende dreieckige Flächenstück einem der entstehenden Segmente gleich wäre; die Annahme, dass dies eintritt, wenn die auf der Quadratdiagonale gemessene Höhe des ersteren doppelt so gross ist als die des zweiten, führt zur genannten Constructionsweise. Eine entsprechende Vergleichung zwischen Diagonale und Quadratseite führt zu dem indischen Werte des behufs Quadratur zum Durchmesser gehörigen Factors.

Tn.

P. Bergh. Seiten- und Diametralzahlen bei den Griechen. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 135.

Werden in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse $BC = \delta_{n-1}$, die Katheten $AB = AC = \alpha_{n-1}$ um $BD = CE = \delta_{n-1}$ verlängert, dann von B und C aus auf DE die Senkrechten BF und CG gefällt, so wird

$$DE = \delta_n = 2\alpha_{n-1} + \delta_{n-1} \quad \text{und} \quad AD = \alpha_n = \alpha_{n-1} + \delta_{n-1},$$

d. h. es entstehen die bei Theon von Smyrna (S. 43 der Ausg. v. Hiller) betrachteten sog. Seiten- und Diametralzahlen in schönster geometrischer Weise.

Tn.

J. S. Mackay. The ancient methods for the duplication of the cube. Edinb. M. S. Proc. IV. 2-17.

Der Artikel stellt die von den alten griechischen Geometern zur Lösung der Aufgabe angewandten Methoden dar. Die Lösungen sind übersetzt aus dem Commentar des Eutocius aus Askalon zur Abhandlung des Archimedes über Kugel und Cylinder.

Gbs. (Lp.)

S. Günther. Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Curventheorie. Biblioth. Mathem. 137-140.

Beim Studiren der Schrift Dürer's: „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt“ (1525) hat Herr Günther

gefunden, dass Dürer um die Lehre von den höheren Curven grössere Verdienste gehabt hat, als man gewöhnlich annimmt. Besonders ist hervorzuheben, dass Dürer der Urheber einer allgemeineren Auffassung des Asymptotenbegriffs ist, und dass er der erste moderne Mathematiker ist, der neue Formen von höheren Curven erfunden hat. Unter diesen neuen Curven nennt Herr Günther gewisse cyklische Curven und eine Art von Muschellinien, deren Gleichung vom achten Grade ist. E.

Bianco. L'esagramma di Pascal, nota storica. Torino Att. XXI. 686-697.

Aus dem Briefwechsel zwischen Bessel und Olbers geht hervor, dass Bessel im Jahre 1820 den Pascal'schen Satz über das einem Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck selbständig noch einmal entdeckt hat, ohne zu wissen, dass Pascal denselben schon früher (1640) gefunden. Den betreffenden Briefen der beiden Gelehrten sind ausführliche literarische Notizen über das Hexagrammum mysticum beigegeben. Lg.

V. Prou. Les ressorts-battants de la chirobaliste d'Héron d'Alexandrie, d'après les expériences de 1878 et suivant la théorie qui en a été déduite en 1882. Mém. de l'Ac. des inscriptions. XXXI. I; Ref. Darb. Bull. (2) X. 65-66.

C. Wolf. Sur le rôle de Lavoisier dans la détermination de l'unité de poids du système métrique. C. R. CII. 1279-1284.

E. Grimaux. Lavoisier et la Commission des Poids et Mesures. C. R. CII. 1362-1364.

Aus einer Stelle des ersten Bandes in 4° vom Bulletin des Sciences publié par la Société philomathique de Paris und aus einem Bericht an die Akademie in den Archiven der Gesellschaft, sowie durch Vergleich mit dem aufbewahrten Original-Cylinder, dessen

Construction bisher dem Lefèvre-Gineau zugeschrieben ist, geht hervor, dass Lavoisier und Hauy dieses Gefäss zur Abwägung destillirten Wassers construirt haben. Das Gesuch der Commission des Poids et Mesures um Freilassung von Lavoisier nach seiner Verhaftung wurde vom Wohlfahrtsausschuss abschläglich beschieden; ferner wurden Borda, Lavoisier, Laplace, Coulomb, Brisson und Delambre nach diesem Schritte aus der Commission entlassen. Lp.

Govi. Di una lente per cannocchiale, lavorata da Evang. Torricelli. Nap. Rend. XXV. 163-169.

R. M.

P. Tannery. Autolycos de Pitane. Bordeaux. Mém. (3) II. 173-199.

Der um die Aufhellung altgriechischer Mathematik so verdiente Verfasser beschäftigt sich in diesem Aufsatz mit der Theorie der wahren und scheinbaren Auf- und Untergänge der Fixsterne, welche Autolykos von Pitane gegen Ende des 4. Jahrhunderts v. Chr. aufgestellt hatte, welche übrigens nur als erste Annäherung Wert besitzt und von Ptolemäus schon vollständig aufgegeben wurde. Diese Auf- und Untergänge waren ja für Landbau und Schiffahrt Merkzeichen der Jahreszeiten; sie ermöglichten neben dem lunisolaren bürgerlichen Jahre ein im Vergleich damit für die Regelung der Feldarbeiten geeigneteres Sternjahr, wie der Verfasser aus Hesiod und Späteren nachweist. Nebenher geht ihre Verwertung zur abergläubischen Sterndeuterei und Wahrsagung — begreiflich, dass sie reichlich beobachtet wurden. Verhältnismässig spät erst begegnet man aber einer Theorie dieser Erscheinungen, und eben die von Autolykos aufgestellte Theorie sowie die dazu ausgedachten einfachen Hypothesen stellt der vorliegende Aufsatz in mathematischen Zeichen fest. Er vergleicht damit dann noch die bei Geminus erhaltenen Ueberreste von Kalenderangaben (παράπηγμα), welche auf Vorläufer des Autolykos zurückgehen, insbesondere genauer

und mit Textkritik verbunden die von Eudoxus; obwohl er diesen letzteren nicht als im vollen Besitze der von Autolykos entwickelten Theorie findet, glaubt er sich doch die Vermutung gestatten zu dürfen, dieser habe jenem die Grundzüge seiner Theorie entnommen (p. 190). Den Schluss der Abhandlung bildet eine Untersuchung über die zumal von Eudoxus benützten mechanischen Hülfsmittel zur Himmelsbeobachtung. Tn.

A. DA SCHIO. Di un astrolabio septentrionale degli Arabi posseduto da Signor Luciano Toschi da Imola. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 1347-1352.

Der Verfasser hatte zwei ähnliche Astrolabien mit kufischer Aufschrift bereits in einer früher (Venedig 1880) erschienenen Schrift beschrieben, und auf diese frühere Veröffentlichung wird deshalb vielfach Bezug genommen. Abweichungen sind vorhanden, aber meist nur von geringem Belange. Beachtenswert aber erscheint, dass das Astrolabium von Imola das Frühlingsäquinoctium auf den 13. März verlegt; denn man kann aus dieser Angabe, wenn man die Differenz zwischen neuem und altem Kalender richtig in Rechnung bringt, die Entstehungszeit des Instrumentes ermitteln. Dasselbe dürfte zwischen 1200 und 1225 n. Chr. angefertigt worden sein. Auch auf den Ort, an welchem es gebraucht ward, lässt sich ein annähernder Schluss ziehen, und zwar muss dieser Ort in Sevilla oder in einer andern bedeutenden Stadt des Kalifates Cordova erkannt werden.

Gr.

G. BILFINGER. Die Zeitmesser der antiken Völker. Pr. Eberhard-Ludwigs-Gymn. Stuttgart.

Die umfassende Untersuchung beginnt mit den unvollkommenen Uhren der griechischen Blüteperiode; der Wasseruhr substituirten namentlich die Athener den Gnomon, der stellenweise sogar durch das primitive Schattenmass des menschlichen Körpers ersetzt gewesen zu sein scheint. Die correcte Sonnenuhr, welche dem Systeme der für das gesamte Altertum

massgebenden ungleichen, d. h. mit den Jahreszeiten an Länge wechselnden, Tages- und Nachtstunden angepasst war, ist uns besonders durch die Beschreibung des Vitruv bekannt geworden; der Verfasser erörtert dieselbe ausdrücklich und beschäftigt sich namentlich mit der Natur der sogenannten „Stundenlinien“ (Hyperbeln). Ebenso ist Vitruvius unsere beste Quelle hinsichtlich der verbesserten Wasseruhr, auf deren „Zifferblatt“, wie wir heute sagen würden, ein stereographisches Kreisnetz verzeichnet gewesen sein muss. Zum Schlusse werden die „Stundentabellen“ besprochen, deren drei auf uns gekommen sind, eine bei Palladius, eine in einer nubischen, von Letronne entzifferten Inschrift und eine im Lehrgedichte des der Karolingerzeit angehörigen Mönches Wandalbert. Im übrigen verweist Referent auf seinen eingehenden Bericht über die Bilfinger'sche Schrift in der „Philolog. Wochenschrift“. Gr.

C. Anschütz. Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. Schlömilch Z. XXXI. Hl.-A. 161-171, 201-219.

Der Verfasser hat, veranlasst durch eine Stelle in dem von ihm herausgegebenen Briefwechsel Kepler's mit Herwart von Hohenburg, die in Kepler's Werken und Briefen zerstreuten Aeusserungen über die Ungleichungen des Mondumlaufes einer kritischen Vergleichung unterworfen, deren Resultat den, nach den in extenso mitgeteilten Belegstellen zu urteilen, bündigen Beweis liefert, dass die Entdeckung der jährlichen Gleichung nicht, wie bisher allgemein angenommen wurde, Tycho, sondern Kepler gehört, dass dagegen Tycho als der selbständige, wenn auch möglicherweise nicht als der erste Entdecker der Variation anzusehen ist. B.

Bertauld. Le nombre géométrique de Platon, par J. Dupuis. Bonc. Bull. XVIII. 441-450.

Die Arbeit ist selbst ein Referat über zwei Abhandlungen

von Dupuis, in denen derselbe eine dunkle Stelle in Platon's Republik aufzuklären versucht. Es heisst daselbst, dass die politischen Ereignisse ebenso wie die Bewegungen der Himmelskörper eine bestimmte Periode befolgen. Die Dauer dieser Periode, „die Platonische Zahl", soll nach den Untersuchungen Dupuis' 760000 = 76 Myriaden sein. Lg.

E. Mahler. Untersuchung einer im Buche „Nahum" auf den Untergang Niniye's bezogenen Finsternis. Wien. Ber. XCIII. 455-469.

Die Frage, ob der Prophet Nahum (I, 8) auf eine die Eroberung der assyrischen Hauptstadt begleitende Finsternis anspielen wollte, wird vom Verfasser in dem Sinne beantwortet, dass dann jenes Ereignis zu einer späteren Zeit, als die Historiker gewöhnlich annehmen, nämlich am 16. März 580 v. Chr. stattgefunden haben müsse. Die zu diesem Zwecke angestellten umfänglichen Rechnungen führen daneben noch zu einem anderen wichtigen Resultate: die angeblich von Thales vorausgesagte Sonnenfinsternis, welche während der Schlacht am Halys die Heere der Lyder und Meder erschreckte, wird auf den 28. Mai 584 verlegt. Gr.

A. Forti. Intorno alle macchie solari. Cenni storici. Bonc. Bull. XVIII. 453-463.

Historische Bemerkungen zur Beobachtung der Sonnenflecken, Erwähnung derselben im Altertum, Beobachtungen von Galilei und Johann Fabricius, über P. Scheiner's Rosa Ursina und neuere Untersuchungen über Gestalt der Sonnenflecken, Häufigkeit derselben und verwandte Fragen. M.

Capitel 2.
Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

Bauch. Der Satz der Identität. Pr. Gymn. Doberan.

Bauch entwickelt in seiner Arbeit über den Satz der Identität die Grundlagen eines objectiven Idealismus bis zum Nachweis des Daseins eines persönlichen Gottes als der Grundursache alles körperlichen und geistigen Daseins. Ihm ist der Gedanke der Wirklichkeit, das Bewusstsein, mit dem wir uns selbst und alle Dinge um uns her umfassen, der directe Ausfluss einer bedingten an sich unbewussten Bewusstseinskraft, aber auch der indirecte Ausfluss eines Absoluten, in dem wir leben und weben. Die Analyse des Identitätssatzes, der logischen Grundlage aller Urteile, in dessen Copula er die Synthese der unendlichen Zeit findet, welcher hinwiederum eine ruhende Totalität zu Grunde liegt, führt Bauch auch auf die Besprechung der geometrischen Axiome (S. 6-10). Sie sind ihm synthetische Sätze von principieller Bedeutung, die Quelle für die einzelnen Identitätsgleichungen der Mathematik und Beweismittel ihres ganzen synthetischen Verfahrens. Sie entstehen, indem eine an sich unräumliche Begriffsfunction, das apriorische Identitätsprincip, ein räumlich substantielles Object erzeugt, von dem mit apodictischer Gewissheit Prädicate ausgesagt werden können, die an und für sich nicht in der Qualität des Objectes liegen, aber durch die substantielle Ausführung vermittelt werden. — Der Ausdruck Identität dürfte für das synthetische Verfahren der Geometrie unglücklich gewählt sein. Das Prädicat eines mathematischen Satzes als Ergebnis synthetischer Operationen, die sich am Subject vollziehen, ist dem Subjecte niemals identisch. Mi.

Binde. Begriff, Urteil und Schluss in ihrer gemeinsamen Wurzel. Pr. Gymn. Glogau.

Binde, der auf dem Standpunkt steht, dass die Logik durch psychologische Betrachtungen über die Entstehung der Denkformen wesentlich gefördert werden könne, entwickelt, vom Urteile ausgehend, den Stufengang der logischen Thätigkeiten, um zu einer empirischen Theorie zu gelangen, die eine fortgesetzte lebendige Ausgleichung des Empfindungszustandes und der erregenden Mittel annimmt. Wesentlich Neues kommt dabei nicht heraus. Mi.

A. v. Berger. Raumanschauung und formale Logik. Wien. C. Konegla.

A. v. Berger versucht in seiner Abhandlung eine Widerlegung der von Albert Lange in seinen logischen Studien, besonders im VI. Abschnitt, aufgestellten Behauptung zu geben, dass die Grundlage aller logischen Thätigkeit die Raumanschauung sei. Referent hat eine Widerlegung der Lange'schen Ansicht, die unheilvoll Psychologie und Logik verwechselt, und deren letzte Consequenz wäre, die Lehrbücher der Logik in Bilderbücher zu verwandeln, bereits 1883 in der Zeitschr. f. Völkerpsych. u. Sprachw. XIV. (2) 237-247 gegeben. Den Satz des Widerspruchs auf räumliche Anschauung gründen zu wollen, ist, nach seiner Ueberzeugung, eine der schrulligsten Verkehrtheiten der Lange'schen Philosophie. Mi.

Dörr. Ueber Anschauung und Logik in der Mathematik. Pr. Markirch.

In einer kurzen Uebersicht über die neueren Ansichten von den Grundlagen der Mathematik sucht Dörr die Bedeutung der Anschauung nachzuweisen. Zeitliche und räumliche Anschauung ist ihm mit Wundt der ursprünglichste und constanteste Wahrnehmungsinhalt der Mathematik. Der Metageometrie weist Dörr das Verdienst zu, die Axiome der Geometrie im Zusammenhang geprüft und in ihrer Bedeutung gewürdigt, auch die Definitionen der Grundbegriffe zu schärferem Ausdruck gebracht zu haben,

im übrigen verwirft er sie. Das Wesen des Zahlbegriffs ist in der Abhandlung nirgends klargelegt. Mi.

G. Cantor. Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual-unendlichen Zahlen. Stockholm. Bihang. B. 11. n. 19. 10 S.

Herr Cantor bemerkt, dass zwar viele Mathematiker gegen jede Heranziehung des Actual-Unendlichen in der Mathematik sich ausgesprochen haben, dass aber diese Ansicht darauf beruht, dass man fälschlich allen Zahlen die Eigenschaften beigelegt hat, die nur den endlichen Zahlen zukommen. Hierauf giebt er eine Uebersicht über die vorhandenen Ansichten in Bezug auf das Actual-Unendliche, welche er in vier Gruppen einteilt; er selbst vertritt den Standpunkt, der das Actual-Unendliche sowohl in concreto, wie auch in abstracto bejaht. Besonders hebt er hervor, dass die Theorie der irrationalen Zahlen nicht ohne den Begriff des Actual-Unendlichen begründet werden kann. Das allgemeine Vorurteil gegen das Actual-Unendliche beruht nach seiner Ansicht darauf, dass man es mit dem potentialen Unendlichen verwechselt hat, obgleich das Verhältnis zwischen diesen Begriffen in der That ist, dass jedes potentiale Unendliche ein Actual-Unendliches voraussetzt.

Die erste Hälfte dieser Note ist früher mit unbedeutenden Modificationen teils in der „Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik“ (Halle a. S.) Bd. 88, S. 224 ff., teils in der Zeitschrift „Natur und Offenbarung“ (Münster), Bd 32, S. 46-49 publicirt worden. Die zweite Hälfte (die auch mit dem Titel: „Zur Frage des actualen Unendlichen“ separat gedruckt ist) ist im Jahre 1887 in dem Aufsatze „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“ („Zeitschr. für Philosophie und philosophische Kritik“ Bd. 91, S. 81 ff.) wieder abgedruckt worden. E.

J. von Kries. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg. 298 S.

A. Macfarlane. Algebraic notation of kinship. Nature XXXV. 126.

Kurzer Verweis auf den Artikel „Analysis of relationships of consanguinity“, den der Verfasser 1882 im Journal of the Anthropological Institute veröffentlicht hat. (Vgl. auch F. d. M. XIV. 1882. 29). Lp.

S. Lie. Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. Leipz. Ber. 337-342.

S. Lie will auf das von Helmholtz (in den „Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“) behandelte Raumproblem die Methoden seiner Transformationstheorie anwenden. Das Ergebnis ist, dass er in der v. Helmholtz'schen Deduction eine Lücke findet, die mit den einfachen analytischen Mitteln, deren sich v. Helmholtz bedient, nicht auszufüllen ist, dass er ferner das Monodromieaxiom bei Räumen von drei Dimensionen für entbehrlich ansieht und die v. Helmholtz'schen Axiome durch neue Formulirungen ersetzt. Mi.

F. Kerz. Ueber die Entstehung der Körper, welche sich um die Sonne bewegen. Leipzig. Veit & Co. 79 S.

Diese Schrift zerfällt in zwei Teile; der erste Teil giebt einen populären Auszug aus einer vom Autor früher publicirten Schrift „Erinnerungen an Sätze aus der Physik und Mechanik“ (Leipzig 1884), der zweite ist wesentlich antikritischen Inhaltes und sucht die gegen die früheren Aufstellungen des Verfassers erhobenen Einwendungen zu widerlegen. An dieser Stelle kann selbstverständlich nur der positive Inhalt Erwähnung finden. Den Ausgangspunkt bietet die allseitig zugestandene Thatsache, dass es der Kant-Laplace'schen kosmogonischen Hypothese nicht an schwachen Punkten fehlt. Die Sonne, welche ursprünglich die Form eines dreiaxigen Ellipsoids besass, wurde durch Zusammenstoss mit einem andern Himmelskörper in Rotation ver-

setzt, mit der Zeit lösten sich nicht Ringe, sondern dünne ähnliche Schalen vom Centralkörper los und bildeten sich an der Grenze „des restirenden Gleichgewichtsellipsoides" zu Planeten aus. Die „Aequatorialrückstände der Ringschale, aus welcher die Venus hervorgegangen ist", sollen das Zodiakallicht repräsentiren, aus einzelnen „gleichsam aufs Geratewohl abgeschleuderten Körperchen" wurden die Kometen. Alles in allem spielt die reine Hypothese in des Verfassers Systeme eine solche Rolle, dass uns die Veränderung der älteren und zweifellos einfacheren Theorie durch jenes kaum als wahrscheinlich erscheint.

Gr.

H. Fritsch. Beiträge zur Theorie der Gravitation.
Pr. Realgymn. Königsberg i. Pr. 25 S. 4°.

Der Verfasser hat schon 1874 und 1876 in zwei Programmabhandlungen derselben Schule seine Ansichten über das Modethema einer mechanischen Ableitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes entwickelt. Er sucht die Quelle desselben in den Longitudinalwellen des Aethers und beruft sich, um seine Ansichten zu stützen, auf die akustischen Versuche von Guthrie (1871), bei denen Bewegungen leichter Körperchen in der Luft nach tönenden Körpern hin beobachtet sind. Als älter hätte Herr Fritsch die auch von Guthrie angeführte Arbeit von Guyot (1835) erwähnen müssen, da in ihr schon derselbe Analogieschluss auf den Aether zur Erklärung der Gravitation gemacht ist. Wenn nun schon der Vorgang bei diesen Versuchen durchaus nicht so durchsichtig ist, dass dadurch klare Anschauungen über die Gravitation erzeugt werden können, so wird auch überhaupt nicht gesagt, wie die von Schellbach entdeckten Abstossungen bei ähnlichen Versuchen für diese Erklärungsart unschädlich zu machen sind; bekanntlich hat Sir W. Thomson solche Abstossungen durch Rechnungen bestätigt.

Nachdem im ersten Teile in kurzer Uebersicht die vorangehenden Forscher kritisirt und des Verfassers Ansichten entwickelt sind, sucht der zweite Teil zu zeigen, dass innerhalb

undurchdringlicher Massen jede Bewegung erhalten bleibt, dass sämtliche Teilchen sowohl des Aethers als der schweren Masse sich beim Anprall wie elastische Körper verhalten müssen. Im dritten Teile wird daraus gefolgert, dass jedes grosse Massenteilchen jedes andere mit einer Kraft anzieht, welche der Newton'schen entspricht, vorausgesetzt, dass die Intensität der von dem Verfasser erdachten „Wellen zweiter Ordnung" proportional ist der Masse, welche dieselben erregt. Ohne auf eine Kritik der Ansichten des Verfassers einzugehen, muss der Berichterstatter doch bemerken, dass die Zahl der ausgesprochenen und unausgesprochenen, bei den Ableitungen angewandten Hypothesen sehr gross ist, und dass ihre Beschaffenheit oft bedenklicher erscheint als das zu erklärende Gesetz. Lp.

F. Zöllner. Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektricität. II. Ausgabe. Leipzig. G. Fock. XVI u. 112 S. 8°.

Der vollständige Titel lautet: Erklärung der universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektricität und die allgemeine Bedeutung des Weber'schen Gesetzes von Friedrich Zöllner, weiland Professor der Astrophysik an der Universität Leipzig. Mit Beiträgen von Wilhelm Weber nebst einem vollständigen Abdruck der Originalabhandlung: Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculaire par O. F. Mossotti, un des quarante de la société italienne des sciences, weiland Professor an der Universität Pisa. Mit dem Bildnisse Newton's in Stahlstich.

Die aus Zöllner's wissenschaftlichen Abhandlungen abgedruckten Aufsätze sind: Ueber die Ableitung der Newton'schen Gravitation aus den statischen Wirkungen der Elektricität (I. 417-459). Ueber die universelle Bedeutung des Weber'schen Gesetzes (II. 1-7). Ueber das Verhältnis des Weber'schen Gesetzes zum Ampère'schen Gesetze (II. 8-12). Ueber die von

Helmholtz, Thomson und Tait gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände (II. 13-23). Lp.

F. Zöllner. Kepler und die unsichtbare Welt. 2. Ausgabe. Leipzig. G. Fock. 66 S. 8°.

Der vollständige Titel, der eine Inhaltsangabe vertritt, lautet: Kepler und die unsichtbare Welt. Eine Hieroglyphe von Dr. Ernst Gottfried Fischer, weiland Director und Professor der Mathematik und Physik etc. Mit dem Bildnisse Kepler's und seines Denkmales in Stahlstich, einem photolithographisch-facsimilirten Gedichte Kepler's und einer Federzeichnung von der Hand König Friedrich Wilhelm's IV. von Preussen. Mit Einleitung und Ergänzungen von Friedrich Zöllner, weiland Professor an der Universität Leipzig.

Die Seiten 5-51 sind ein wörtlicher Abdruck aus Zöllner's wissensch. Abhandl. Bd. II. 434-480. Lp.

Hullmann. Die Gay-Lussac'sche Formel. Oldenburg. H. Hintzen.

Hullmann verteidigt seine in der Schrift: „Der Raum und seine Erfüllung Berlin 1884" gegebene Kritik der Gay-Lussac'schen Formel, deren Verwendbarkeit zur Berechnung der Gasvolumina für nicht sehr ausgedehnte Wärmegrade er nicht leugnet, die aber, wie er nachweist, als exacte Formel genommen, zu widersinnigen Consequenzen führt und durch eine andere Formel ersetzt werden muss, gegen die Kritik Oberbeck's in D. L. 84. 41. 11. Oct. und Hoppe's in dessen Arch. f. Math. u. Phys. III., 1, 85. Der ruhige Ton der Polemik Hullmann's ist anzuerkennen, doch richten sich die Kritiken Oberbeck's und Hoppe's mehr gegen die letzten Ansichten Hullmann's vom Wesen der Materie als gegen seine Kritik der Gay-Lussac'schen Formel. Mi.

R. Schellwien. Optische Häresien. Halle a. S. C. E. M. Peffer. 98 S.

In der mehr als die Hälfte der ganzen Schrift umfassenden Einleitung polemisirt der Verfasser gegen die naturwissenschaftliche Methode, insofern dieselbe eine Realität ausserhalb des sinnlichen Bewusstseins annehme. Was über die unmittelbare sinnliche Erfahrung hinausgehe, entziehe sich unserer Erkenntnis vollständig. Insbesondere seien die Lehren der Optik von den Schwingungen des Aethers, der Zerstörung der Wellen durch Absorption und Interferenz, sowie von der Zusammensetzung des weissen Lichtes blosse Hirngespinste. Räumliche Bewegung dürfe nicht als Ursache empirischer Erscheinungen betrachtet werden. Mathematische Anschauungen, Begriffe und Sätze könnten der Naturforschung nur dazu dienen, die empirischen Dinge und ihre Veränderungen zu messen und zu berechnen, niemals aber dazu, sie zu erklären oder abgesehen von ihnen Objecte vorzustellen.

Obwohl die angeführten Sätze hinreichen, den Standpunkt des Verfassers zu charakterisiren, kann Referent es sich nicht versagen, einige der an Schelling erinnernden Phrasen mitzuteilen, durch die jener Standpunkt begründet wird. „In der Anschauung der Dinge an sich ist ursprünglich die Innerlichkeit des schlechthin auf sich zurückbezogenen Raumes und die innerräumliche Bewegung, durch die er ein Continuum ist, das sich zur Discontinuität entfaltet und aus dieser immer auch wieder in die Continuität zurückgeht. Dies ist die mathematische Anschauung“ etc. Ferner: „Dunkelheit ist thätige Negation von Licht und Licht ist thätige Negation von Dunkelheit, beide die positiv-negativen Momente eines bewegten polaren Gegensatzes.“

Der eigentliche Inhalt der Schrift gehört der experimentellen, resp. der physiologischen Optik an, fällt also nicht in den Bereich des Jahrbuchs. Die hier verfochtenen Sätze sind etwa von der Art, wie die in der Göthe'schen Farbenlehre aufgestellten.

Wn.

F. A. MÜLLER. Das Problem der Continuität in der Mathematik und Mechanik. Marburg. Elwert.

A. TURNER. Die Kraft und Materie im Raume. Grundlage einer neuen Schöpfungstheorie. Leipzig. Theodor Thomas. XLVIII u. 218 S. nebst X Taf.

J. J. SYLVESTER. Music and Mathematics. Nature. XXXV. 132

Lp.

B. Pädagogik.

D. BESSO. Periodico di matematica per l'insegnamento secondario. I. Roma.

Man hat in Italien lebhaft das Bedürfnis nach einer Zeitschrift für die Elementar-Mathematik empfunden, worin Lehrer und Schüler die schwierigsten und höchsten Fragen des Lehrstoffes behandelt finden könnten. Wir begrüssen freudig das von Herrn Davide Besso unter dem obigen Titel gegründete Unternehmen und hoffen, dass der wohlthätige Einfluss desselben wachsen werde in dem Masse, wie die Sorgfalt in der Auswahl der Gegenstände und in der Behandlung des Stoffes sich in höherem Grade geltend machen wird. Die Hauptarbeiten werden in den verschiedenen Capiteln des Jahrbuches besprochen werden. An dieser Stelle wollen wir jedoch auf die reichen Sammlungen von Schüleraufgaben und auf die Berichte über Bücher hinweisen (G. Frattini über die Elementi di geometria di R. De Paolis; A. Lugli über 1) den Compendio di geometria di F. Nicoli, 2) die Lezioni di geometria complementare di R. Badia, 3) die Primi elementi di geometria projettiva e descrittiva di V. Murer).

La. (Lp.)

FR. REIDT. Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin. G. Grote. X u. 252 S. 8°.

Das Buch stellt sich die „Aufgabe, eine Anleitung zum Unterrichte des betreffenden Fachs und damit wenigstens dem strebsamen Anfänger einen Anhalt und Führer zu bieten“. Der Verfasser, welcher mehrere gangbare Lehrbücher geschrieben hat, verwertet einerseits seine während eines Menschenalters im Unterrichte an einem Gymnasium gesammelten Erfahrungen, bringt aber auch andererseits dasjenige „in zusammenfassende Darstellung, was in der Gegenwart allgemein, oder doch von der Mehrzahl der Lehrer der Mathematik, als richtig anerkannt wird“. Die Verteilung des Stoffes erhellt aus folgender Uebersicht: Einleitung. Teil I: Der mathematische Unterricht der höheren Schulen im allgemeinen. Capitel 1. Ueber Zweck und Aufgabe des mathematischen Unterrichts an höheren Lehranstalten. Capitel 2. Die Methode des mathematischen Unterrichts im allgemeinen. Capitel 3. Der Lehrplan und seine Hülfsmittel. Teil II. Die einzelnen mathematischen Disciplinen. Capitel 4. Die Arithmetik und Algebra. a) Der Rechenunterricht. b) Arithmetik. c) Algebra. d) Anfangsgründe der niederen Analysis. Capitel 5. Die Planimetrie. a) Der propädeutische Unterricht. b) Der wissenschaftliche Unterricht. Capitel 6. Die ebene Trigonometrie. Capitel 7. Die Stereometrie und die sphärische Trigonometrie. Schlusswort. Den einzelnen Capiteln sind Angaben über bezügliche Lehrbücher beigegeben. Ein alphabetisches Sachregister erleichtert das Auffinden von Einzelheiten.

Da das tüchtige Werk für pädagogische Erörterungen voraussichtlich in nächster Zeit zugrunde gelegt werden wird, so möchte Referent darauf hinweisen, dass in den sowohl auf die Methode als auf den Stoff bezüglichen Abschnitten manche Ergänzungen zu machen sind. Die Begrenzung des auf der Schule durchzunehmenden Stoffes ist für einen Kenner der Berliner Gymnasien zu eng; so ist die Bestimmung von grössten und kleinsten Werten nur bei den quadratischen Gleichungen angedeutet, die Anwendungen auf die Physik sind stets nur gestreift. Der Unterricht in den

Realgymnasien und Oberrealschulen ist zwar berücksichtigt, jedoch in einer Weise, welche den übrigens offen eingestandenen Mangel an eigener Erfahrung in diesen Anstalten bei dem Verfasser zeigt. Die neuere und die darstellende Geometrie, die analytische Geometrie, die Anfänge der höheren Analysis werden im Schlussworte auf noch nicht einer Seite abgethan. Das Verzeichnis der einschlägigen an dieser Stelle angeführten Lehrbücher ist sehr dürftig. Lp.

BEHRLE. Der mathematische Unterricht am Gymnasium. Pr. Gymn. Offenburg.

H. MÜLLER. Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals? Clausthal. Brauns.

VOGT. Die planimetrische Constructionsaufgabe im Gymnasialunterricht. Pr. Gymn. Mainz. 20 S. 4°.

Nach einer einleitenden pädagogischen Betrachtung über den Wert geometrischer Constructionen für den Unterricht und über die zu befolgende Methode werden I. Dreiecksconstructionen erörtert, bei denen ausschliesslich geometrische Oerter durch Anschauung zur Anwendung kommen, II. Dreiecksconstructionen, bei denen auch von Lehrsätzen abgeleitete geometrische Oerter angewandt werden. Ausser den durchgeführten Musterbeispielen sind Reihen von ähnlichen Aufgaben aufgezählt. Lp.

DIEKMANN. Uebungen und Aufgaben des propädeutischen Unterrichts in der Geometrie. Breslau. Hirt.

J. VIOLA. Mathematische Sophismen. 2. Aufl. Wien. Carl Gerold's Sohn. 24 S. 8°.

Das Werkchen stellt unter 16 Nummern diejenigen Trugschlüsse zusammen, welche von Schülern in der Arithmetik leicht gemacht werden, „als Dessert anzuwenden“. Die Zahl derselben hätte vermehrt werden können; auch die Ausdehnung auf die Geometrie lag nahe. Lp.

E. Schmidt. Die Entwickelung des naturgeschichtlichen Unterrichts an höheren Lehranstalten. Berlin. Friedberg u. Mode.

Die Schrift ist der 59. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte gewidmet von dem deutschen Realschulmännerverein (Section Berlin). Sie behandelt auf den ersten 21 Seiten Lehrkräfte und Zahl der Lehrstunden, auf den übrigen 31 Seiten Ziel, Umfang und Methode des Unterrichts während der verschiedenen Zeiten. Der Verfasser verfolgt die Aufnahme des naturgeschichtlichen Unterrichts in den Lehrplan von den Zeiten Franke's und Hecker's bis zur Gegenwart. Er weist dabei an der Hand der Schulprogramme nach, wie wenig meist die wirkliche Stundenzahl dieses Unterrichtsfaches an den Gymnasien lange Zeit den Forderungen des allgemeinen Lehrplanes, z. B. des von 1816, entsprach, und wie sich andererseits die aufkommenden Realschulen zu diesem Unterrichtsgegenstand verhielten. Aus den Schulschriften, Schulbüchern und pädagogischen Zeitschriften bringt er Belege dafür bei, wie allgemein der Mangel an wissenschaftlich vorgebildeten Lehrern für die Naturgeschichte bis nahe zur Gegenwart war, gleichzeitig auf einige sich noch heute geltend machende Uebelstände hinweisend. Eine richtigere Auffassung der Bedeutung des naturgeschichtlichen Unterrichts findet sich nach dem Urteil des Verfassers im vorigen Jahrhundert zuerst bei Rousseau und Salzmann, in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts machen sich dann Harnisch, v. Raumer und Dinter um die Entwickelung desselben verdient. Grösseren Einfluss jedoch gewinnt bald darauf Lüben, dessen Ziele darauf erörtert werden ebenso wie die Stellung, welche Lehrer wie Eichelberg, Gabriel, J. H. Schulz, Leunis, Kützing, Kirschbaum zu den Lüben'schen Vorschlägen einnahmen. Die weitere, durch den

Gang der Wissenschaft veranlasste Entwickelung des naturgeschichtlichen Unterrichts durch Kirchhoff und H. Müller, wobei auch aus neuester Zeit v. Freyhold, Behrens, Junge Erwähnung finden, bildet den nächsten Teil der Schrift; die kurze Besprechung der Arbeiten von E. Löw, Vogel, Müllenhoff und Kienitz-Gerloff beschliesst das Ganze. Lg.

O. BRÄUNLICH. Der Unterricht in der mathematischen Geographie in ausgeführten Lectionen als Erläuterung zu O. Bräunlich's Wandtafeln. Weimar. Hemmleb. 34 S.

Das Verfahren, mittels dessen hier Schüler der untersten Stufe mit den Erscheinungen der täglichen Bewegung, mit der Lehre von der Kugelgestalt der Erde u. s. w. vertraut gemacht werden, kann als ein durchaus zweckmässiges anerkannt werden. Doch verdient der Gerechtigkeit halber es jedenfalls hervorgehoben zu werden, dass die Methode, vom Leichten zum Schwereren aufzusteigen und jeden Schritt durch die Anschauung zu controlliren, keine neue, sondern im wesentlichen nur die gute alte Diesterweg'sche ist. Gr.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische Gleichungen.)

A. Capelli e G. Garbieri. Corso di analisi algebrica. Vol. I. Teorie introduttorie. Padova. Sacchetto. VII u. 511 S.

Der inhaltreiche Band zerfällt in sechs Capitel.

Capitel I. Operationen mit reellen Zahlen. — Einführung der Irrationalzahl nach dem Dedekind'schen Verfahren; elementare Operationen, Radicirung und Logarithmirung. Aufstellung des Grenzbegriffes; Kettenbrüche; Reihen von reellen Zahlen und Convergenzkriterien für dieselben.

Capitel II. Operationen mit complexen Zahen. — Definition der imaginären Einheit i durch die Gleichung: $i \cdot i = -1$. Gleichheit complexer Grössen und Elementaroperationen mit denselben. Geometrische Darstellung der complexen Grössen. Wurzelausziehung; deren Vieldeutigkeit. Einheitswurzeln. Reihen mit complexen Gliedern.

Capitel III. Combinatorische Operationen. — Combinationstheorie. Substitutionen; Elemente der Substitutionstheorie, meistens nach Netto.

Capitel IV. Determinantentheorie. — Grundeigenschaften der Matrizen und der Determinanten. Unterdeterminanten. Multiplicationssatz. Anwendung der Theorie auf specielle Determinanten. In diesem Capitel (S. 301) wird der Begriff der „charakteristischen Zahl einer Matrize“ (caratteristica di una matrice) eingeführt, durch welchen manche Resultate dieses und des nachfolgenden Capitels sich mit beträchtlicher Einfachheit und Allgemeinheit aussprechen lassen. Diese Zahl giebt die Minimalordnung der nicht verschwindenden Determinanten der Matrize an.

Capitel V. Systeme von Linearformen. — Systeme linearer Gleichungen; ihre Zurückführung auf Systeme linearer homogener Gleichungen. Behandlung solcher Systeme. Sätze über verschwindende Determinanten. Lineare und orthogonale Substitutionen.

Capitel VI. Grundeigenschaften der ganzen rationalen Functionen. — Allgemeiner Functionsbegriff. Besondere Arten von Functionen. Bedingungen für das Identischwerden zweier ganzen Functionen einer und mehrerer Variabeln. Teilbarkeit der ganzen Functionen. Primfunctionen. Grösster gemeinschaftlicher Teiler zweier Polynome. Resultante. Interpolationsformeln. Taylor'sche Entwickelung für ganze Functionen einer und mehrerer Variabeln. Hier wird als die „Abgeleitete“ eines Polynoms $\sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r}$ das Polynom $\sum_{r=0}^{n-1} (n-r) a_r x^{n-r-1}$ definirt. Die Stetigkeit der ganzen Functionen wird auf Grund der Taylor'schen Formel bewiesen. Der Band schliesst mit der allgemeinen Definition der Abgeleiteten (als Verhältnis der einander entsprechenden Veränderungen der Function und des Arguments) und mit der Aufstellung der Sätze über die Derivation von Summen, Producten, Quotienten und Functionen von Functionen.

Die Methode der Darstellung ist ganz streng und zugleich sehr klar. Der Stoff ist, wie sich aus der obigen kurzen Uebersicht ersehen lässt, ziemlich reichhaltig; über die Wahl und die Anordnung desselben müssen wir uns bis zur vollendeten Veröffentlichung des ganzen Werkes jedes Urteiles enthalten. Nur Eines wollen wir bemerken; dass es nämlich als ein Fehler und ein Uebergreifen in ein fremdes Gebiet zu bezeichnen ist, wenn die Be-

griffe der Stetigkeit und der Derivation (ausgenommen etwa die Ableitung der Polynome, als diejenige Operation definirt, durch welche $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)a_r x^{n-r-1}$ aus $\sum_{r=1}^{n} a_r x^{n-r}$ entsteht) in einem Lehrbuche der „algebraischen" Analysis Platz finden.

Um nun auf einige Einzelheiten einzugehen, müssen wir vor allem den, leider auch in einigen neueren deutschen Lehrbüchern eingeführten Gebrauch des Wortes „endlich" als gleichbedeutend mit „kleiner als eine endliche Grösse" (S. 106, 193) durchaus missbilligen. Eine unendliche Zahlenmenge kann lauter endliche Elemente enthalten und doch ∞ als Grenzwert haben; und eine convergente Reihe kann divergent werden, wenn sie gliederweise mit einer Zahlenreihe von der eben angeführten Art multiplicirt wird. — Die Benennung „semplicemente convergente" (S. 124, 187) für unbedingt convergente Reihen ist unpassend; sie kann ferner zu Missverständnissen führen, da das Nebenwort „semplicemente", auf gleichmässig convergente Functionenreihen angewandt, schon längst einen ganz anderen Sinn erhalten hat (Vgl. Dini, Fondamenti etc. S. 103). — Die Bezeichnung $\binom{bca}{abc}$ für diejenige Substitution, welche die Permutation abc in die Permutation bca überführt, scheint uns fremdartig und unnatürlich; so auch die Bezeichnung STf für die successive Anwendung der Substitutionen S und T auf f; denn STf drückt natürlicherweise die Ausübung von S auf Tf, also die successive Anwendung von T und S auf f aus. Allerdings wurde die erste Bezeichnung von Serret, die zweite von Netto, Klein, Dyck gebraucht; man findet aber die der ersten entgegengesetzte bei Abel, Netto, Gordan, die der zweiten entgegengesetzte bei Serret. — Es ist nicht wahr, dass (S. 418) die Einteilung der Functionen in Functionen reeller und complexer Variabeln sich auf deren analytischen Ausdruck begründet.

S. 379 Z. 2 v. u. muss es „inferiore od eguale" statt „inferiore" heissen. Vi.

G. Chrystal. Algebra; an elementary text-book for the higher classes of secondary schools and for colleges. Part I. Edinburgh. A. and C. Black. XX u. 542 S.

Obschon im Titel als elementar bezeichnet, ist dies Lehrbuch augenscheinlich nicht für Anfänger in dem Gegenstande abgefasst; aber für solche, welche bereits einige Fortschritte in der Handhabung algebraischer Symbole gemacht und sich eine vorläufige Anschauung von algebraischer Allgemeinheit angeeignet haben, dürfte das Studium dieses Buches von bedeutendem Nutzen sein, indem es die Aufmerksamkeit auf die grundlegenden Sätze der Wissenschaft hinlenkt und die Gedanken bei der algebraischen Form festhält. Die Anordnung des Stoffes in dem Buche ist durchaus verschieden von der in englischen Lehrbüchern hergebrachten Folge. Der Band ist in zweiundzwanzig Capitel eingeteilt. Cap. I giebt eine klare Erörterung der drei Grundgesetze der Association, der Commutation und der Distribution; wie klar es indes auch sein mag, so ist es für den Anfänger nicht leicht lesbar. Cap. II ist kurz; es behandelt eingliedrige Ausdrücke und das Gesetz der Indices. Im Cap. III, das die Theorie der Quotienten behandelt, werden mehrere Anwendungen auf die Zahlentheorie gegeben. Cap. IV (Distribution von Producten und Elemente der Theorie rationaler ganzer Functionen) und Cap. V (Transformation des Quotienten zweier ganzen Functionen) sind in vielen Beziehungen die wichtigsten im Buche; ihre Behandlung ist durch grosse Frische und Durchsichtigkeit ausgezeichnet. Cap. VI bespricht das grösste gemeinschaftliche Mass und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache. Die Erörterung der Zerlegung ganzer Functionen in Factoren in Cap. VII leitet über zur Einführung sowohl der imaginären Einheit als auch der irrationalen Wurzeln (surds), deren eingehende Betrachtung indes verschoben wird, bis die rationalen Brüche (Cap. VIII) und Zusatztheoreme aus der Zahlentheorie (Cap. IX) erläutert sind. Cap. X über irrationale Functionen und Cap. XI über die arithmetische Theorie der irrationalen Wurzeln sind erschöpfend und bereiten gut auf Cap. XII vor, welches die complexen Zahlen in einer für englische Lehrbücher ganz

neuen Art behandelt. Die Darstellung ist klar, und das Capitel schliesst mit einem Beweise des Fundamentaltheorems, dass jede ganze rationale Gleichung eine Wurzel besitzt. Nach Erledigung des Verhältnisses und der Proportion in Cap. XIII wird das Thema der Bedingungsgleichungen in Cap. XIV vorgenommen und mit grosser Frische erledigt. Im Cap. XV wird die Aenderung einer Function recht vollständig mit Hülfe graphischer Methoden erläutert. Die Cap. XVI und XVII geben eine erschöpfende Behandlung der Gleichungen ersten und zweiten Grades. Die allgemeine Theorie ganzer Functionen, eingehender die der quadratischen Functionen bildet den Gegenstand von XVIII. Dieses Capitel enthält manche Sätze über Functionen der Wurzeln einer Gleichung, die gewöhnlich in englische Lehrbücher nicht Eingang gefunden haben. Cap. XIX berührt sehr kurz die Frage der Lösung von Aufgaben vermittelst der Gleichungen. Cap. XX handelt von arithmetischen, geometrischen und zusammengesetzten Reihen, Cap. XXI von Logarithmen und Cap. XXII von der Theorie der Zinseszins- und Renten-Rechnung als praktischer Anwendungen der Principien der beiden vorangehenden Capitel.

Das Buch ist durchweg reich mit Uebungsaufgaben, sowohl durchgerechneten als ungelösten, versehen, und der Druck und die Ausstattung sind seinem wissenschaftlichen Werte angemessen. Diese „Algebra“ bildet eine schätzenswerte Ergänzung der englischen mathematischen Lehrbücher. Gbs. (Lp.)

J. W. Gibbs. On multiple algebra. Am. Ass. XXXV. 32 S.

Diese an die Versammlung der Am. Assoc. in Buffalo gerichtete Denkschrift enthält eine lichtvolle und durch passend gewählte einfache Beispiele illustrirte Auseinandersetzung der mannigfachen Anwendungen, welche die Algebra der mehrfachen Einheiten (hyperimaginären Grössen) auf die verschiedensten Zweige der reinen und angewandten Mathematik gestattet, und der grossen Vorteile, welche diese Algebra äusserlich als „arbeitsparendes Werkzeug“, innerlich dadurch gewährt, dass sie an die Stelle einer durch willkürlich gewählte Symbole und sonstige Auskunftsmittel erzeugten künstlichen Einfachheit der Rechnungsausdrücke die wahre Ein-

fachheit setzt, welche aus der Wahl der dem Gegenstande der Untersuchung sich am natürlichsten anpassenden Methoden hervorgeht.

Der Verfasser beginnt mit einer chronologischen Uebersicht der grundlegenden Arbeiten auf diesem Gebiete, verbunden mit kurzen vergleichenden Charakteristiken. Wir begegnen hier den Namen Möbius, Hamilton, Grassmann, St. Venant, Cauchy, Cayley, Hankel, Peirce, Sylvester. In dem zeitlichen Zusammentreffen der Arbeiten von Hamilton, Grassmann und St. Venant sieht der Verfasser ein Zeichen, dass schon damals (anfangs der vierziger Jahre) die Entwickelung der Geometrie dem Hülfsmittel zustrebte, welches ihr durch die Algebra der mehrfachen Einheiten geboten wird, während andrerseits der lange Zeitraum, welchen diese Methoden gebrauchten, um sich allgemeinere Anerkennung zu verschaffen, ihm beweist, dass die damalige Zeit für dieselben noch nicht reif war. In der Beachtung und Ausbildung, welche diese Methoden in der Gegenwart finden, erblickt der Verfasser den bedeutsamsten Fortschritt der Algebra und ein für unsere Zeit charakteristisches Merkmal derselben. Den hier und da noch dagegen bestehenden Widerstand erklärt der Verfasser durch die Einseitigkeit, mit der auch in geometrischen Dingen der Standpunkt der gewöhnlichen (double) Algebra festgehalten wird. Dieser Einseitigkeit gegenüber verweist er auf die Beispiele Cayley's mit seiner „Theory of matrices“, und Sylvester's mit seinen „Lectures on the principles of Universal Algebra“. — Im übrigen stellt er die Grassmann'schen Methoden als die umfassendsten in den Vordergrund, versäumt auch nicht, speciell für diese Methoden Autoritäten wie Hankel und Clebsch zu citiren und Beispiele anzuführen, wie Autoren, die diesen Methoden fernstehen, auf dem Wege der abkürzenden Symbolik von selbst zu Bezeichnungen und Operationen gelangt sind, die mit den Grassmann'schen ganz oder im wesentlichen übereinstimmen. Damit ist in der That das Vorhandensein der Kraft, mit welcher die Entwickelung der Wissenschaft von selbst diesen Methoden zustrebt, dargethan. Als Hauptbeispiele für den Nutzen der „Multiple Algebra“ wählt der Verfasser das Multiplications-Theorem, sowie die sonstige Theorie der Determinanten,

eine Grundgleichung in Lagrange's Mécanique analytique und die homogenen Coordinaten. Manche von ihm als möglich und voraussichtlich fruchtbar angedeuteten weiteren Anwendungen sind übrigens thatsächlich schon ausgeführt, so die auf Invariantentheorie und symbolische Curvengleichungen bezüglichen durch den Referenten in seinem „System der Raumlehre". Auch die Anwendungen auf die neuerdings so sehr in den Vordergrund tretende n-dimensionale Geometrie hätten hier erwähnt werden können. An die obigen Beispiele schliesst sich eine eingehende Erörterung der verschiedenen Productbildungen der Ausdehnungslehre, wobei auf die Verschiedenheit der Anwendungsgebiete von Punkt- und Strecken-Rechnung aufmerksam gemacht wird. Den Schluss bildet ein kurzer Abschnitt über die Anwendungen auf Differential- und Integral-Rechnung.

Die ganze Arbeit ist ein neuer Beweis des regen Interesses, welches die transatlantischen Mathematiker den Arbeiten unseres berühmten Landsmannes entgegenbringen. Dass für die Geometrie, sobald sie das beengende Gebiet der reellen und imaginären Zahlen verlässt, um sich auf den ihrer Natur angemessenen Boden der vielfachen Einheiten zu stellen, der Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Behandlung seinen Ausgleich findet, hebt auch der Verfasser hervor. Und da in neuerer Zeit auch die Analysis sich von der Hülfe, welche ihr die Geometrie durch Veranschaulichung ihrer Methoden und Resultate gewähren kann, loszusagen beginnt, so dürfte eine ausgesprochenere Scheidung der Untersuchungsmethoden für Analysis und Geometrie nur noch eine Frage der Zeit sein. Schg.

A. B. Kempe. On an extension of ordinary algebra. Mess. XV. 188-190.

In des Verfassers neuer Algebra bedeuten das Product ab und die Summe $a+b$ der beiden Grössen a und b, wenn sie in Ausdrücken der Operationen der gewöhnlichen Algebra wiedergegeben werden, bezüglich:

$$\frac{ab(i+z-u)-(a+b)iz+uiz}{ab-(a+b)u+u(i+z)-iz} \quad \text{und} \quad \frac{ab(2i-z)-(a+b)i^2+i^2z}{ab-(a+b)z+2iz-i^2},$$

wo z, i, u drei willkürliche Grössen sind, die den Werten 0, ∞, 1 der gewöhnlichen Algebra entsprechen. Somit ist in der neuen Algebra $zb = z$, $z + b = b$, $ib = i$, $i + b = i$, $ub = b$.

Glr. (Lp.)

A. Buchheim. On double algebra. Mess. XVI. 62-63.

A. Buchheim. Note on triple algebra. Mess. XVI. 111-114.

In der ersten Note löst der Verfasser für den Fall binärer Matrizen die Aufgabe, die n-ären Matrizen zu finden, welche in einer r-fältigen Algebra Einheiten sein können, wo r nicht grösser als n ist. In der zweiten Note wird ein besonderer Fall derselben Aufgabe für die dreifache Algebra betrachtet.

Glr. (Lp.)

Th. Harmuth. Textgleichungen geometrischen Inhalts. Pr. Wilhelmsgymn. Berlin. 15 S. 4°.

225 Aufgaben aus der Planimetrie, 75 aus der Stereometrie, am Schlusse die Auflösungen. Die Gleichungen zweiten Grades sind durch einen Stern gekennzeichnet. Trigonometrische Aufgaben fehlen.

Lp.

H. Weber. Theorie der Abel'schen Zahlkörper. Acta Math. VIII. 193-263; IX. 105-130.

Das Ziel der Untersuchungen ist, alle Abel'schen Zahlkörper vollständig zu bestimmen und darzustellen; an erster Stelle ist somit der Nachweis zu erbringen, dass dieselben Kreiskörper seien (Kronecker'scher Satz). Ein „Kreiskörper“ ist jeder aus rationalen Zahlen und Einheitswurzeln bestehende Zahlkörper; ist r eine primitive m^{te} Einheitswurzel, so heisst der Körper Ω_m, der aus sämtlichen rationalen Functionen von r besteht, ein „vollständiger Kreiskörper“. Die erste der vier Abhandlungen beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie; in ihr wird gezeigt, dass alle Abel'schen Körper sich aus solchen regulären zusammensetzen lassen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, wobei das

Wort „regulär" angiebt, dass die Gruppe der Substitutionen des Körpers aus den Potenzen einer einzigen Substitution besteht. Der Kronecker'sche Satz ist also nur für solche besonderen Körper nachzuweisen. Es wird ferner gezeigt, wie durch directe Verallgemeinerung der Gauss'schen Perioden alle Kreiskörper, und jeder nur einmal, dargestellt werden können; und dann wird die für die Folge notwendige Kummer'sche Zerlegung der Zahlen $(r^n, \eta)^m$ in ihre Primfactoren vollständig durchgeführt.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der Anzahl der Idealklassen und den Einheiten in den Kreiskörpern, deren Ordnung eine Potenz von zwei ist. Diese Untersuchung war notwendig, um einer bei Potenzen von zwei auftretenden Schwierigkeit im Beweise des Kronecker'schen Satzes zu begegnen. An Resultaten heben wir aus diesem zweiten Teile hervor: A) Eine primitive Einheit eines vollständigen Kreiskörpers Ω_λ der Ordnung 2^λ, die mit allen ihren Conjugirten einerlei Vorzeichen hat, ist, vom Vorzeichen $\pm$ abgesehen, das Quadrat einer primitiven Einheit; dabei ist $\lambda \geqq 2$ angenommen. B) Jede Einheit des Körpers $\Omega_{\lambda-1}$ lässt sich darstellen als das Product aus einer primitiven Einheit und dem Quadrat einer Einheit des Körpers Ω_λ. C) Die Klassenzahl in Ω_λ ist eine ungerade Zahl.

In der dritten Abhandlung wird zunächst gezeigt, wie es für den geforderten Hauptbeweis ausreicht, darzuthun, dass $\psi_n = x_0 + r^n x_1 + \cdots + r^{(m-1)n} x_{m-1}$ in den Kreiskörpern enthalten sei, wenn $x_0, \ldots, x_{m-1}$ conjugirte Zahlen eines regulären Abel'schen Körpers sind. Es wird dann $\psi_n{}^m$ in ideale Primfactoren zerlegt, und als Kern des Beweises zeigt sich nun, dass ein hierbei auftretendes Ideal als Hauptideal erkannt werde. Mit Hülfe des Satzes C) gelingt dies für die Ordnungen 2^λ; mit Hülfe eines zahlentheoretisch interessanten Theorems für diejenigen Ordnungen, welche Potenzen ungerader Primzahlen sind.

Die vierte, im neunten Bande der Acta Mathematica enthaltene Abhandlung löst die Aufgabe, Abel'sche Körper von beliebig gegebener Gruppe durch Einheitswurzeln möglichst niedrigen Grades darzustellen. Die Gruppe wird dabei durch diejenigen Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ charakterisirt, welche von den Herren Fro-

benius und Stickelberger als „Invarianten" der Gruppen vertauschbarer Elemente eingeführt wurden, und durch welche der Isomorphismus zweier Gruppen bedingt wird. Jeder in einer Abel'schen Gruppe $\mathfrak{R}$ enthaltenen Abel'schen Gruppe $\mathfrak{A}$ kann man eine andere $\mathfrak{B}$ als reciproken Divisor von $\mathfrak{A}$ entsprechen lassen; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben dieselben Invarianten $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$; das Product der Grade beider ist gleich dem Grade von $\mathfrak{R}$. Versteht man unter $\mathfrak{R}$ die Gruppe der nach irgend einem Modul m genommenen, zu m teilerfremden Zahlen n, so lässt sich, um eine Gruppe $\mathfrak{A}$ mit gegebenen Invarianten zu bilden, zunächst ein passender Modul m bestimmen; die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für denselben werden aufgestellt. Dann kann man hieraus $\mathfrak{B}$ und endlich $\mathfrak{A}$ selbst ableiten. No.

L. Kronecker. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen. Berl. Ber. 251-253.

Herr Kronecker stellt eine übersichtliche Darstellung und vollständige Begründung seiner am 27. Juni 1861 der Akademie mitgeteilten Resultate aus der Theorie der algebraischen Gleichungen auf dem Boden seiner „Festschrift" in Aussicht. Ferner giebt er eine elegante und directe Ableitung derjenigen unter den zehnwertigen rationalen Functionen von fünf Grössen, welche bei allen cyklischen Permutationen je dreier dieser Grössen nur fünf Werte annehmen, und dabei nur von zwei Functionen jener fünf Grössen abhängen. No.

L. Kronecker. Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. Kronecker J. 10. 329-371.

Im ersten Abschnitte der Abhandlung, „einleitende Bemerkungen über Congruenzen und Modulsysteme" betitelt, zeigt der Verfasser, wie die Einführung der Modulsysteme eine naturgemässe Erweiterung des Gauss'schen Congruenzbegriffes sei, welche bei dem Fortschritte von der gewöhnlichen Zahlentheorie zur arithmetischen Behandlung ganzzahliger Functionen von un-

bestimmten Variabeln nicht nur nützlich, sondern notwendig wird. Der Begriff des „Enthaltens und Enthaltenseins von Modulsystemen“ wird dargelegt und daran die wichtige Bemerkung geknüpft, wie Modulsysteme mit unendlich vielen Elementen durch solche mit einer endlichen Anzahl von Elementen ersetzt werden können; dann folgt der Begriff der „Stufe“ oder des „Ranges“, deren Bedeutung sich auch hier im zweiten Abschnitt zeigt; und endlich wird neu eingeführt die Bezeichnung „Primmodulsysteme“ oder „Primformen“ für diejenigen Modulsysteme oder Formen, welche nicht nur „nicht zerlegbar“ sind, sondern auch keine anderen Modulsysteme oder Formen derselben Stufe unter sich enthalten. Für sie gilt dann der Satz, dass ein Product nur dann für ein Primmodulsystem congruent Null sein kann, wenn einer der Factoren es ist.

In den folgenden Abschnitten zeigt sich an der Behandlung einzelner algebraischer Fragen die weittragende Bedeutung der Modulsysteme, durch welche es gelingt, mathematische Resultate in der Form identischer Gleichungen präciser, übersichtlicher und allgemeiner zu fassen, als es jemals bisher geschehen ist. Von den Ergebnissen des zweiten Abschnittes, welcher sich mit linearen Congruenzen für Primmodulsysteme beschäftigt, heben wir hervor: „Durch ein System von Congruenzen

$$\sum_{k=1}^{k=t'} V_{ik}^{(1)} X_k \equiv 0 \quad (\text{modd. } M, M', M'', \ldots) \quad (i = 1, 2, \ldots, t'),$$

in welchem $V_{ik}^{(1)}, M, M', M'', \ldots$ beliebige Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereichs bedeuten und die letzteren ein Primmodulsystem bilden, wird die t'-fache Mannigfaltigkeit der Grössen X auf eine genau $(t'-r)$-fache eingeschränkt, wenn die Zahl r den Rang des Systems $V_{ik}^{(1)}$ in Beziehung auf das Modulsystem $(M, M', \ldots)$ bezeichnet.

Der dritte Abschnitt liefert die Darstellung des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Functionen von x für irgend ein Primmodulsystem des Bereichs ihrer Coefficienten. Wenn man hierbei

$$\mathfrak{V}(x) = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{v}_1 x + \cdots + \mathfrak{v}_{n-1} x^{n-1}, \; V(x) = v_0 + v_1 x + \cdots + v_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

$$\mathfrak{V}(x) : V(x) = w_0 x^{-1} + w_1 x^{-2} + w_2 x^{-3} + \cdots$$

setzt, so ergiebt sich eine Reihe merkwürdiger Beziehungen für die Determinanten

$$|w_{p+q}| = W_{m+r} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \cdots, m+r),$$
$$|w_{h+k}| = V_m \qquad (h, k = 0, 1, 2, \cdots, m-1);$$

so z. B. dass eine Potenz jeder aus den w_{p+q} zu bildenden Determinante, nach Multiplication mit einer genügend hohen Potenz von V_m, modd. $W_m, \ldots, W_{n-1}$ congruent Null wird, also das aus den $(n-m)$ Hauptdeterminanten

$$|w_{p+q}| \qquad \begin{pmatrix} p, q = 0, 1, \cdots, m+r \\ r = 0, 1, \cdots, n-m-1 \end{pmatrix}$$

zu bildende Modulsystem enthält.

Die bis dahin abgeleiteten Resultate werden im vierten Abschnitt zur Auflösung des Systems von n Congruenzen

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_{h+k}\varphi_k \equiv w_h^0 \quad (\text{modd. } M', M'', M''', \ldots) \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

verwendet, und die Bedingungen für die Lösbarkeit angegeben.

Für den einfachen Fall des absoluten Rationalitätsbereichs $\mathfrak{R} = 1$ und für $w_{h+p} = w_h$, $w_{p+n}^0 = w_h^0$ erhält man, wenn an die Stelle des Primmodulsystems der Primmodul p tritt, die Bedingung, dass die Congruenz

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k^0 x^{n-k-1} \equiv 0 \quad (\text{modd.}\, p, x^n - 1, \sum_{k=0}^{n-1} w_k x^{n-k-1})$$

erfüllt sei; und findet dies statt, dann liefert

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k^0 x^{n-k-1} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k x^k \sum_{k=0}^{n-1} w_k x^{n-k-1} \quad (\text{modd. } p, x^n - 1)$$

die Grössen φ. Endlich wird der Satz abgeleitet: Die Irreductibilität von $V(x)$ in Beziehung auf ein Modulsystem $(M', M'', \ldots)$ ist dadurch charakterisirt, dass der Rang des Systems w_{i+k} stets n ist, wenn für $w_m, \ldots, w_{n-1}$ beliebige ganze Grössen des Bereichs angenommen werden, dem die $v_m, \ldots, v_{n-1}$ angehören, und wenn die $w_n, \ldots, w_{2n-2}$ mittels

$$w_{h+n} + \sum_{k=0}^{n-1} v_k w_{h+k} = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots)$$

bestimmt werden. No.

L. Kronecker. Ein Satz über Discriminanten-Formen.
Kronecker J. C. 79-82.

Auf Grund der Principien, die Herr Kronecker in den „Grundzügen einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" entwickelt hat, leitet er hier durch einfache Ueberlegungen die Sätze ab: 1) Die Discriminantenform einer jeden aus den verschiedenen Wurzeln einer Gleichung zu bildenden Gattung ist in einer Potenz der Discriminante der Gleichung selbst enthalten. 2) Die Discriminantenform einer Gattung (ξ_1) kann zu einer hinreichend hohen Potenz erhoben werden, damit sie durch die Discriminantenform einer jeden aus den verschiedenen Conjugirten von ξ_1 zu bildenden Gattung teilbar werde.

Wenn nun $F(x)$, $G(y)$ irreductible ganze Functionen eines und desselben Bereiches sind, und wenn die Coefficienten der höchsten Potenzen von x, y gleich 1 angenommen werden, so kann eine der beiden Gleichungen $F=0$, $G=0$ nur dann unter Adjunction einer Wurzel der andern reductibel werden, wenn eine gewisse Gattung von rationalen Functionen der Wurzeln der einen Gleichung mit einer der zweiten Gleichung übereinstimmt. Die obigen Sätze zeigen: „Die Discriminantenform dieser Gattung ist gemeinsamer Teiler der Discriminanten von F und G."

In diesem allgemeinen Satze ist als besonderer Fall enthalten, dass derjenige Factor von x^n-1, welcher nur für die primitiven n^{ten} Wurzeln der Einheit gleich Null wird, irreductibel ist, und zwar auch dann, wenn eine Wurzel einer ganzzahligen Gleichung adjungirt wird, deren Discriminante zu n relativ prim ist, wie es Herr Kronecker in Liouville J. (1854) bereits nachgewiesen hatte. No.

Ch. Brisse. Démonstration du théorème de d'Alembert.
J. de l'Éc. Polyt. Cah. LVI. 163-169.

Der Beweis für die Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen wird folgendermassen geliefert. Es wird eine Grösse y gesucht, für welche $f(x)$ und $f(xy)$ einen gemeinsamen Teiler haben. Die Resultante beider Functionen $R(y)$ hat die Form $(y-1)^m R_1(y)$, und

$R_1(y) = 0$ ist eine reciproke Gleichung des Grades $\frac{m(m-1)}{2}$, wenn m den Grad von $f(x)$ angiebt. So kann man einen von $f(x)$ verschiedenen Teiler finden und $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ setzen. Die Grade von g, h sind durch keine höheren Potenzen von 2 teilbar, als es bei f statthat; gleichzeitig sind sie kleiner als m. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert also schliesslich einen Teiler von f von geringerer Paarheit. Somit ist der Beweis darauf reducirt, zu zeigen, dass jede Gleichung ungeraden Grades mit complexen Coefficienten eine Wurzel besitze. Die dazu verwendete Methode ist der eben besprochenen durchaus ähnlich.

No.

E. Holst. Beweis des Satzes, dass eine jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. Acta Math. VIII. 155-160.

G. Loria. Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. Acta Math. IX. 71-72.

Der Beweis ist einer von denjenigen, welche geometrische Stetigkeit voraussetzen; er geht von der Annahme einer Zerlegung der Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in lineare Factoren aus.

Herr Loria macht darauf aufmerksam, dass dieser Beweis in seinem Wesen mit einem 1828 von C. V. Mouret veröffentlichten übereinstimme.

No.

J. C. Fields. A proof of the theorem: the equation $f(z) = 0$ has a root, where $f(z)$ is any holomorphic function of z. Newcomb Am. J. VIII. 178-179.

Einer der vielen geometrischen Beweise, welche Stetigkeit, Existenz eines Minimums u. dergl. voraussetzen. Am Schlusse bemerkt Herr Fields, der Beweis sei schon von Hoüel gegeben.

No.

E. CESARO. Théorème d'algèbre. Mathesis VI. 193-195.

Ist $f(x)=0$ eine algebraische Gleichung, deren Wurzeln reell sind, so hat auch $f_1(x)=f(x)+af'(x)=0$, falls a reell ist, reelle Wurzeln. Ebenso verhält es sich mit

$$f_2(x)=f_1(x)+bf_1'(x)=0,\quad f_3(x)=f_2(x)+cf_2'(x)=0,\quad \ldots,$$

wofern $b, c, \ldots$ reell sind. Verschiedene Anwendungen.

Mn. (Lp.)

J. T. SÖDERBERG. Deduktion af nödvändiga och tillräckliga villkoret för möjligheten af algebraiska eqvationers solution med radikaler. Upsala Univ. Årsk.

Eine Darstellung des wesentlichen Teils dieser Abhandlung wird in den Acta Math. erscheinen. M. L.

E. JÜRGENS. Zur Auflösung linearer Gleichungssysteme und numerischen Berechnung von Determinanten. Festschrift. Aachen. Palm.

Der Auflösung linearer Gleichungssysteme geht eine Umformung derselben vorher, durch welche bewirkt wird, dass die Diagonalglieder sämtlich positiv und die übrigen ihrem absoluten Werte nach verhältnismässig sehr klein sind. Dadurch wird bewirkt, dass die Unbekannten bei hinlänglicher Kleinheit der absoluten Glieder auch hinlänglich klein werden. Die Berechnung wird dadurch wesentlich erleichtert. — Die Auswertung von Determinanten wird auf die Lösung von Systemen linearer Gleichungen zurückgeführt. No.

A. KOSTĚNEC. Bemerkungen zur Ordnung und Auflösung von Gleichungen. Casop. XV. 16. (Böhm.)

Für den Kreis der Mittelschule berechnet, enthält der Aufsatz Winke, wie man bei Transformationen von Gleichungen

vorzugehen habe, um die ursprünglichen Wurzelbedingungen in Evidenz zu behalten. Std.

F. Privat. Note relative à la résolution du cas irréductible de l'équation du troisième degré. C. R. CIII. 774.

Für $x^3+px+q=0$ und $R=q^2:p^3$ wird

$$x = -\frac{q}{p}(1-R+3R^2-12R^3+55R^4-273R^5+1428R^6-7752R^7+\cdots).$$

No.

A.-E. Pellet. Sur les équations du quatrième degré et les fonctions elliptiques. S. M. F. Bull. XIV. 90-93.

Ordnen sich die Wurzeln einer Gleichung geraden Grades so an, dass sie zu je zwei und zwei eine Gleichung

$$a(x_1+x_2)+bx_1x_2+c=0$$

befriedigen, so kann man mittelst einer linearen Substitution die Gleichung in eine andere, reciproke, oder in eine solche umformen, welche nur gerade Potenzen der Unbekannten enthält. Von diesem Satze wird bei den Gleichungen vierten Grades Anwendung gemacht; diese lassen auf drei verschiedene Arten solche Umgestaltung zu. Eine zweite Anwendung bezieht sich auf die Transformation der elliptischen Integrale. No.

H. W. L. Tanner. Numerical solution of a biquadratic equation by Descartes' process. Mess. XV. 184-187.

Die gegebene biquadratische Gleichung wird in der Gestalt angenommen $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, worin die Coefficienten ganz sind, und das Ziel ist die Zerlegung der linken Seite in quadratische Factoren $(x^2+px+q)(x^2+p'x+q')$. Des Verfassers Methode besteht in einem Verfahren zur Berechnung von p, p', q, q', wenn dieselben ganz sind. Glr.(Lp.)

J. J. Sylvester, R. F. Davis, G. B. Mathews. Solution of question 8389. Ed. Times XLV. 70-71.

1) Sind die Wurzeln der Gleichung

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e = 0$$

in harmonischen Intervallen angeordnet (d. h. so dass, wenn p, q, r, s diese Wurzeln sind, $q-p$, $r-p$, $s-p$ in harmonischer Progression sich befinden), so verschwindet die kubische Invariante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

2) Wenn die Wurzeln der Gleichungen

$$Ax^2+2Bx+C = 0, \quad A'x^2+2B'x+C' = 0,$$

abwechselnd gestellt, in harmonischen Intervallen geordnet sind, so verschwindet die Invariante $AC'-2BB'+CA'$. 3) Diese Invariante ist als ein Teiler in der kubischen Invariante der biquadratischen Form $(Ax^2+2Bx+C)(A'x^2+2B'x+C')$ enthalten.

Lp.

J. Rahts. Zur Reduction der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrard'sche Form — eine Weiterführung des von Hermite eingeschlagenen Weges. Klein Ann. XXVIII. 34-60.

Zunächst werden die Untersuchungen Hermite's über Invarianten der Form 5ter Ordnung nebst der Darstellung der ganzen Systeme durch 4 unter ihnen dargelegt. Daran schliesst sich die Anwendung behufs der Reduction der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf die Jerrard'sche Form. Mit Hülfe von zwei Beispielen bestimmt Herr Rahts drei hierzu nötige Grössen, während die vierte bei der Transformation auftretende in anderer Weise durch die Vergleichung specieller Fälle aufgefunden wird.

No.

P. Gordan. Ueber Gleichungen fünften Grades. Klein Ann. XXVIII. 152-166.

Es wird eine directe Methode angegeben, die allgemeine

Gleichung fünften Grades in eine solche mit einem einzigen Parameter zu transformiren. Zwei Functionen vierten Grades φ, ψ lassen sich so bestimmen, dass sie der Kegelschnittgleichung

$$c_{11}\varphi^2+2c_{12}\varphi\psi+c_{22}\psi^2+c_1\varphi+c_2\psi=0$$

genügen; die Zerlegung des Aggregats der Glieder zweiter Ordnung führt auf eine Grösse y, für welche die Gleichung fünften Grades in die Brioschi'sche Form

$$u^5-10u^3+45u+Z\sqrt{3^5}=0$$

gebracht werden kann; auch der Parameter Z wird aus φ, ψ und den Constanten c bestimmt. Im zweiten Paragraphen werden die notwendigen Rechnungen durchgeführt: Für φ genügt eine Function zweiten Grades; die Kegelschnittgleichung wird gebildet; die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung werden aus denen der Brioschi'schen Form berechnet. Es folgen invariantentheoretische Bemerkungen, aus denen hervorgeht, dass für die Brioschi'sche Form die Invariante B verschwindet. No.

P. Gordan. Ueber Gleichungen fünften Grades. Erlang. Ber. XVIII. 81-83.

G. Dawson. Solution of question 7472. Ed. Times XLIV. 83-84.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^5+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5=0,$$

so kann die Gleichung, deren Wurzeln die zehn Producte $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, ... sind, dadurch erhalten werden, dass man in der Gleichung

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

die Grössen a, b, c, f, g, h bezw. ersetzt durch

$$2,\quad 2\left\{p_2+\frac{p_1p_5}{y^2}-y\left(1+\frac{p_4}{y^2}\right)\right\},\quad 2\left\{p_4+\frac{p_2p_5}{y^2}-\frac{p_5}{y}\left(p_1+\frac{p_5}{y^2}\right)\right\},$$

$$p_3+\frac{p_2p_5}{y^2}-2\frac{p_5}{y},\quad y\left(1+\frac{p_4}{y}\right),\quad p_1+\frac{p_5}{y^2}.$$

Lp.

M. Mandl. Ueber eine Klasse von algebraisch auflösbaren Gleichungen fünften, sechsten und siebenten Grades. Wien. Ber. XCIV. 246-256.

Wenn drei Wurzeln einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit einander eine arithmetische Progression bilden, so ist die Auflösung der Gleichung zurückführbar auf die Auflösung einer Gleichung vom höchstens $(n-3)^{ten}$ Grade. Die aufgestellte Bedingung wird durch das Bestehen einer einzigen Beziehung zwischen den Coefficienten erfüllt. No.

F. N. Cole. A contribution to the theory of the general equation of the sixth degree. Newcomb Am. J. VIII. 265-286.

Herr Cole giebt zunächst eine kurze historische Uebersicht über die Untersuchungen, welche sich auf die Lösung der Gleichungen beziehen, mit besonderer Berücksichtigung der Arbeiten des Herrn F. Klein. Der Verfasser befolgt in seiner Arbeit die von diesem gegebene Methode: „Eine Gruppe linearer Substitutionen zu suchen, welche isomorph zur allgemeinen Gruppe von n Elementen ist; Functionen der Wurzeln zu finden, die sich gemäss diesen linearen Substitutionen vertauschen; entsprechende Differentialgleichungen für diese Functionen aufzustellen und deren Lösungen zu untersuchen“. Diese Vorschriften werden auf die allgemeinen Gleichungen sechsten Grades angewandt. Die gesuchte Gruppe ist die von drei Variabeln, welche mit der Kummer'schen Fläche eng verbunden ist. Die weitere Bestimmung der Differentialgleichung ist mit ausserordentlichen Rechnungsschwierigkeiten verknüpft; es sind daher nur einige Resultate gegeben und weitere in Aussicht gestellt. No.

Ch. A. Scott. The binomial equation $x^p - 1 = 0$. Newcomb Am. J. VIII. 261-264.

Herr Cayley hat (Lond. Math. Soc. XI. 11-14; XII. 15-16; XVI. 61-63) die Gleichungen behandelt, deren Wurzeln die vier resp. fünf Perioden von $\frac{p-1}{4}$ resp. $\frac{p-1}{5}$ Gliedern von Ein-

heitswurzeln sind. In der vorliegenden Arbeit wird ein Coefficient der ersteren Gleichung in vereinfachte Gestalt gebracht, die Form der zweiten Gleichung, wie sie von Herrn Cayley gegeben war, bewiesen. No.

A. Berger. Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries. Ups. N Act.

Die Arbeit schliesst sich an die F. d. M. XVI. 1884. 215-216 besprochene eng an. Beziehen wir uns auf die dortigen Ausführungen, so lässt sich der Inhalt der Arbeit kurz dahin angeben, dass die Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{m}\right)x^{m-1} \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\Delta}{m}\right)\frac{x^m}{m}$$

summirt werden für alle reellen Werte von x, für welche Convergenz besteht. No.

Th. Baumgardt. Ueber die Bestimmung der reellen Wurzeln trinomischer Gleichungen. Hoppe Arch. (2) IV. 103-106.

Die Methode, welche Herrn Sanio (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 74) zugeschrieben wird, ist bekannt und nicht allgemein gültig; die Behauptungen des Herrn Baumgardt, der sich auf geometrische Evidenz beruft, entbehren der Begründung. No.

W. Heymann. Ueber die Auflösung gewisser algebraischer Gleichungen mittels Integration von Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXI. 102-120; 129-146.

Es wird gezeigt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad y^n - ny - (n-1)x = 0$$

der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\frac{d^iy}{d(lx)^i}$$

genügen, wobei die Grössen α definirt sind durch:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\alpha_i\lambda^i = 0,\quad \lambda_k = k\frac{n-1}{n} - 1,\quad (k = 1, 2, \ldots, (n-1)).$$

Ebenso genügen die Wurzeln der Gleichung

$$(3)\qquad \eta^n - n\xi\eta - (n-1) = 0$$

der Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d^n\eta}{d\xi^n} = (-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n}\beta_i\frac{d^i\eta}{d(l\xi)^i},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\beta_i\lambda^i = 0,\quad \lambda_k = (k-2)\frac{n}{n-1} + 1,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, (n-1));\ \lambda_n = 1.$$

Die Lösung der Differentialgleichungen (2), (4) wird durch ein vielfaches Integral geliefert; in dasselbe gehen Constanten ein, die vermittelst eines linearen Gleichungssystems so bestimmt werden können, dass die Integrale alle Wurzeln von (1), (3) geben. Diese Integrale lassen sich weiter in Aggregate einer endlichen Anzahl von Reihen entwickeln, die nach Potenzen von x fortschreiten; für jedes x convergirt eine der Entwickelungen der beiden Integrale; und da (1) und (3) durch einfache Transformation in einander übergeführt werden können, so reicht diese Entwickelung in Reihen stets aus. No.

W. Heymann. Theorie der trinomischen Gleichungen. Klein Ann. XXVIII. 61-80.

W. Heymann. Ueber die Auflösung der allgemeinen trinomischen Gleichung $t^n + at^{n-s} + b = 0$. Schlömilch Z. XXXI. 223-240.

In der ersten Arbeit wird $t^n + at + b = 0$, in der zweiten $t^n + at^{n-s} + b = 0$ studirt und den Principien gemäss behandelt, die in dem eben besprochenen Aufsatze dargelegt sind. Im allgemeinen Falle sind die drei Formen

$$y^n + y^{n-s} + x = 0,\quad \eta^n + \xi\eta^{n-s} + 1 = 0,\quad uv^n + v^{n-s} + 1 = 0,$$

im speciellen nur die beiden ersten dieser drei Formen zu betrachten. Die m^{ten} Potenzen ihrer Wurzeln werden mittels des Mac-Laurin'schen Theorems durch Reihen dargestellt. Aus der

Gestalt derselben lässt sich der Schluss ziehen, dass dieselben durch gewisse Doppelintegrale summirt werden, und diese Darstellung durch Doppelintegrale gilt dann also auch für die Wurzeln der trinomischen Gleichung. Der Herr Verfasser geht weiter auf die Herleitung der Differentialresolventen ein, denen die m^{ten} Potenzen der Wurzeln trinomischer Gleichungen genügen.

No.

A. Wiener. Die Berechnung der reellen Wurzeln der quartinomischen Gleichungen. (Auszug aus einer preisgekrönten Arbeit.) Schlömilch Z. XXXI. 65-87 u. 192.

Mit Hülfe der Formel

$$\tang\alpha \tang\beta + \tang\beta \tang\gamma + \tang\gamma \tang\alpha = 1,$$

wobei $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist, lassen sich diejenigen quartinomischen Gleichungen auflösen, bei denen drei Vorzeichen einer Art, das vierte von entgegengesetzter Art ist. Die Grenzen und die Anzahl der reellen Wurzeln werden abgeleitet, die Formeln für die einzelnen Fälle gegeben und die numerische Berechnung an einigen Beispielen erläutert. No.

A. Markoff. Sur les racines de certaines équations. Klein Ann. XXVII. 143-150; 177-182.

Aus der Kettenbruch-Entwickelung der Function

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)}{z-y}\,dy - \xi \int_c^d \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

geht eine Functionenschar

$$\varphi_n(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n$$

hervor, welche Veranlassung zur Bildung der Gleichungen $\varphi_n(z) = 0$ giebt. Die Verteilung der Wurzeln dieser Gleichungen in die Intervalle $-\infty \ldots a \ldots b \ldots c \ldots d \ldots +\infty$ wird untersucht. Die Lamé'schen Functionen sind unter den $\varphi_n(z)$ enthalten.

In der zweiten Note werden in ähnlicher Weise gewisse Gleichungen $\varphi_n(z, \xi) = 0$ besprochen. No.

L. Kraus. Ueber Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. Casop. XV. pag. 63. (Böhm.)

Besitzt die Gleichung

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots = 0$$

nur reelle und ungleiche Wurzeln, so ist die obere Grenze derselben

$$\frac{f_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}},$$

während als untere Grenze der conjugirte Ausdruck

$$\frac{f_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{f_1^2 - \frac{2nf_2}{n-1}}$$

gilt, wie unter Verwendung von Sturm's Theorem gezeigt wird.

Std.

J. Giudice. Sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali. Palermo Rend. I. 69-72.

Bringt man die angegebene Gleichung auf die Form:

$$f(x) = \varphi(x),$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x > 0$ mit x beständig zunehmen, ist $0 \gtreqless a < b$, und liegen zwischen a und b die Wurzeln $X_1, X_2, \ldots, X_h$ (wo $X_{i+1} > X_i$ ist), so kann man immer $f(a) < \varphi(a)$ voraussetzen, und dann ist

$$f(a) < \varphi(a) < f(X_i) = \varphi(X_i) < \frac{f(b)}{\varphi(b)}. \qquad (i = 1, 2, \ldots, h).$$

Bestimmt man die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots$ den Bedingungen gemäss:

$$f(a_r) = \varphi(a_{r-1}),$$

$$\varphi(b_s) = f(b_{s-1}) \text{ oder } f(b_s) = \varphi(b_{s-1}), \text{ jenachdem } f(b) \lesseqgtr \varphi(b),$$

und sind A, B die Grenzwerte der Zahlenreihen $a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots$, bezw. $b_1, b_2, \ldots, b_s, \ldots$, so ist $X_1 = A$, $X_h = B$. Ist $A > B$, so existirt im Intervalle $a \ldots b$ keine Wurzel.

Wendet man dieselbe Methode für das Intervall $a_r \ldots b_s$ auf die Gleichung:

$$f'(x) = \varphi'(x)$$

an, woraus sich die Zahlenreihen $a_{r,1}, a_{r,2}, \ldots, a_{r,u}, \ldots$ und $b_{s,1}, b_{s,2}, \ldots, b_{s,v}, \ldots$ ergeben, und ist $a_{r,u}$ die erste Zahl der ersten Reihe, für welche

$$f(a_{r,u}) > \varphi(a_{r,u}),$$

$b_{s,v}$ die erste Zahl der zweiten Reihe, für welche

$$f(b_{s,v}) \gtrless \varphi(b_{s,v}), \text{ jenachdem } f(b) \lesssim \varphi(b),$$

so liegt X_1 zwischen a_r und $a_{r,u}$, X_h zwischen $b_{s,v}$ und b_s.

Die Gleichungen, welche die neuen Punkte bestimmen, sind stets durch Annäherung lösbar, denn ihre linken Seiten nehmen beständig zu. Vi.

A. N. Miassojedoff. Die abgeleiteten Functionen und ihre Anwendung zur numerischen Auflösung der Gleichungen. Mosk. Math. Samml. XII. 757-797. (Russisch.)

Wenn man die Glieder des Polynoms $f(x)$ der Reihe nach mit Factoren $m-k$, $m-k-1$, $m-k-2, \ldots, -(k-1)$, $-k$ multiplicirt, so erhält man ein neues Polynom, welchem der Verfasser den Namen der nach dem Parameter k abgeleiteten Function giebt. In der Abhandlung wird gezeigt, wie die Betrachtung dieser abgeleiteten Functionen zu Theoremen führt, welche dem Fourier-Budan'schen und Sturm'schen analog sind und gleich den letzteren zur numerischen Auflösung der Gleichungen dienen können. Wi.

Nasimoff. Ueber eine Modification der Sturm'schen Absonderungsmethode. Mosk. Math. Samml. XIII. (Russisch.)

Bekanntlich bestimmt man die Functionen $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_m$, mit Hülfe deren man die reellen Wurzeln der Gleichung $V_0 = 0$ nach der Sturm'schen Methode absondern kann, indem man $V_1 = V_0'$ setzt. Herr Miassojedoff hat in seinen Arbeiten (Siehe das vorangehende Referat und auch F. d. M. XVII. 1885. 63) untersucht, welche Form die Sturm'sche Methode annimmt, wenn man anstatt der Derivirten die Function $xV_0' - V_0$ nimmt. Herr

Nasimoff zeigt nun, dass man auch eine allgemeinere Function $(ax+b)\,V'_0+cV_0$ nehmen und bei gewissen Bedingungen eine Reihe von Functionen erhalten kann, welche die Absonderung der Wurzeln erleichtern können. Wi.

E. de Jonquières. Étude sur les équations algébriques numériques dans leur relation avec la règle des signes de Descartes. Rom. Acc. d. N. L. XXXVIII. 55-74.

Die „Art“ einer numerischen Gleichung ist bestimmt, sobald man der Reihe nach für jedes Glied derselben angiebt, ob sein Coefficient positiv oder negativ und ob der entsprechende Potenzexponent gerade oder ungerade ausfällt. Der Verfasser zeigt, wie man eine numerische Gleichung finden kann, welche von vorgeschriebener Art ist und überdies eine vorgeschriebene, mit der Descartes'schen Zeichenregel verträgliche Zahl von reellen Wurzeln besitzt. Ht.

J. Solin. Zur graphischen Auflösung numerischer Gleichungen dritten Grades. Prag. Ber. 6-13.

Auf Grund des Lill'schen Verfahrens werden die vollständigen numerischen Gleichungen dritten Grades mit Hülfe einer festen Parabel graphisch gelöst. No.

C. Reuschle. Zur graphisch-mechanischen Auflösung numerischer Gleichungen. Schlömilch Z. XXXI. 12-17.

Es wird gezeigt, wie der vom Herrn Verfasser angegebene mechanische Apparat (vgl. F. d. M. XVI. 68) auch zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades benutzt werden kann. No.

C. V. Boys. On a machine for solving equations. Phil. Mag. (5) XXI. 241-245.

H. Cunynghame. On a mechanical method of solving quadratic and cubic equations, whether the roots be real or impossible. Phil. Mag. (5) XXI. 260-261.

Beide Arbeiten wurden der Physikalischen Gesellschaft in London am 12. December 1885 vorgelegt (S. F. d. M. XVII. 1885. 75). Herr Boys macht in seiner Maschine eine Anwendung von der Gleichheit der Momente, indem er eine Reihe von Hebeln so anordnet, dass sie auf einander einwirken. Wenn der Grad der Gleichung nicht allzu hoch ist, bestimmt die Maschine alle reellen Wurzeln, für eine quadratische Gleichung auch die imaginären. Die Methode des Herrn Cunynghame beruht auf dem Gebrauche einer Parabel von der Gleichungsform $x^n = y$ und vermag alle Gleichungen von der Form $x^n + mx = c$ zu lösen.

Gbs. (Lp.)

J. H. van Leeuwen. Wortelvorenen. Brielle. J. Posthumus Pr. 43 S.

In dieser kleinen Schrift werden die folgenden Wurzelformen betrachtet

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \cdots + \sqrt{a_n},$$
$$(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \cdots + \sqrt{a_n})^2,$$
$$(A + B\sqrt{C} + D\sqrt{E} + F\sqrt{C} + H\sqrt{I} + \cdots)^{\frac{1}{2}}.$$

Sodann wird die Theorie an einigen Zahlenbeispielen erläutert.

G.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

J. J. Sylvester. Lectures on the theory of reciprocants. Reported by J. Hammond. Newcomb Am. J. VIII. 196-260; IX. 1-37.

Herr Sylvester hat in der Theorie der „Reciprocanten“ ein

neues Gebiet geschaffen, das eine ähnliche Rolle zu spielen bestimmt ist, wie die Theorie der Invarianten.

Den Ausgangspunkt bildet der sogenannte „Schwarz'sche Differentialausdruck“:

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = (y, x).$$

Hier bedeuten y', y'', y''' die Differentialquotienten einer Function y von x. Versteht man unter x', x'', x''' die entsprechenden Differentialquotienten der inversen Function x von y, so gilt nach H. A. Schwarz die identische Relation:

$$(y, x) = -y'^2(x, y)$$

oder:

$$\frac{2y'y''' - 3y''^2}{y'^2} = -y'^2 . \frac{2x'x''' - 3x''^2}{x'^2}$$

oder auch:

$$\frac{2y'y''' - 3y''^2}{y'^3} = -\frac{2x'x''' - 3x''^2}{x'^3}.$$

Man ist so auf eine rationale Function der drei ersten Differentialquotienten einer Function y von x geführt worden, die sich bei Vertauschung der beiden Variabeln nur um eine Function des ersten Differentialquotienten resp. sogar nur um die negative Einheit als Factor ändert. Ein noch einfacheres Beispiel dieser Art wird durch die Relation geliefert:

$$\frac{y''}{y'^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x''}{x'^{\frac{3}{2}}}.$$

Dies veranlasst, solche Functionen der Differentialquotienten y', y'', y''', ... überhaupt, d. h. die „Reciprocanten“, systematisch zu studiren.

Man kann die Vertauschung von y mit x auch als eine specielle lineare Transformation beider Variabeln auffassen, und in diesem Sinne ist bereits der obige Ausdruck eine „Invariante“. Bei genauerem Erfassen zeigt es sich aber gerade umgekehrt, dass der Begriff der Reciprocante weit über den der gewöhnlichen Invariante hinausgeht. Dies tritt z. B. bei der Schwarz'schen Formel sehr deutlich in's Licht. Man kann nämlich deren Inhalt (wie mit einfachen Mitteln bewiesen wird) auch so fassen:

„Denkt man sich x, y, z als drei Variable, die von einer Unabhängigen t abhängen, so bleibt der Ausdruck:

$$(y, x) - (z, x)$$

bis auf einen Factor $\left(\frac{dX}{dx}\right)^2$ ungeändert, wenn x vermöge einer ganz beliebigen Substitution in X übergeht (während y und z ihre Form beibehalten)."

Demnach ist die Form $(y, x)-(z, x)$ eine simultane Invariante der beiden Formen $y(x)$ und $z(x)$ in höherem Sinne, die sich bei beliebigen Transformationen der Unabhängigen x nur um einen, ausschliesslich von der angewandten Transformation abhängigen Factor ändert.

Bildet man nunmehr eine binäre Form mit den Wurzeln (y, x), (z, x), (u, x) etc., so ist offenbar jede gewöhnliche In- (und Co-) variante dieser binären Form eine simultane „In- (und Co-)variante" der Formen $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, ... in dem allgemeineren Sinne.

So sind überhaupt die „Reciprocanten" als die einfachsten Repräsentanten von „erweiterten" Invariantenbildungen anzusehen, und man wird sich zuvörderst auf ihr Studium beschränken.

Der Bequemlichkeit wegen werden statt y', y'', y''', $y^{(IV)}$, ... die lateinischen Buchstaben t, a, b, c, ... und statt der inversen Formen x', x'', x''', $x^{(IV)}$, ... die griechischen Buchstaben τ, α, β, γ, ... eingeführt. Der Zusammenhang zwischen den beiderlei Differentialquotienten wird durch die eine Operation:

$$\left\{\frac{1}{t}(ad_t + bd_a + cd_b + \cdots)\right\}^n\left(-\frac{a}{t^3}\right)$$

vermittelt, welche succ. für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die Grössen α, β, γ, ... liefert. Es entspricht dieser Operator ganz dem in der elementaren Invariantentheorie üblichen:

$$a\delta_b + 2b\delta_c + 3c\delta_d + \cdots$$

Die Reciprocanten zerfallen einmal in zwei Hauptklassen „von ungeradem" und „von geradem Charakter", jenachdem sie sich bei Vertauschung der Variabeln y, x um einen Factor $-t^n$ oder $+t^n$ ändern. Der Exponent n heisst die „Charakteristik".

Als Beispiel einer geraden Reciprocante diene $3ac - 5b^2$; denn

es ist:

$$3\alpha\gamma - 5\beta^2 = \frac{1}{t^8}(3ac - 5b^2).$$

Andererseits werden „gemischte“ und „reine“ Reciprocanten unterschieden, jenachdem der erste Differentialquotient t explicite in ihnen auftritt oder nicht. So ist $3ac - 5b^2$ rein, dagegen $2tb - 3a^2$ gemischt. Die reinen Reciprocanten correspondiren den eigentlichen, gewöhnlichen Invarianten. Sie lassen sich mit Hülfe des wichtigen Hammond'schen Operators V:

$$V = 4 \cdot \frac{a_0^2}{2} \partial a_1 + 5 a_0 a_1 \partial a_2 + 6\left(a_0 a_2 + \frac{a_1^2}{2}\right) \partial a_3 + 7(a_0 a_3 + a_1 a_2) \partial a_4 + \cdots,$$

wo

$$a = 1.2.a_0, \quad b = 1.2.3.a_1, \quad c = 1.2.3.4.a_2, \ \ldots,$$

dahin charakterisiren, dass sie durch die Operation V zum Verschwinden gebracht werden.

Als die „allgemeinste Reciprocante“ wird eine Function $F(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ definirt, wenn sie $F(t, a, b, c, \ldots)$ als Factor enthält. Ist der letztere ein bloss numerischer, so haben wir eine „absolute Reciprocante“.

Wird die Function F darauf beschränkt, in den bez. Variabeln rational und ganz zu sein, so kommt man auf die früheren Reciprocanten zurück, indem der betreffende Factor dann von selbst gleich $\pm t^n$ wird.

Der Verfasser spricht von „homogenen“ und „isobaren“ Reciprocanten, d. h. endlichen Summen von Gliedern $A t^v a^l b^m c^n \ldots$, für welche nicht nur $v + l + m + n + \cdots = i$ (der „Grad“), sondern auch $-v + m + 2n + \cdots = w$ (das „Gewicht“) einen constanten Wert haben. Als Gewichte der einzelnen Grössen $t, a, b, c, \ldots$ figuriren die Zahlen $-1, 0, 1, 2, \ldots$; das des höchsten Differentialquotienten heisst die „Ausdehnung“ extent $(= j)$ der Reciprocante. Die geraden Reciprocanten werden durch das Symbol $0 : w : i, j$, die ungeraden durch $1 : w : i, j$ gekennzeichnet: für eine reine Reciprocante genügt (genau wie in der Invariantentheorie) das Zeichen $w : i, j$, da diese zugleich mit der Zahl i gerade oder ungerade sind.

Aus irgend zwei Reciprocanten wird eine „absolute“ genau so gebildet, wie aus zwei gewöhnlichen Invarianten eine absolute.

Die Haupteigenschaft einer absoluten Reciprocante ist, durch Differentiation nach x in eine (im allgemeinen nicht absolute) Reciprocante von gleichem „Charakter“ überzugehen.

Verbindet man damit die andere Eigenschaft einer beliebigen Reciprocante F von der Charakteristik μ, durch Division mit $t^{\frac{\mu}{2}}$ zu einer absoluten zu werden, so ergiebt sich, dass $\frac{d}{dx}\left(\frac{F}{t^{\frac{\mu}{2}}}\right)$ und damit auch $2t\frac{dF}{dx} - \mu a F$ eine Reciprocante von gleichem Charakter ist, wie F.

Nimmt man insbesondere F als homogen und isobarisch an, so erhält man den fruchtbaren Satz:

„Wendet man auf eine (in den $t, a, b, c, \ldots$ ganze) homogene und isobarische Reciprocante F die Operation ξ an:

$$\xi = (2bt - 3a^2)\partial_a + (2ct - 4ab)\partial_b + (2dt - 5ac)\partial_c + \cdots$$
$$= \sum_n (n+3)(a_{n+1}t - a_0 a_n)\partial a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so erhält man eine ebensolche Reciprocante ξF von gleichem Charakter wie F.“

Eine genauere Untersuchung ergiebt übrigens, dass die Eigenschaft des Isobarismus durch die der Homogeneität mitbedingt ist.

Der Operator ξ producirt aus irgend einer Reciprocante F eine unendliche Reihe von (im allgemeinen gemischten) Reciprocanten ξF, $\xi^2 F$, $\xi^3 F$ etc. Dies Verfahren heisst Eduction.

Eine besonders einfache Reihe kommt für $F = a$; ξa ist der Schwarz'sche Ausdruck $2bt - 3a^2$, $\xi^2 a$ wird $ct - 5ab$ (die sog. „Post-Schwarzian“) u. s. f. Es zeigt sich als wichtig, dass diese „Potenzen“ ξ_a^n zugleich als Zähler der Ausdrücke

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d}{dx}\right)^n \log t$$

erscheinen.

War ξ der „Hauptgenerator“ für gemischte Reciprocanten,

so giebt es einen ganz ähnlichen X, der aus reinen Reciprocanten immer wieder solche erzeugt, nämlich

$$X = \Sigma(n+3)(a_0 a_{n+1} - a_1 a_n)\partial a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist nun merkwürdig, dass diese zwei Generatoren ξ, X als ihr Abbild in der Invariantentheorie zwei zuerst von Cayley gefundene Generatoren besitzen, die sich nur in den numerischen Coefficienten von jenen unterscheiden, während die Buchstaben a, b, c, ... (mit den resp. Gewichten 0, 1, 2, ...) jetzt die Coefficienten einer binären Form bedeuten (und $t = 1$ zu setzen ist).

Während hierin die beiden Theorien der Reciprocanten und Invarianten die grösste Aehnlichkeit aufweisen, zeigt sich ein auffallender Unterschied in Folgendem. Versteht man unter ψ die „Transformirte" einer ganz willkürlichen Function $\varphi(t, a, b, c, \ldots)$, d. h. ist

$$\varphi(t, a, b, c, \ldots) = \psi(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

so ist das Product $\varphi\psi$ eine Reciprocante (von geradem Charakter). Dagegen ist es, wie bewiesen wird, im allgemeinen unmöglich, eine Invariante in nicht-invariantive selbständige Factoren aufzulösen.

Eine hervorragende Rolle (namentlich in den Anwendungen auf Geometrie) spielen die „orthogonalen" Reciprocanten, d. h. solche, die sich, abgesehen von einem Factor, bei einer auf die Variabeln x, y ausgeübten orthogonalen Transformation nicht ändern.

Vor einigen Jahren hat Herr Sharp, was der Verfasser nicht zu erwähnen scheint, in den Proceedings of the London M. S. eine fast vollständige Sammlung solcher Orthogonalreciprocanten geliefert, wie sie in der Geometrie und Mechanik überaus häufig auftreten und daselbst immer Fundamentalbegriffe repräsentiren.

Von solchen gilt der elegante Satz:

„Ist R sowohl wie $\frac{dR}{dt}$ eine Reciprocante, so ist R orthogonal."

Die einfachste Orthogonal-Reciprocante erhält man durch

Differentiiren des Krümmungsradius einer ebenen Curve, nämlich

$$(1+t^2)b-3a^2t,$$

die also, gleich Null gesetzt, einen Kreis darstellt.

Der Verfasser wendet sich nunmehr zu den Beiträgen, die seine Anhänger Hammond, MacMahon, Elliott, Perrin zu seiner Theorie geliefert haben (v. die bez. Referate).

Es lassen sich hier neue Vergleichungspunkte mit der Invariantentheorie finden. Vom Verfasser selber rührt ein älterer Satz her (der sog. Sylvester'sche „Aggregationssatz"), der lautet: „Ist Ω der bekannte Annihilator der Invarianten, d. h ist $\Omega J=0$, wo

$$\Omega = a_0\partial a_1 + 2a_1\partial a_2 + 3a_2\partial a_3 + \cdots + j a_{j-1}\partial a_j$$

und J eine Invariante, so ist $\Omega O J$ ein Vielfaches von J, wenn

$$O = a_j\partial a_{j-1} + 2a_{j-1}\partial a_{j-2} + \cdots + j a_1\,\partial a_0."$$

Deshalb heisst O der zu Ω entgegengesetzte Operator oder der „Reversor" von Ω.

Die Frage nach dem Reversor von V (dem Annihilator der reinen Reciprocante R) hat MacMahon einfach dahin beantwortet, dass derselbe mit $\frac{d}{dx}$ identisch sei. Daraus folgt sofort als Corollar, dass $\left(V^m \frac{d^m}{dx^m}\right)R$ ein numerisches Vielfaches von $a^m R$ wird.

In diesem Satze ist auch die Quelle der Perrin'schen „Residuentheorie" enthalten, die sowohl für Invarianten wie für Reciprocanten gilt.

Des weiteren unternimmt es der Verfasser, seinen bekannten Hauptsatz für Subinvarianten, „dass die Anzahl der linear unabhängigen Subinvarianten vom Typus $w:i,j$ durch die Formel

$$(w:i,j)-(w-1;\ i,j)$$

geliefert wird", auf Reciprocanten zu übertragen. Die analoge Formel für reine Reciprocanten lautet:

$$(w:i,j)-(w-1;\ i+1,j).$$

Dies gelingt in der That unter Aufbietung neuer Beweismittel; indem die Beziehung $ij-2w=0$ (wo w das constante Gewicht

bedeutet) als Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel gedeutet wird.

Hiermit ist eine unmittelbare Verwertung des reichen Materiales gegeben, welches in der Theorie der „erzeugenden Functionen“ aufgespeichert war.

Der Schluss der Vorlesungen bezieht sich auf geometrische Anwendungen. Dieselben betreffen in erster Linie den mehrpunktigen Contact zweier Curven, wenn dieser noch in gewisser Weise vom Coordinatensystem abhängig ist. So z. B. stellt

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y^2 = 0$$

die Bedingung dar, dass eine beliebige ebene Curve im Punkte x, y von einem Kegelschnitte zweipunktig berührt wird, wenn derselbe ein Paar conjugirter Durchmesser besitzt, die mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Hierher gehört auch folgender, zuerst von Hammond aufgestellter Satz über Evoluten. Ist ϱ der Krümmungsradius einer ebenen Curve im Punkte (x, y), und $d\varphi$ der Winkel, unter dem das Bogenelement ds vom Krümmungscentrum aus erscheint, so ist der Krümmungsradius der n^{ten} Evolute gleich $\dfrac{d^n\varrho}{d\varphi^n}$.

Es lassen sich ferner allgemeine Sätze aufstellen über das vollständige Integral einer Differentialgleichung, wenn deren linke Seite eine Reciprocante ist. Es werden dadurch Sätze bestätigt, die Halphen auf anderem Wege gewonnen hatte. Dies führt zu einer besonderen Gattung von Reciprocanten, den sog. „projectiven“ Reciprocanten oder „Principianten“.

Eine Principiante ist dadurch definirt, dass sie nicht bloss bez. der Buchstaben $a, b, c, d, \ldots$ invariant ist, sondern auch bez. der folgenden: $a, B, C, D, \ldots$, wo $B, C, D, \ldots$ selbst Reciprocanten sind.

Man kann für diese Principianten, ganz wie für die Reciprocanten überhaupt, gewisse Stammformen („Protomorphe“) ermitteln, aus denen alle übrigen durch algebraische Processe abgeleitet werden können.

Diese Stammformen sind einfach dadurch charakterisirt,

dass für sie das Gewicht w gleich der Ausdehnung j wird, sodass ihnen das Symbol j; i, j zukommt.

Die nächste Aufgabe der Zukunft besteht darin, für jede Reihe von Buchstaben a; a, b; a, b, c; etc. vollständige Tabellen von Stammformen auszurechnen. Man kann dieselben auch nach dem Wert von j klassificiren. Für die Werte $j = 2$ bis 8 findet sich eine solche Tabelle S. 35.

Wegen der Ausdehnung der Reciprocantentheorie auf das Gebiet von n Variabeln vergleiche das folgende Referat über die bez. Arbeit von Elliott. My.

B. Elliott. On ternary and n-ary reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 172-196.

Die Sylvester'sche Theorie der Reciprocanten wird hier auf Functionen von n Variabeln ausgedehnt. Es genüge die Betrachtung des Falles $n = 3$. Eine „ternäre Reciprocante“ ist eine Function der partiellen Differentialquotienten

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \quad a_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad b_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad c_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$a_2 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad b_2 = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad c_2 = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad d_2 = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \quad \text{etc.},$$

die sich nur je um einen Factor ändert, wenn die Variablen z, x, y cyklisch vertauscht werden. Die Reciprocante ist eine „absolute“, wenn der Factor ein bloss numerischer ist. Im ersten Falle hat der Factor einen Wert von der Form $\pm (pq)^n$ (wo n eine ganze, positive Zahl), im zweiten ist er eine dritte Einheitswurzel. Im letzteren Falle giebt es drei wesentlich verschiedene Klassen von Reciprocanten mit den resp. „Charakteren“ 0, 1, 2. Bezeichnet man durch einmalige resp. zweimalige Accentuirung das Resultat der Vertauschung von z, x, y mit x, y, z resp. y, z, x, und mit ε eine imaginäre dritte Einheitswurzel, mit A die Reciprocante, so sind die drei Klassen repräsentirt durch:

$$\begin{cases} A = A' = A'', \\ A = \varepsilon A' = \varepsilon^2 A'', \\ A = \varepsilon^2 A' = \varepsilon A''. \end{cases}$$

Andererseits erweitert der Verfasser den Begriff der Reciprocante dahin, dass in einer solchen auch die Variabeln x, y, z selbst explicite auftreten dürfen. Dieser Gedanke erweist sich als sehr fruchtbar. Denn nun kann man als die einfachsten Stammreciprocanten die aus der Algebra wohlbekannten Ausdrücke zugrunde legen:

$$\begin{cases} z+x+y = x+y+z = y+z+x, \\ z+\varepsilon x+\varepsilon^2 y = \varepsilon(x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z) = \varepsilon^2(y+\varepsilon z+\varepsilon^2 x), \\ z+\varepsilon^2 x+\varepsilon y = \varepsilon^2(x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z) = \varepsilon(y+\varepsilon^2 z+\varepsilon x). \end{cases}$$

Aus ihnen gehen durch Addition, Subtraction, Multiplication weitere Reciprocanten hervor.

Mit Hülfe der Identitäten:

$$dz = p dx + q dy,$$
$$dx = p' dy + q' dz,$$
$$dy = p'' dz + q'' dx$$

gelangt man leicht zu einem ganzen System von absoluten Reciprocanten, die sich alle in der Formel:

$$(pq)^{-\frac{1}{3}r} S_r(p, q, -1)$$

zusammenfassen lassen, wo S_r eine homogene, symmetrische Function r^{ten} Grades der betreffenden Argumente bedeutet.

Eine noch umfassendere Klasse geht hieraus wieder hervor, wenn man in der Function S_r die Argumente $p, q, -1$ resp. ersetzt durch $px, qy, -z$.

Eine transcendente Reciprocante wird z. B. geliefert durch:

$$\log p + \varepsilon^2 \log q + \varepsilon \log(-1)$$

und ähnliche.

Ein sehr wichtiger Satz heisst: „Sind u, v zwei absolute Reciprocanten, so ist die Jacobi'sche Functionaldeterminante derselben bez. p, q eine Reciprocante, die nach Multiplication mit einer passenden Potenz von pq zu einer absoluten wird."

Als Zeichen der Jacobi'schen Form dient $\frac{d(u, v)}{d(p, q)}$.

Aus der Relation

$$\frac{d(x, y)}{d(y, z)} = -q'$$

folgt, dass auch das Doppelintegral

$$\int^x \int^y (pq)^{\frac{1}{3}} dx\, dy$$

eine Reciprocante ist, desgleichen auch

$$\int^x \int^y (pq)^{\frac{1}{3}} R\, dx\, dy,$$

wo R eine absolute Reciprocante ist.

Diese Formen enthielten alle nur p und q. Um zu solchen zu gelangen, die auch von den höheren Differentialquotienten abhängen, wird zuvörderst die Abhängigkeit zwischen den $a_1\, b_1, c_1$; a_2, b_2, c_2, d_2; etc. einerseits und den einmal resp. zweimal accentuirten Grössen andererseits untersucht.

Diese führt fast unmittelbar zu Reciprocanten, die in der Geometrie eine namhafte Rolle spielen. So z. B.

$$\frac{a_1 c_1 - b_1^2}{(pq)^{\frac{4}{3}}} = \frac{a_1' c_1' - b_1'^2}{(p'q')^{\frac{4}{3}}} = \frac{a_1'' c_1'' - b_1''^2}{(p''q'')^{\frac{4}{3}}},$$

d. i. (bis auf einen Factor) das Product der Hauptkrümmungsradien in irgend einem Punkte einer Fläche.

Der Zähler $a_1 c_1 - b_1^2$ ist zugleich ein einfaches Beispiel für eine „reine“ Reciprocante, d. i. eine solche, welche die ersten Ableitungen p, q (und auch die Variabeln selbst) nicht enthält.

Der Zusammenhang der reinen Reciprocanten mit den Invarianten zeigt sich deutlich in dem Satze: „Irgend eine homogene reine (ternäre) Reciprocante vom Charakter 0 ist eine simultane Invariante der Formen:

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z, \quad \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z, \quad \ldots,$$

diese als binäre Formen in α, β aufgefasst (aber nicht umgekehrt).“

Auch das Sylvester'sche Verfahren der Eduction ist auf ternäre Reciprocanten übertragbar, wenn auch die wirkliche Ausführung auf manche Hindernisse stösst. Der Hauptsatz lautet hier:

„Sind u, v, w, φ vier absolute ternäre Reciprocanten, so ist auch $\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)} : \dfrac{d(w, \varphi)}{d(x, y)}$ eine solche.“

Die Theorie der orthogonalen Reciprocanten gestaltet sich ganz analog wie im binären Falle.

Endlich erwähnen wir noch die Sätze, dass, wenn u_1, u_2, u_3 drei unabhängige absolute Reciprocanten sind, es auch jede der Ableitungen $\frac{\partial^{r_1+r_2}u_3}{\partial u_1^{r_1}\partial u_2^{r_2}}$ ist; sowie den andern, dass die Anzahl der linear unabhängigen Reciprocanten, in denen nicht höhere als m^{te} Differentialquotienten vorkommen, genau gleich der Anzahl dieser Differentialquotienten ist, nämlich

$$\frac{(m+3-1)!}{m!(3-1)!}-1.$$

My.

J. J. Sylvester. Sur les réciprocants purs irréductibles du quatrième ordre. C. R. CII. 152-153.

Es wird ein in einer früheren Note des Verfassers vorgekommener Berechnungsfehler berichtigt. My.

R. Perrin. Sur la théorie des réciprocants. C. R. CII. 351-353.

Der Verfasser giebt eine Anzahl Resultate, die eine bemerkenswerte Weiterführung und Vereinfachung der Sylvester'schen Reciprocantentheorie (cf. das bez. Referat) involviren.

Aendert sich eine Reciprocante bei Vertauschung der beiden Variabeln x, y um die λ^{te} Potenz von $\frac{dy}{dx}$ als Factor, so heisst λ die „Klasse" der Reciprocante. Dann gilt vor allem der Satz:

„Sind R, R' irgend zwei Reciprocanten von den resp. Klassen λ, λ', so ist

$$\lambda' R' \frac{dR}{dx} - \lambda R \frac{dR'}{dx}$$

wieder eine solche, von der Klasse $\lambda+\lambda'+1$."

Dieselbe wird als die Jacobi'sche Form von R und R' be-

zeichnet, da sie eine unmittelbare Verallgemeinerung der gewöhnlich so genannten Bildung anzeigt.

Dieser Satz erlaubt, die Reihe der Sylvester'schen Stammformen („Protomorphe") aus den beiden ersten successiv abzuleiten. Die angegebene „Jacobi'sche Operation" steht mit dem Sylvester-Hammond'schen Operator V in einer einfachen Beziehung. Es genügt nämlich jede „reine" Reciprocante R der Differentialgleichung (aber nicht umgekehrt):

$$V\left(\frac{dR}{dx}\right) = 2\lambda R\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Daran schliessen sich weitere derartige Operationen, die aus einer resp. zwei Reciprocanten je eine neue produciren. Endlich wird eine Reihe von Sätzen mitgeteilt, die ganz gleichmässig für Reciprocanten wie für Subinvarianten gelten. Unter anderem überträgt der Verfasser den von ihm früher für Subinvarianten aufgestellten Fundamentalbegriff des „Residuums" mit Erfolg auf die Reciprocanten. Die innige Verwandtschaft beider Theorien tritt dadurch immer deutlicher hervor. My.

J. Hammond. On a class of integrable reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 128-138.

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = t,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = a,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = b,\ \ldots,$$
$$\frac{dx}{dy} = \tau,\quad \frac{d^2x}{dy^2} = \alpha,\quad \frac{d^3x}{dy^3} = \beta,\ \ldots,$$

so ist die Function $\varphi(t, a, b, c, \ldots)$ eine Reciprocante, wenn sie bis auf einen Factor gleich $\varphi(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ ist. Der Verfasser beschäftigt sich mit der besonderen Klasse von Differentialgleichungen $\varphi(t, a, b, c, \ldots) = 0$, die ein Integral von der Form $a = F(t)$ besitzen. Dann lässt sich das vollständige Integral dieser letzteren Differentialgleichung ohne weiteres angeben, durch

$$x = \int\frac{dt}{F(t)} + \text{const.},\quad y = \int\frac{tdt}{F(t)} + \text{const.}$$

Als erstes Beispiel dieser Art wird das durch Nullsetzen

der Sylvester'schen „Orthogonalreciprocante" gelieferte behandelt, nämlich:

$$(1+t^2)\,c - 10abt + 15a^3 = 0.$$

Setzt man $t = \operatorname{tang}\vartheta$, so kommt:

$$x = \int \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos 6\vartheta}}, \quad y = \int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{\cos 6\vartheta}}.$$

Die Elimination von ϑ aus diesen beiden Gleichungen führt auf elliptische Functionen.

Man kann auch a darstellen als Quadratwurzel aus einer ganzen Function sechsten Grades in t. Diese Function hat die Eigenschaft, bei Vertauschung der beiden Variabeln nur ihre Form zu ändern, indem die (zwei) darin auftretenden willkürlichen Constanten durch andere ersetzt werden. Allgemein gilt der Satz:

„Geht eine Gleichung $F(t, a, A, B, C, \ldots) = 0$ bei Vertauschung der Variabeln über in $F(\tau, \alpha, A', B', C', \ldots) = 0$, sodass die Form von F ungeändert bleibt und nur die willkürlichen Constanten A, B, C, ... andere Werte annehmen, so ist die erstere Gleichung ein Integral einer Reciprocantengleichung."

Die zugehörige Reciprocante wird eine reine, wenn $F(t, a, A, B, C, \ldots)$ auch bei einer beliebigen linearen Transformation von x, y nur ihre Form ändert. Dann lässt sich die Gleichung $F = 0$ in die Form bringen: Eine binäre Form in t (mit beliebigen Coefficienten A, B, C, ...), k^{ten} Grades, gleich $a^{\frac{1}{3}k}$. Dies Resultat erlaubt nun umgekehrt, wenn man $k = 1, 2, 3, \ldots$ annimmt, und jedesmal abwechselnd nach x differentiirt und mit a dividirt, eine Stammtabelle reiner Reciprocanten herzustellen, aus denen alle übrigen algebraisch ableitbar sind. Indessen ist diese Tabelle nicht ganz so einfach, wie die zuerst von Sylvester aufgestellte.

Ein elegantes geometrisches Beispiel gewähren die unicursalen (algebraischen) ebenen Curven: diese können immer durch das Verschwinden einer Reciprocante dargestellt werden.

My.

P. A. MacMahon. Perpetuant reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 139-151.

Der Verfasser hat sich früher viel mit den „perpetuirenden Subinvarianten" beschäftigt, d. h. solchen Subinvarianten binärer Formen, die von dem Grade der letzteren ganz unabhängig sind, und namentlich eine vollständige numerische Aufzählung derselben geleistet. Er geht hier an die Lösung der analogen Frage für Reciprocanten. Eine „perpetuirende" Reciprocante wird definirt, als eine solche, die sich nicht als (lineare, ganze) Function anderer Reciprocanten von geringerem Grad und Gewicht (aber unbeschränkter Buchstabenanzahl) darstellen lässt. Die „Reciprocante" selbst ist geradezu als eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$3a^2\delta_b + 10ab\delta_c + (15ac + 10b^2)\,\delta_d + \ldots = 0$$

aufgefasst.

Die gestellte Aufgabe kommt dann unmittelbar auf die andere zurück, eine Zahl w (das Gewicht) einmal, so oft als möglich, in ϑ (d. i. den Grad), das andere Mal in $\vartheta + 1$ Teilzahlen zu zerlegen und die Differenz (ϑ, w) beider Anzahlen zu bilden: dies ist die Anzahl der linear unabhängigen Perpetuanten vom Grad-Gewicht (ϑ, w). Die Tabellen ordnen sich am besten nach dem Werte der Zahl $\vartheta + w$, dem sog. „Uebergewicht".

Es genügt die jedesmalige Angabe der „erzeugenden Function" $G.F.$ Bezeichnet (μ) zur Abkürzung den Ausdruck $1 - x^\mu$, so erhält man successive:

für den Grad 0: $G.F = \dfrac{1-2x}{(1)}$,

„ „ „ 1: $G.F = \dfrac{1-x-x^2}{(1)(2)}$,

„ „ „ 2: $G.F = \dfrac{1-x-x^3}{(1)(2)(3)} = 1 + x^2$,

„ „ „ 3: $G.F = \dfrac{1-x-x^4}{(1)(2)(3)(4)} = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^6$,

etc. bis zum Grade 6.

Demnach existirt für den Grad 2 nur eine Perpetuante, nämlich

$$(2, 2) = 3ac - 5b^2,$$

für den Grad 6 existiren drei solche, (3, 3), (3, 4), (3, 6) u. s. f.

My.

C. Leudesdorf. On some results connected with the theory of reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 197-219.

Sind x und y zwei durch eine beliebige Relation verknüpfte Variable und bezeichnen wir die successiven Differentialquotienten von y nach x beziehungsweise mit $y_1, y_2, \ldots$, dagegen die Differentialquotienten von x nach y beziehungsweise mit $x_1, x_2, \ldots$, so ist offenbar:

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_2 = \frac{-y_2}{y_1^3}, \quad x_3 = \frac{-y_1 y_3 + 3y_2^2}{y_1^5}, \quad \ldots$$

Die Zähler der rechter Hand stehenden Brüche werden der Kürze wegen beziehungsweise mit $Y_1, Y_2, \ldots$ bezeichnet, so dass allgemein Y_n eine homogene Function der $y_1, y_2, \ldots$ vom Grade $n-1$ und vom Gewicht $2(n-1)$ ist.

Die Untersuchungen des Verfassers beziehen sich auf die durch Sylvester begründete Theorie der Reciprocanten (vergl. F. d. M. Bd. XVII. 1885. S. 79), d. h. solcher ganzen homogenen Functionen von $y_1, y_2, \ldots$, für welche die Relation:

$$R(y_1, y_2, \ldots) = \pm y_1^{i+w} R(x_1, x_2, \ldots)$$

vermöge der obigen Formeln identisch erfüllt ist. Dabei ist i der Grad und w das Gewicht der Reciprocante. Bezeichnen wir nun mit F irgend eine Function von $y_1, y_2, \ldots$, und setzen $x - \vartheta y$ an Stelle von x, wo ϑ eine unendlich kleine Grösse bedeutet, so ist die entsprechende Aenderung von F gleich dem Ausdrucke:

$$\vartheta \left\{ -y_1^2 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_1 \left(2y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} + \cdots \right) + VF \right\},$$

in welchem V das von y_1 freie Operationssymbol:

$$3y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial}{\partial y_4} + (15 y_2 y_4 + 10 y_3^2) \frac{\partial}{\partial y_5} + \cdots$$

darstellt. Durch wiederholte Anwendung jener unendlich kleinen Transformation wird bewiesen, dass jede ganze homogene isobare Function F von $y_2, y_3, \ldots$ notwendig eine (reine) Reciprocante ist, sobald sie der Differentialgleichung $VF = 0$ genügt. Durch entsprechende Betrachtungen werden einige bekannte

Sätze über orthogonale Reciprocanten bestätigt. (Vergl. F. d. M. Bd. XVII. 1885 p. 80.) Nach weiteren Bemerkungen bezüglich der Aufstellung von Reciprocanten untersucht der Verfasser die schon von Sylvester erwähnten Beziehungen, welche zwischen der Theorie der Reciprocanten und der Invariantentheorie der binären Formen bestehen. Werden nämlich Y_1, Y_2, ... als Functionen des einen Argumentes y_1 betrachtet, so ist jede simultane Semiinvariante jener Functionen eine (reine) Reciprocante.

Zum Schlusse werden die entwickelten Methoden auch auf solche allgemeinere reciprocante Bildungen angewendet, welche auftreten, wenn man statt zweier Variabeln x, y drei durch eine beliebige Relation verknüpfte Variable x, y, z zugrunde legt.

Ht.

C. Leudesdorf. Formula for the interchange of the independent and dependent variables in a differential expression; with extensions of the same, and some applications to reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 329-343.

Der Verfasser beweist durch den Schluss von n auf $n+1$ die bekannte Formel:

$$VY_n = y_1^2\frac{\partial Y_n}{\partial y_1} - (n-2)y_1 Y_n.$$

Wegen der Bezeichnungsweise vergl. das vorangegangene Referat p. 88. Im Anschluss hieran wird untersucht, in welcher Weise sich eine ganze Function von y_1, y_2, ... ändert, wenn wir statt der Variabeln x und y die linear transformirten Variabeln:

$$\xi = ax + by + c,$$
$$\eta = a'x + b'y + c'$$

einführen. Das gewonnene Resultat gestattet verschiedene Anwendungen in der Theorie der Reciprocanten. Unter anderem werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abgeleitet, dass eine vorgelegte Function von y_1, y_2, ... eine (gemischte) Reciprocante sei. Diese Bedingungen ermöglichen die

Aufstellung gewisser reciprocanter Grundformen (standard forms) mit deren Hülfe eine jede (gemischte) Reciprocante dargestellt werden kann. Ht.

L. J. Rogers. Homographic and circular reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 220-231.

Der Verfasser definirt zunächst gewisse reciprocante Formen von einfachstem Charakter (protomorphs). So liefert die Recursionsformel:

$$M_{r+1} = y_1 \frac{dM_r}{dx} - \frac{3r}{2} y_2 M_r$$

eine Reihe gemischter Reciprocanten, wie folgt:

$$M_1 = y_2, \quad M_2 = y_1 y_3 - \frac{3}{2} y_2^2, \quad \ldots;$$

ferner ergiebt die Recursionsformel:

$$R_{r+1} = y_2 \frac{dR_r}{dx} - \frac{4r}{3} y_3 R_r$$

ein System reiner Reciprocanten von der Gestalt:

$$R_2 = 9y_2 y_4 - 15y_3^2, \quad R_3 = 9y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3, \quad \ldots$$

Wegen der Bezeichnungsweise vergl. das frühere Referat p. 88.

Eine homographische Reciprocante ist eine Reciprocante, welche ungeändert bleibt, wenn die Variabeln x, y beziehungsweise durch

$$\frac{Lx+M}{x+N}, \quad \frac{L'y+M'}{y+N'}$$

ersetzt werden, wo L, M, N, L', M', N' Constante bedeuten. Homographische Reciprocanten genügen zwei Differentialgleichungen, ohne dass umgekehrt diese Forderungen zu ihrer Bestimmung hinreichend wären. Ersetzt man in einer homographischen Reciprocante die Variablen x, y beziehungsweise durch $x+iy$, $y+ix$, so entstehen Bildungen, welche offenbar mit den Kreispunkten im Unendlichen in Beziehung stehen und deshalb vom Verfasser circulare Reciprocanten genannt werden. Ht.

L. J. Rogers. Second paper on reciprocants. Lond. M. S. Proc. XVII. 344-354.

Diese Arbeit beschäftigt sich damit, ein System einfachster Reciprocanten aufzustellen, durch welche alle homographischen Reciprocanten dargestellt werden können. Das System stimmt nahezu mit der Formenreihe M_1, M_2, ... überein, zu welcher der Verfasser bereits in der oben (vergl. p. 90) besprochenen Arbeit gelangte. Ht.

E. B. Elliott. On the definition of an invariant. Mess. XVI. 5-8.

Die übliche Definition, so wie sie in dem Werke von Salmon und in anderen gegeben wird, lautet: Jede Function der Coefficienten einer Form wird eine Invariante genannt, wenn, nachdem die Form linear transformirt ist, dieselbe Function der neuen Coefficienten gleich der „mit irgend einer Potenz der Transformationsdeterminante multiplicirten" alten Function ist, d. h. wenn man hat:

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = \Delta^{\omega}\varphi(a, b, c, \ldots).$$

Der Verfasser schlägt vor, die durch Gänsefüsschen hervorgehobenen Worte durch andere zu ersetzen, die weniger verlangen, nämlich „mit irgend einem nur von den Coefficienten im Transformationsschema abhängenden Factor multiplicirten"; zugleich soll die interessante Thatsache nachgewiesen werden, dass dieser Factor mit Notwendigkeit die besondere Form Δ^{ω} haben muss. Gewohnheitsmässig wird dieser Satz nämlich am Anfange stillschweigend angenommen, und es scheint seltsam, dass seine Feststellung und sein Beweis nicht den regelmässigen Eingang für den Gegenstand bildet, sodass auch gewissen indirecten Forschungsmethoden damit völlige Strenge beigemessen werden kann. Der Verfasser fügt einen Beweis des fraglichen Satzes bei.

Glr. (Lp.)

A. Capelli. Sopra la permutabilità delle operazioni invariantive. Napoli Rend. XXV. 134-141.

Aus den k Reihen von beliebig vielen homogenen Variablen $x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots; \ldots; u_1, u_2, \ldots$ lassen sich k^2 elementare invariante Operationssymbole von der Gestalt:

$$D_{p,q} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \cdots \qquad (p, q = x, y, \cdots, u)$$

zusammensetzen. Bezeichnen wir diese in beliebiger Aufeinanderfolge mit $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$, so lässt sich jede rationale und ganze Verbindung derselben in die Gestalt:

$$\varDelta = \Sigma A D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_{k^2}^{\alpha_{k^2}}$$

überführen, und es gilt betreffs dieses allgemeinen invarianten Operationssymboles der folgende Satz. Wenn das Operationssymbol $\varDelta$ vertauschbar ist gegenüber jedem anderen Operationssymbol derselben Art (also $\varDelta D_{p,q} = D_{p,q} \varDelta$ etc.), so ist dasselbe notwendig symmetrisch in Bezug auf jene k Variablenreihen.

Ht.

J. J. Sylvester. Sur une extension du théorème relatif au nombre d'invariants asyzygétiques d'un type donné à une classe de formes analogues. C. R. CII. 1430-1435.

Unter einer „Binariante der k^{ten} Art" versteht der Verfasser eine ganze, homogene und isobare Function der Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_j$, welche nach Ausführung der Operation:

$$a_0 \frac{\partial}{\partial a_k} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_{k+1}} + \cdots + a_{j-k} \frac{\partial}{\partial a_j}$$

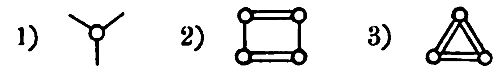
identisch verschwindet. Die Theorie der Binarianten erster Art ist mit derjenigen der Semiinvarianten einer binären Grundform im wesentlichen identisch. Einige bekannte Sätze über Semiinvarianten lassen sich auf Binarianten der zweiten Art oder sogenannte Transbinarianten verallgemeinern. So ist beispielsweise für ein gerades j die Zahl der Transbinarianten vom Gewichte w und dem Grade i genau gleich $(w : i, j) - (w-2 : i, j)$, sobald diese Differenz positiv ist, dagegen gleich Null im an-

deren Falle. Dabei bezeichnet $(w:i,j)$ die Zahl der Darstellungen von w als Summe von i Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \dots, j$. Auffallender Weise finden für ein ungerades j keine analogen Beziehungen statt. Die Theorie der Transbinarianten für ein gerades $j = 2\eta$ steht, wie man leicht einsieht, in engstem Zusammenhange mit derjenigen der simultanen Semiinvarianten zweier binären Formen von den Ordnungen η und $\eta-1$.

Ht.

A. Buchheim. On Clifford's theory of graphs. Lond. M. S. Proc. XVII. 80-106.

Die von Clifford begründete Methode zur graphischen Darstellung der invarianten Gebilde einer binären Grundform beruht auf einer symbolischen Schreibweise dieser Gebilde, welche mit der gewöhnlichen Symbolik von Clebsch im wesentlichen übereinstimmt. Um eine ungefähre Vorstellung von der in Rede stehenden graphischen Methode zu geben, seien hier die folgenden geometrischen Bilder (graphs) erklärt:



Das erste Bild stellt die kubische Grundform a_x^3 dar. Das zweite Bild bedeutet die Discriminante der kubischen Form. Den vier kleinen Kreisen entsprechen die Symbole a, b, c, d, und die Verbindungslinien zwischen denselben geben an, wie oft und in welcher Anordnung jene vier Symbole in Klammern zu je zweien vereinigt werden müssen, damit der symbolische Ausdruck $(ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$ zu stande kommt. Das dritte Bild stellt die kubische Invariante $(ab)^2(bc)^2(ca)^2$ einer biquadratischen Grundform dar. In solcher Weise werden die geometrischen Bilder sämtlicher Invarianten und Covarianten der Grundformen von der zweiten bis zur vierten Ordnung aufgestellt. Zum Schlusse werden einige allgemeinere Gesichtspunkte entwickelt. So ist beispielsweise der Zerlegungssatz von Clebsch eine Folge des Lemmas, dass jedes geometrische Bild auf eine Summe von einfachen Polygonen, d. h. von solchen Bildern zurückgeführt

werden kann, in welchen jeder Kreis höchstens mit zwei anderen Kreisen direct durch Striche verbunden erscheint.

Ht.

A. B. KEMPE. On the application of Clifford's graphs to ordinary binary quantics. Lond. M. S. Proc. XVII. 107-121.

Die Arbeit enthält Modificationen und Zusätze zu der im vorigen Referate (vergl. p. 93) besprochenen graphischen Methode von Clifford. Durch geeignete Deutung identischer Relationen zwischen den Symbolen wird ein wirkliches Rechnen mit den geometrischen Bildern der Invarianten ermöglicht. Als Anwendung giebt der Verfasser die graphischen Darstellungen für die sämtlichen 23 invarianten Formen des vollständigen Formensystems einer Grundform fünfter Ordnung. Ht.

J. HAMMOND. On perpetuants, with applications to the theory of finite quantics. Newcomb Am. J. VIII. 104-126.

Der Verfasser entwickelt in besonderen Fällen Ausdrücke für diejenige „numerische" erzeugende Function, deren Entwickelungscoefficienten angeben, wie viel Relationen (syzygies) mit vorgeschriebenen Gradzahlen zwischen den Perpetuanten, d. h. den irreduciblen Semiinvarianten einer binären Grundform statthaben. Ht.

R. RUBINI. Teoria delle forme in generale, e specialmente delle binarie. Parte prima. Esposizione dell' algoritmo fondamentale di questa teoria. Lecce. 304 S. 8°.

Referat von Battaglini in Bonc. Bull. XIX. 376-377. La.

F. MERTENS. Beweis, dass alle Invarianten und Covarianten eines Systems binärer Formen ganze Functionen einer endlichen Anzahl von Gebilden dieser Art sind. Kronecker J. C. 223-230.

Giebt es für ein System von binären Grundformen $f, f', f'', \ldots$ eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten, durch welche sich alle anderen Invarianten und Covarianten in ganzer und rationaler Weise ausdrücken lassen, so gilt, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, das Gleiche auch für dasjenige System von Grundformen, welches entsteht, wenn man den Formen $f, f', f'', \ldots$ noch eine Linearform p hinzufügt. Es wird nun durch Lösung einer diophantischen Gleichung bewiesen, dass es stets möglich ist, aus den Invarianten und Covarianten des Formensystems $f, f', f'', \ldots, p$ in ganzer und rationaler Weise ein endliches System von solchen besonderen Invarianten und Covarianten zusammenzusetzen, welche in den Coefficienten der Grundform f und in denjenigen der Linearform p von gleichem Grade sind und welche überdies insofern ein in sich abgeschlossenes System bilden, als durch dieselben eine jede Invariante oder Covariante von gleicher Eigenschaft ganz und rational dargestellt werden kann. Setzt man schliesslich für die Form f von der n^{ten} Ordnung das Product $qr \ldots s$ ihrer n Linearfactoren ein und vertauscht die Linearform p successive mit $q, r, \ldots, s$, so lässt sich durch geeignete Combination der entstehenden Bildungen für das Grundformensystem $f', f'', \ldots, p, q, r, \ldots, s$ ein vollständiger Bestand von solchen besonderen Invarianten und Covarianten ableiten, welche symmetrisch sind in Bezug auf die Coefficienten der $n+1$ Linearformen $p, q, r, \ldots, s$. In diesem Systeme haben wir nur die symmetrischen Functionen der Coefficienten von $p, q, r, \ldots, s$ durch die Coefficienten des Productes $g = pqr \ldots s$ zu ersetzen; es ergiebt sich dann ein vollständiger Bestand von Invarianten und Covarianten für das Formensystem $g, f', f'', \ldots,$ d. i. für ein Formensystem, welches entsteht, wenn man in dem ursprünglichen Formensystem an Stelle der Grundform f von der n^{ten} Ordnung eine Form g von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung einsetzt. Indem man nun von einem nur aus Linearformen bestehenden Grundformensysteme ausgeht, erkennt man in Obigem einen allgemeinen und von den Hülfsmitteln der Symbolik unabhängigen Beweis für den Gordan'schen Fundamentalsatz. Ht.

D. Hilbert. Ueber die notwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständige Potenz. Klein Ann. XXVII. 158-160.

Damit eine vorgelegte binäre Form $f = a_x^n = b_x^n = \cdots$ von der Ordnung $n = \mu\nu$ die vollständige μ^{te} Potenz einer Form φ von der ν^{ten} Ordnung sei, ist das identische Verschwinden einer gewissen Covariante C_ν der Form f notwendig und hinreichend. Zur Ermittelung dieser Covariante C_ν verhelfen die vom Verfasser in seiner Dissertation gefundenen Sätze über die Darstellung der invarianten Gebilde von binären Formen als Function der einseitigen Differentialquotienten letzterer. Das Verfahren liefert beispielsweise in den ersten Fällen bei allgemeiner Ordnung n die Ausdrücke:

$$C_1 = H = \tfrac{1}{2}(ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$
$$C_2 = T = (ab)^2(bc) a_x^{n-2} b_x^{n-3} c_x^{n-1},$$
$$C_3 = 3(2n-3)H^2-(n-2)Af^2,$$
$$C_4 = 4(3n-4)HT-(n-3)Bf^2,$$

worin:

$$A = \tfrac{1}{2}(ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4} \quad \text{und} \quad B = (ab)^4(ac) a_x^{n-5} b_x^{n-4} c_x^{n-1}$$

bedeutet. Ht.

W. J. C. Sharp. Solution of question 7528. Ed. Times. XLV. 43.

Aus der Identität

$$\frac{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})\dots(1-x^{n+\theta})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\theta)} \equiv \frac{(1-x^{\theta+1})(1-x^{\theta+2})\dots(1-x^{\theta+n})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)}$$

wird das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz erschlossen, dass an Covarianten irgend eines gegebenen Grades in x und y eine binäre Form n^{ten} Grades ebenso viele von der θ^{ten} Ordnung in den Coefficienten wie die Form θ^{ten} Grades von der n^{ten} Ordnung in den Coefficienten besitzt. Lp.

M. d'Ocagne. Théorème sur les formes binaires. C. R. CII. 916-917.

Der m^{te} Differentialquotient des Logarithmus einer Function a von einer Variablen ist nach Multiplication mit a^m für jedes die Einheit überschreitende m eine Semiinvariante (Covariantenquelle) der binären Form:

$$ax_1^n + \binom{n}{1} a' x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a'' x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a^{(n)} x_2^n.$$

(Vergl. das folgende Referat.) Ht.

M. d'Ocagne. Sur les sous-invariants des formes binaires. Brux. S. sc. X. B. 75-78.

J. Carnoy. Rapport. Brux. S. sc. X. A. 54-55.

Der Zähler der Ableitung beliebiger Ordnung vom Logarithmus von a_0 ist eine Subinvariante der Form

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-1} y^2 + \cdots,$$

worin a_1, a_2, a_3, ... die aufeinanderfolgenden Ableitungen von a_0 sind. (Vergl. das voranstehende Referat.) Mn.(Lp.)

R. Russell. On a theorem in higher algebra. Quart. J. XXI. 373-375.

Beweis des Cayley'schen Theorems: Sind u und v zwei binäre Formen gleichen Grades; R die Resultante von u und v; $S=0$ die Bedingung dafür, dass $u+\lambda v$ einen kubischen Factor besitzt; $T=0$ die Bedingung dafür, dass $u+\lambda v$ zwei quadratische Factoren besitzt, dann ist die Discriminante von $u+kv$, nach der Grösse k genommen, gleich RS^3T^2. No.

G. Battaglini. Intorno ad un' applicazione della teoria delle forme binarie quadratiche all' integrazione dell'equazione ellittica. Batt. G. XXIV. 128-140.

Die Abhandlung bildet die Entwickelung einer früheren Note

(Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 653—7), über welche an gehöriger Stelle (F. d. M. XVII. 1885. 421) referirt wurde. Wir verweisen auf diesen Bericht, wo sich der Gedankengang des Verfassers kurz skizzirt findet. Vi.

G. Pittarelli. Gli elementi immaginari nelle forme binarie cubiche. Nap. Rend. XXIV. 1885. 162-164.

Der Verfasser giebt eine einfache, reelle geometrische Construction für die Hesse'sche Covariante einer binären kubischen Form, wenn von den Wurzeln der letzteren zwei imaginär sind. Es steht dieselbe in nahem Zusammenhange mit Constructionen, die früher von Schröter und Battaglini angegeben sind. My.

G. Torelli. Alcune relazioni fra le forme invariantive di un sistema di binarie. Nap. Rend. XXV. 125-134.

Bekanntlich lässt sich das Quadrat der Functionaldeterminante zweier binären Formen als quadratische Function dieser beiden Formen ausdrücken. Die Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten führt zu dem folgenden allgemeineren Theoreme. Bilden wir für zwei Systeme von je r binären Formen beliebiger Ordnungen $u, v, \dots, t$ und $U, V, \dots, T$ beziehungsweise die beiden Determinanten ihrer $(r-1)^{\text{ten}}$ Derivirten, so ist das Product dieser Determinanten eine bilineare Function jener Formen, nämlich gleich der Determinante:

$$\begin{vmatrix} (u,U)_r & (u,V)_r & \dots & (u,T)_r & u \\ (v,U)_r & (v,V)_r & \dots & (v,T)_r & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (t,U)_r & (t,V)_r & \dots & (t,T)_r & t \\ U & V & \dots & T & 0 \end{vmatrix}.$$

An dieses Theorem knüpfen sich Folgerungen, auf Grund deren der Verfasser Relationen zwischen den Covarianten einer Form von beliebiger Ordnung und einer kubischen, beziehungsweise biquadratischen Form aufstellt. Ht.

F. HOFMANN. Zur Theorie der Invarianten. Schlömilch Z. XXXI. 369-371.

Die Note beweist mit Hülfe der Differentialgleichung der Invariante den bekannten Satz, wonach die Summe der numerischen Coefficienten für jede Invariante einer binären Grundform Null ist. Ht.

F. BRIOSCHI. Sulle proprietà di una classe di forme binarie. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 302-305.

Im Anschluss an eine frühere Mitteilung über die Entwickelung der Thetafunctionen zweier Variablen giebt der Verfasser in der gegenwärtigen Note eine Recursionsformel zur Berechnung derjenigen binären Formen gerader Ordnung, welche entstehen, wenn man in jener Entwickelung die Terme gleicher Ordnung zusammenfasst. Ht.

G. TORELLI. Teoremi sulle forme binarie cubiche e loro applicazione geometrica. Batt. G. XXIV. 270-279.

Zunächst wird ein einfaches Invariantenkriterium dafür aufgestellt, dass es in einem Büschel $f+\lambda\varphi$ von binären kubischen Formen eine solche giebt, die mit einer gegebenen solchen Form ψ zwei Wurzeln gemein hat. Ist das Kriterium erfüllt, so sind die beiden betreffenden Wurzeln die Wurzeln der Hesse'schen Form von der trilinearen Covariante dritten Grades der drei Formen f, φ, ψ. Dies wird geometrisch interpretirt, und daraus ein zweiter Beweis für das Gesagte abgeleitet. Referat über diese Arbeit auch F. d. M. XVII. 1885. 93. My.

F. MERTENS. Ueber die Invarianten dreier ternären quadratischen Formen. Wien. Ber. XCIII. 62-77.

Der Verfasser zeigt, dass jede Invariante dreier ternären quadratischen Formen rational und ganz durch gewisse 11 Fundamentalinvarianten ausgedrückt werden kann. Setzt man nämlich eine der drei Grundformen als Product zweier Linearformen

an, so verschwindet eine jener Fundamentalinvarianten, nämlich die Discriminante der zerfallenden Grundform, während die übrigen 10 Fundamentalinvarianten sich nunmehr mit Hülfe eines geeigneten Zerlegungsverfahrens als hinreichend erweisen, um eine jede Invariante des in der angegebenen Weise specialisirten Grundformensystems rational und ganz darzustellen. Die wiederholte Anwendung dieses Ergebnisses ermöglicht es, auch nach Weglassung jener einschränkenden Annahme den erwähnten Satz als richtig zu erkennen.

Auf eine ähnliche Weise gelingt es, die bereits durch S. Gundelfinger auf anderem Wege gefundene Thatsache zu bestätigen, dass jede Combinante des Grundformensystems rational und ganz durch gewisse zwei Combinanten vom zweiten und vierten Grade in den Coefficienten dargestellt werden kann. Zum Schlusse folgt als Beispiel die Berechnung der Resultante.

Ht.

C. Ciamberlini. Sul sistema di tre forme ternarie quadratiche. Batt. G. XXIV. 141-157.

Nach Anleitung der Gordan'schen Methoden, das vollständige System der Grundformen für zwei ternäre quadratische Formen aufzustellen, wird das Entsprechende für drei solche vom Verfasser durchgeführt. Zuvörderst ergiebt sich eine Tafel von 256 Formen. Durch die bekannte Anwendung von Identitäten gelingt eine Reduction des vollen Systems auf nur noch 127 Formen, wovon 36 simultane Bildungen von nur zwei resp. einer der ursprünglichen drei Formen sind. Der Verfasser vereinigt sie in einer Tabelle, die übersichtlich nach Gruppen eingeteilt ist.

Den Schluss bildet eine Zusammenstellung einfacher geometrischer Bedeutungen für das Verschwinden der angezeigten Formen.

My.

G. Maisano. Sui covarianti independenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria. Palermo Rend. I. 54-56.

Die kurze Note ergänzt einen Punkt einer Arbeit desselben Verfassers (Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degli invarianti e contravarianti di sesto grado, Batt. G. XIX. 1881, F. d. M. XIII. 110); sie gipfelt nämlich in dem Satze: Covarianten sechsten Grades einer biquadratischen ternären Form giebt es zwei und zwar von der sechsten Ordnung. La. (I.p.)

A. Voss. Ueber eine Eigenschaft der kubischen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen. Klein Ann. XXVII. 515-526.

Ist h die Hesse'sche Covariante der kubischen Form f von p homogenen Variablen, so lässt sich die Hesse'sche Covariante H von h in der Gestalt $Pf+Qh$ darstellen. Dieser bisher nur für $p=3$ und $p=4$ als gültig erkannte Satz wird in der gegenwärtigen Arbeit auf den Fall einer beliebigen Variablenzahl p ausgedehnt. Der Verfasser zeigt zunächst auf geometrischem und darnach auf rein algebraischem Wege, dass H für alle Variablenwerte verschwindet, welche f und h gleichzeitig zu Null machen. Der Beweis jenes Satzes beruht dann auf der Anwendung eines von M. Noether gegebenen Theorems über die allgemeinen Bedingungen für die Möglichkeit einer Darstellung von der in Rede stehenden Art. Das rein algebraische Verfahren führt zu einer Formel, welche gleichzeitig die wirkliche Berechnung der Formen P und Q vermittelt. Ht.

J. Hammond. The cubi-quadric system. Newcomb Am. J. VIII. 138-155.

Die Arbeit untersucht die Relationen (syzygies) zwischen den 15 invarianten Formen, welche das vollständige Formensystem einer quadratischen und einer kubischen Grundform bilden. Eine derartige Relation heisst irreducibel, wenn sie nicht aus anderen Relationen dadurch erhalten werden kann, dass

man diese mit ganzen Functionen der 15 Fundamentalformen multiplicirt und dann addirt. Der Verfasser giebt unter anderem ein System von 44 irreduciblen Relationen für das in Rede stehende Formensystem an. Als Untersuchungsmittel dient die sogenannte „reale" erzeugende Function, welche nicht nur wie die „numerische" erzeugende Function die gesuchten Anzahlen der invarianten Bildungen, sondern diese selbst zu berechnen gestattet. Ht.

G. Ricci. Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali. Brioschi Ann. (2) XIV. 1-11.

Verstehen wir unter $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ Functionen der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so heisst die über die Zahlen $r, s = 1, 2, \ldots, n$ ausgedehnte Summe: $\Sigma a_{rs} dx_r dx_s$ eine quadratische Differentialform jener n Variablen. Ein Differentialparameter k^{ter} Ordnung dieser Form ist jeder Ausdruck, welcher die Coefficienten a_{rs}, eine oder mehrere willkürliche Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ferner die $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, k^{\text{ten}}$ Differentialquotienten dieser sämtlichen Functionen enthält und seinen Wert nicht ändert, sobald man an Stelle der Coefficienten a_{rs} die Coefficienten der beliebig transformirten Differentialform und an Stelle der willkürlichen Functionen und ihrer Differentialquotienten die entsprechenden transformirten Grössen einsetzt. Enthält ein Differentialparameter keine willkürlichen Functionen, so heisst derselbe eine Differentialinvariante. Nach kurzer Darlegung der bereits bekannten Resultate über die Differentialparameter der Ordnungen 0 und 1 unterwirft der Verfasser die Differentialparameter der zweiten und dritten Ordnung einer eingehenderen Behandlung, durch welche er zeigt, dass die Bestimmung derselben sich auf die Ermittelung der gewöhnlichen Invarianten eines gewissen Systems von algebraischen Formen zurückführen lässt. Gleichzeitig folgt die Unmöglichkeit der Existenz von Differentialinvarianten für quadratische Differentialformen von der Klasse Null (vergl. F. d. M. XVI. 1884, p. 230). Ht.

F. Mertens. Ueber die covarianten Bildungen der quadratischen Formen. Krakau. Denkschr. XII. (Polnisch.)

Der Verfasser entwickelt hier ausführlich die allgemeine Theorie der invarianten Bildungen quadratischer Formen mit n Veränderlichen, ohne von der symbolischen Bezeichnung Gebrauch zu machen. In der Einleitung werden die Definitionen der zu der gegebenen Form

$$\begin{aligned} f_x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + & \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ & + 2_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & \qquad + \cdots \\ & \qquad\qquad + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

gehörigen Discriminante, der Contraform, der Contravariante, Covariante und der Zwischenform gegeben. Als Grundlage der ganzen Untersuchung dient die Lösung der Aufgabe: „Welche Gestalt muss die allgemeinste Function Θ der Elemente (Coefficienten) der gegebenen Form f_x und der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ besitzen, damit sie der Identität

$$\Theta z_n^r = L_1 f_{1z} + L_2 f_{2z} + \cdots + L_n f_{nz}$$

genüge leiste. Es bedeuten hier: r eine ganze positive Zahl; — $L_1, L_2, \ldots, L_n$ ganze Functionen der Elemente der Form f_x und der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots, z_n$;

$$f_{kz} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_z}{\partial z_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Lösung dieser Aufgabe führt zu den Kriterien der algebraischen Teilbarkeit einer ganzen Function der Elemente der gegebenen Form f_x durch ihre Discriminante.

Es werden zuerst die zu einer quadratischen Form f_x gehörigen invarianten Bildungen untersucht, ihre Gestalt bestimmt und einige Anwendungen auf die Geometrie gezeigt; dann wendet sich der Verfasser zur Untersuchung der covarianten Bildungen zweier Formen f_x und f'_x. Nachdem der Begriff und der Ausdruck der sogenannten „Fundamentalinvarianten" und der „fundamentalen conjugirten Formen" aufgestellt ist, nachdem noch zwei neue invariante Formen von ungeraden Exponenten eingeführt sind, schreitet der Verfasser zur Darstellung aller cova-

rianten Bildungen der gegebenen Formen mittels der oben genannten Fundamentalbildungen. Im letzten Teile seiner Arbeit zeigt der Verfasser den Gebrauch einer speciellen Substitution, mittels welcher die gegebene Form in eine andere transformirt wird, deren Elemente ganze Functionen der Fundamentalbildungen sind. Dn.

Benoît. Note sur la décomposition d'une forme quadratique à m variables en une somme de $m-n$ carrés. Nouv. Ann. (3) V. 30-36.

Damit eine quadratische Form von m Variablen als Summe von $m-n$ Quadraten darstellbar sei, müssen alle $(m-n+1)$-reihigen Unterdeterminanten ihrer Discriminante verschwinden. Der Verfasser zeigt, wie man aus den so erhaltenen überzähligen Bedingungsgleichungen gewisse $\frac{1}{2}n(n+1)$ von der Beschaffenheit auswählen kann, dass die übrigen eine Folge derselben sind. Ht.

---

de Presle. Au sujet de la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires et indépendantes. S. M. F. Bull. XIV. 98-100.

Ein Satz über eine n-reihige Unterdeterminante der Discriminante einer quadratischen, in n Quadrate zerlegbaren Form mit $m(>n)$ Variablen. Ht.

R. Harley. On the explicit form of the complete cubic differential resolvent. Brit. Ass. Rep. 439-443.

Dieser Artikel giebt Nachträge zu Arbeiten über die Theorie der Differentialresolventen, die in den Brit. Ass. Rep. für 1862, 1865, 1866, 1873 und 1878 entwickelt ist. Er enthält neben einigen Einzelheiten der Rechnung das Resultat der Bestimmung der vollständigen kubischen Differentialresolvente durch Herrn Harley. Gbs. (Lp.)

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

C. SCHMIDT. Zur Theorie der Elimination. Schlömilch Z. XXXI. 214-222.

Herr Schmidt erhebt gegen die gebräuchliche Schlussfolgerung, aus der Lösbarkeit eines Systems linearer Gleichungen in einem speciellen Falle auf diejenige im allgemeinen Falle zu schliessen, wie es z. B. von Serret bei der Bézout'schen Eliminationstheorie gethan wird, einen ganz interessanten Einwurf. Er beseitigt denselben aber nur in dem behandelten Falle, während leicht und ganz innerhalb des Gebietes der Systeme linearer Gleichungen gezeigt werden konnte, dass jener logisch mögliche Einwand sich nie verwirklichen kann. No.

F. MERTENS. Ueber die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n Formen mit n Veränderlichen. Wien. Ber. XCIII. 527-566.

Zum Zwecke einer systematischen Untersuchung der Resultante stellt sich der Verfasser die Aufgabe, alle diejenigen ganzen Functionen Θ der Coefficienten von n Formen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ der n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu bestimmen, welche, ohne die letzteren zu enthalten, einer Identität von der Gestalt:

$$\Theta x_n^r = P_1 F_1 + P_2 F_2 + \cdots + P_n F_n$$

genügen, wo $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ganze Functionen der Coefficienten jener Formen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ und der Variablen bezeichnen. Nach ausführlicher Behandlung des Falles $n = 2$ gelingt es, die hierbei gefundenen Eigenschaften der Function Θ mit Hülfe des Schlusses von n auf $n+1$ Formen auch auf den allgemeinen Fall auszudehnen. Auf diese Weise entspringt die folgende von dem Begriff der Elimination unabhängige Definition der Resultante. Es giebt immer einen Ausdruck R von der oben bezeich-

neten Beschaffenheit, welcher allgemein in Bezug auf die Coefficienten der Form F_i homogen und vom Grade $\frac{p}{m_i}$ ist und das Product $a_1^{\frac{p}{m_1}} a_2^{\frac{p}{m_2}} \dots a_n^{\frac{p}{m_n}}$ mit dem Zahlencoefficienten 1 enthält. Dabei bedeutet m_i die Ordnung der Form F_i, p das Product dieser sämtlichen n Ordnungszahlen und a_i den Coefficienten von $x_i^{m_i}$ in der Form F_i. Jeder andere der obigen Identität genügende Ausdruck Θ ist durch R teilbar. Der Ausdruck R ist daher eindeutig bestimmt und heisst die Resultante der n Formen $F_1, F_2, \dots, F_n$.

Von den weiteren Sätzen über die Resultante, welche der Verfasser ableitet, sei beispielsweise der folgende erwähnt. Bezeichnen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ Formen der m^{ten} Ordnung in den Variablen $X_1, X_2, \dots, X_n$, so gehen die Formen $F_1, F_2, \dots, F_n$ nach Substitution der $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ an Stelle von $x_1, x_2, \dots, x_n$ in die Formen $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ der Variablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ über. Sind dann R, Δ, S beziehungsweise die Resultanten der Formen $F_1, F_2, \dots, F_n$, der Formen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ und $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$, so besteht die Relation $S = R^{m^{n-1}} \Delta^p$. Aus diesem Satze erkennt man die Invarianteneigenschaft und bei übereinstimmender Ordnung der Grundformen auch die Combinanteneigenschaft der Resultante. Ht.

Fr. Hofmann. Eine einfache Darstellung der Resultante von zwei quadratischen Formen. Hoppe Arch. (2) IV. 325-327.

Die Resultante wird als Bedingungsgleichung dafür aufgestellt, dass zwei Gerade und ein Kegelschnitt einen Punkt gemeinsam haben. No.

H. Laurent. Mémoires sur les équivalences algébriques et l'élimination. Nouv. Ann. (3) V. 432-447, 456-460.

Die Theorie hat durch Einführung gewisser „Divisoren“

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ der Grade $m_1, m_2, \ldots, m_n$ und durch die Definition der Aequivalenz von F und f vermittelst der Gleichung

$$(1) \qquad F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_n\varphi_n,$$

wobei auch die λ Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bedeuten wie die φ, f, F einige Aehnlichkeit mit den Kronecker'schen „Modulsystemen“, doch fehlt ihr die Allgemeinheit und die principielle Bedeutung der letzteren, wie z. B. schon daraus erhellt, dass die $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ genau $\mu = m_1 . m_2 \ldots m_n$ verschiedene und endliche Lösungen haben sollen, deren Determinante also von Null verschieden ist. Unter einer „reducirten Form“ wird eine solche verstanden, die nicht durch $x_1^{m_1}, x_2^{m_2}, \ldots$ teilbar ist. In (1) können die λ so bestimmt werden, dass f die Reducirte von F wird. Bedeuten A, B zwei Reducirte, dann wird die Aufgabe gelöst, X durch $AX \equiv B$ zu bestimmen, und dadurch der Quotient $B:A$ definirt. Dabei darf A nicht mit den φ gleichzeitig verschwinden; dies führt auf die Bestimmung der Resultanten von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, A$, welche sich in dem besonderen Falle $n = 1$ recht einfach gestaltet.

Im zweiten Abschnitte wird die Aequivalenz $X^\mu \equiv 1$ betrachtet, in der X ein reducirtes Polynom bedeutet; jedes andere Polynom kann auf die Form $\sum\limits_{\lambda=0}^{\mu-1} A_\lambda x^\lambda$ gebracht werden.

Man erkennt, wie diese Untersuchungen gegenüber den Kronecker'schen an der Oberfläche bleiben, ohne die hohe Wichtigkeit der Modulsysteme zu erkennen. No.

G. Frobenius. Neuer Beweis des Sylow'schen Satzes.
Kronecker J. C. 179-181.

Herr Frobenius giebt für den Satz, dass, wenn die Ordnung einer Gruppe durch die Potenz p^ν einer Primzahl p teilbar ist, die Gruppe selbst eine Untergruppe der Ordnung p^ν enthalte, einen überaus einfachen, elementaren Beweis, welcher sich auf Induction stützt. Abgesehen von einem Satze über Gruppen mit vertauschbaren Substitutionen wird alles Notwendige auf zwei Seiten erledigt. No.

L. Autonne. Recherches sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact. C. R. CII. 313-316.

L. Autonne. Sur les groupes irréductibles d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. C. R. CIII. 1176-1178.

Die Substitutionen

$$|x_i, u_i \quad \Sigma a_{ij} x_j, \Sigma b_{ij} u_j|, \quad |x_i, u_i \quad \Sigma c_{ij} u_j, \Sigma d_{ij} x_j|$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

heissen Contact-Substitutionen, weil für sie, wenn die x als Punkt-, die u als Linien-Coordinaten aufgefasst werden, der Contact entsprechender Figuren gewahrt bleibt. Diese Substitutionen werden durch Combination mit einem $\tau = |x, u \quad u, x|$ auf lineare zurückgeführt.

In der zweiten Note werden diejenigen Substitutionen behandelt, welche x_i, u_i in quadratische Functionen beider Variablen überleiten, und es werden über derartige irreductible Gruppen einige Theoreme abgeleitet. No.

A. Kneser. Die Monodromiegruppe einer algebraischen Gleichung bei linearen Transformationen der Variablen. Klein Ann. XXVIII. 125-132.

Der Herr Verfasser hatte in seiner Dissertation (vgl. F. d. M. XVI. 62) gezeigt, dass wenn $F(s, z) = 0$ eine algebraische Gleichung ist, $F(as + bz, cs + dz) = 0$ die symmetrische Gruppe als Monodromiegruppe besitzt. Der Satz wurde dort durch functionentheoretische Schlüsse, hier wird er auf algebraischem Wege abgeleitet. Unter a, b, c, d sind willkürliche Constante zu verstehen, die der einzigen Beschränkung unterworfen sind, dass $c : d$ eine endliche Anzahl bestimmter Werte, darunter den Wert Null vermeiden muss. No.

G. FRATTINI. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni e ad un teorema d'aritmetica. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 17-19.

Das Referat befindet sich bereits im vorigen Bande S. 97 bis 98. No.

FR. HOFMANN. Einige Beiträge zur Theorie der allgemeinen rationalen quadratischen Transformationen. Schlömilch Z. XXXI. 283-295.

Die Transformationen

$$\varrho x_1 = \varphi_1(y_1 y_2 y_3), \quad \varrho x_2 = \varphi_2(y_1 y_2 y_3), \quad \varrho x_3 = \varphi_3(y_1 y_2 y_3),$$

bei welcher die φ homogen geschriebene Gleichungen von Kegelschnitten sind, welche drei Punkte gemeinsam haben, werden in einfacher Art arithmetisch behandelt, und so die bekannten Resultate abgeleitet. Die Umkehrung wird gegeben; eine Methode zur Angabe von Kegelschnittgleichungen bei drei gemeinsamen Punkten derselben mitgeteilt und deren Tragweite untersucht. No.

C. WELTZIEN. Zur Theorie der homogenen linearen Substitutionen. Berl. Pr. Friedr. Werd. Oberrealsch. 20 S. 4°.

Bei den orthogonalen Substitutionen von drei Variablen treten die Ausdrücke $\sum\limits_\lambda c_{\alpha\lambda} c_{\beta\lambda}$ sowie $\sum\limits_\lambda c_{\lambda\alpha} c_{\lambda\beta}$ für $\alpha, \beta, \lambda = 1, 2, 3$ auf; die Werte derselben sind bekanntlich $\varepsilon_{\alpha,\beta}$. Im allgemeinen Falle homogener linearer Substitutionen werden die Beziehungen dieser beiden Grössenreihen ergründet. — Die Coordinatenaxen zweier rechtwinkligen Systeme desselben Anfangspunktes liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung; es wird untersucht, unter welchen Bedingungen dieser Satz auch für beliebige homogene lineare Substitutionen gilt. — Die erstere der beiden Untersuchungen wird endlich auch für den Fall von vier Variablen erledigt. No.

W. Veltmann. Auflösung linearer Gleichungen. Schlömilch Z. XXXI. 257-272.

Das gegebene Gleichungssystem wird in ein sogenanntes Dreieckssystem

$$G_i \equiv \alpha_{i,i}x_i + \alpha_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_{i,n}x_n + \beta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

verwandelt, welches dem gegebenen in sofern äquivalent ist, als

$$\sum_{k=1}^{i} \varrho_{ki} G_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gleich der k^{ten} Gleichung des gegebenen Systems wird. No.

G. Frattini. Estensione ed inversione d'un teorema d'aritmetica. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 132-135.

Kann das System linearer Functionen

$$\sum_{x} a_{x\lambda} x_x \qquad (x = 1, \ldots, n; \ \lambda = 1, \ldots, m)$$

ein beliebiges System $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ganzer Zahlen mod. α, mod. $\beta, \ldots$, mod. ν darstellen, so soll dieses System (S) „conform" zu $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ heissen. Versteht man unter $\alpha', \beta', \ldots, \nu'$ die Producte der einfachen Primfactoren von $\alpha, \beta, \ldots, \nu$ und reducirt man die Coefficienten von (S) mod. α', mod. $\beta', \ldots$, so entsteht ein neues zu $(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ conformes System; und $\alpha', \beta', \ldots, \nu'$ bildet umgekehrt das einzige System dieser Eigenschaft. No.

Th. Muir. A supplementary list of writings on determinants. Quart. J. XXI. 299-320.

Herr Muir hat im Quart. J. XVIII. 110—149 (1881) eine Liste der Schriften über Determinanten veröffentlicht; dieselbe wird hier vervollständigt und bis zum Jahre 1885 incl. fortgeführt. Lp.

Th. Muir. The theory of determinants in the historical order of its development. Edinb. Proc. XIII. 547-590.

Teil I. Determinanten im allgemeinen (1693—1779). Der Verfasser bezieht sich auf seine „Liste der Schriften über Determinanten“ (Quart. J. XVIII. 1881. 110—149), welche 489 in chronologischer Folge von 1693 bis 1880 geordnete Nummern enthält, an denen er seit ihrer Veröffentlichung stetig gearbeitet hat, und er beabsichtigt nunmehr, das gesammelte Material zur Abfassung einer ins Einzelne gehenden Geschichte des Gegenstandes zu verwenden. Es liegt nicht im Plane, eine zusammenhängende Geschichte der Determinanten als ein Ganzes zu geben, sondern die Geschichte jedes der Abschnitte einzeln zu liefern, in welche der Gegenstand gesondert ist, nämlich zuerst von Determinanten im allgemeinen zu handeln, danach in gehöriger Folge von den verschiedenen besonderen Formen.

Der vorliegende Teil enthält eingehende und sorgfältige Besprechungen (nebst kritischen Bemerkungen) früher Schriften: Leibniz (Brief vom 28. April 1693 an De L'Hôpital), Cramer, Vandermonde, Laplace und Lagrange. Cly. (Lp.)

Th. Muir. An overlooked discoverer in the theory of determinants. Phil. Mag. (5) XVIII. 416-427. (1884).

Der bezügliche Entdecker ist Ferdinand Schweins (geb. zu Fürstenberg, Paderborn, 1780; Professor in Heidelberg von 1811 bis 1856), und seine Forschungen sind wiedergegeben in seiner „Theorie der Differenzen und Differenziale“ (1825) unter dem Titel „Producte mit Versetzungen“. Eine Darstellung der von Schweins erreichten Ergebnisse und eine Angabe der Punkte, in welchen er Resultate vorweggenommen hat, die andere Forscher erhalten haben, bilden den Gegenstand der Arbeit des Herrn Muir. (Hiernach ist die Litteraturangabe von F. d. M. XVII. 105 zu berichtigen.) Gbs. (Lp.)

P. Mansion. Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig. B. G. Teubner. XXIV u. 56 S. 8°.

Die Seiten 1—49 bilden nur eine Titelausgabe; doch sind die Einleitung (S. VII—XXIV) und der Nachtrag (S. 50—56) neu. Die Einleitung giebt für den Anfänger eine ganz elementare Darstellung der Grundeigenschaften der ein- und zweireihigen Determinanten. Der Nachtrag enthält: 1) Die Besprechung der linearen Gleichungen in den Ausnahmefällen, 2) den Beweis der Grundeigenschaften der Nulldeterminanten, 3) eine strenge Darstellung der dialytischen Eliminationsmethode, in welcher sogar der directe Fundamentalsatz aufgestellt ist ohne Zuhülfenahme des Theorems, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel hat. Mn. (Lp.)

H. Hanus. An elementary treatise on the theory of determinants. Boston. Ginn and Co.

Das Werk ist in der Art der Text-Bücher geschrieben; es giebt eine klare und vollständig geordnete Einleitung in die Theorie und die Anwendung der Determinanten; die letztere ist hauptsächlich nach der Seite der Algebra hin durchgeführt.

No.

A. Sickenberger. Die Determinanten in genetischer Behandlung. Pr. (München. Th. Ackermann.)

Die vorliegende Arbeit soll nach der in einem kurzen Vorwort ausgesprochenen Absicht des Verfassers als kleine „methodische Monographie“ angesehen werden. Die gewählte Methode ist „analytisch genetisch“, wird aber hier strenger durchgeführt, als in anderen bekannten Elementarbüchern. Dabei ist besonderer Wert darauf gelegt, nicht nur die Anerkennung der fraglichen Sätze formal zu erzwingen, sondern eine wirkliche Einsicht in ihre innnere Notwendigkeit zu geben. — Bei der Auflösung eines Systems zweier linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten entsteht aus dem quadratischen Schema zweiten Grades die Determinante zweiten Grades, die nun zunächst ausführlich behandelt wird. — In ganz ähnlichem Aufbau ist der

II. Abschnitt den Determinanten dritten Grades gewidmet. Hier wird auch der Multiplicationssatz für den zweiten Grad nachgeholt und auf den dritten Grad übertragen. — Der dritte und letzte Abschnitt (S. 51—80) geht nun zu den Determinanten n^{ten} Grades über, deren Haupteigenschaften durch den Schluss von n auf $n+1$ aus den vorher erkannten Specialfällen gefolgert werden. Hierbei wird der Begriff der Unterdeterminante zu dem der r^{ten} Unterdeterminante erweitert, die ihrerseits mit der ursprünglichen Determinante n^{ten} Grades unter der Bezeichnung „correspondirende Determinanten" zusammengefasst wird. Den Schluss macht die Behandlung eines Systems linearer Gleichungen. — Die Brauchbarkeit des Büchleins (ein „zweiter Abdruck" des Programms erschien München 1887 bei Ackermann) wird sehr durch die 100 Uebungsaufgaben erhöht, mit denen es durchsetzt ist, und in die auch manches aus der Theorie verwiesen ist, wie z. B. der Begriff und die Haupteigenschaft der adjungirten Determinanten. H. S.

K. Hattendorff. Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Zweite Ausgabe. Hannover. Schmorl.

A. de Presle. Multiplication de deux déterminants de même degré. S. M. F. Bull. XIV. 157-158.

Einfacher Beweis der Multiplicationsregel für zwei Determinanten gleichen Grades. No.

G. Fouret. Sur un mode de transformation des déterminants. S. M. F. Bull. XIV. 146-151.

Der Wert einer Determinante wird mit $2^{n-1}(2-n)$ multiplicirt, wenn man in n Parallelreihen derselben von den Elementen einer jeden Reihe die Summe der entsprechenden Elemente der $(n-1)$ anderen Reihen subtrahirt. No.

T. C. SIMMONS. An application of determinants to the solution of certain types of simultaneous equations. Ed. Times. XLIV. 136-143.

Eine Reihe von Beispielen über Gleichungen höheren Grades mit mehreren Unbekannten, bei denen eine resolvirende Endgleichung aus einer Determinante gefunden wird. Zur Erläuterung diene das folgende Beispiel. Gegeben seien die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax^n + by^n + cz^n &= kx^{n+m}y^m z^m, \\ a'x^n + b'y^n + c'z^n &= k'y^{n+m}x^m z^m, \\ a''x^n + b''y^n + c''z^n &= k''y^{n+m}x^m y^m. \end{aligned}$$

Setzt man $x^m y^m z^m = p$, so ist die fragliche Endgleichung:

$$\begin{vmatrix} a-kp & b & c \\ a' & b'-kp & c' \\ a'' & b'' & c''-kp \end{vmatrix} = 0.$$

Der Verfasser zählt 25 Typen von Gleichungen auf, bei denen dieses Verfahren anwendbar ist; er irrt sich wohl aber in der Meinung, diese Anwendung der Determinanten sei bisher nicht beachtet worden. Lp.

R. LACHLAN. Note on a class of algebraical identities. Mess. XVI. 21-22.

Die n Variabeln $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mögen das System von Gleichungen befriedigen:

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma ax = 0, \quad \Sigma a^2 x = 0, \quad \dots, \quad \Sigma a^{n-3}x = 0,$$

wo $\Sigma a^p x$ für $a_1^p x_1 + a_2^p x_2 + \dots + a_n^p x_n$ gesetzt ist. Bezeichnet man ferner das Product $(a_r - a_1)(a_r - a_2)\dots(a_r - a_n)$ mit A_r, so ist

$$\begin{aligned} \Sigma A^p a^q x^{p+1} &= 0, \quad \text{wenn} \quad p+q < n-2, \\ &= (\Sigma a^{n-2}x)^{p+1}, \quad \text{wenn} \quad p+q = n-2. \end{aligned}$$

Glr. (Lp.)

A. BUCHHEIM. An extension of a theorem of Professor Sylvester's relating to matrices. Phil. Mag. (5) XXII. 173-174.

Der bezügliche Sylvester'sche Satz lautet: Ist m eine Matrize von der Ordnung n, und sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ihre latenten Wurzeln, so ist, wenn Φ eine beliebige Function bezeichnet:

$$\Phi(m) = \Sigma \frac{(m-\lambda_2)(m-\lambda_3)\ldots(m-\lambda_n)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)} \Phi(\lambda_1).$$

Dieser Satz gilt, so lange die latenten Wurzeln ungleich sind. Im vorliegenden Artikel wird er auf Matrizen ausgedehnt, bei denen unter den latenten Wurzeln Gleichheiten stattfinden.

Gbs. (Lp.)

W. W. Johnson. On a geometrical representation of alternants of the third order and of their quotients when divided by $A(0, 1, 2)$. Quart. J. XXI. 217-224.

Der Ausdruck:

$$A(p, q, \ldots, t) = \begin{vmatrix} a^p & a^q & \ldots & a^t \\ b^p & b^q & \ldots & b^t \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l^p & l^q & \ldots & l^t \end{vmatrix},$$

in welchem $p, q, \ldots, t$ positive ganze Zahlen bedeuten, heisst eine Alternante der Grössen $a, b, \ldots, l$. Bezeichnet $H_{m,n}$ die Summe der Potenzen und Producte dreier Grössen a, b, c vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade unter Ausschliessung aller die Zahl m überschreitenden Exponenten, so ist:

$$A(0, p, q) = A(0, 1, 2) H_{q-2,p-1} + abcA(0, p-1, q-2).$$

Diese Recursionsformel beweist der Verfasser mit Hülfe geometrischer Anschauung, indem er die Exponenten der auftretenden Potenzen von a, b, c als Coordinaten zur Construction von Punktsystemen in der Ebene verwendet.

Ht.

A. H. Anglin. On certain theorems mainly connected with alternants. Edinb. Proc. XIII. 693-698.

Der Hauptpunkt besteht in einer Verallgemeinerung des Satzes $h'_n = h_n - ah_{n-1}$, wo h_n die Summe homogener Producte vom Grade n unter $a, b, c, \ldots, l$ und h'_n die entsprechende

Summe für $b, c, \ldots, l$ bedeutet. Man hat z. B.

$$\begin{vmatrix} h'_{p+1} & h'_{p+2} \\ h'_{q+1} & h'_{q+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ h_p & h_{p+1} & h_{p+2} \\ h_q & h_{q+1} & h_{q+2} \end{vmatrix}$$

und ähnlich für eine Determinante von beliebiger Ordnung. Der Zusammenhang mit der Theorie der Alternanten entsteht aus der Thatsache, dass jedes h der Quotient einer Alternante durch die einfachste Alternante $|a^0 b^1 c^2 d^3 \ldots|$ oder das Differenzenproduct der $a, b, c, d, \ldots$ ist. Cly. (Lp.)

J. J. Sylvester, Th. Muir, S. Sircom. Solution of questions 8275, 8321, 8394. Ed. Times. XLV. 85-86.

Es ist

$$\begin{vmatrix} \lambda + \alpha a + \alpha' a' & \alpha b + \alpha' b' & \alpha c + \alpha' c' & \ldots \\ \beta a + \beta' a' & \lambda + \beta b + \beta' b' & \beta c + \beta' c' & \ldots \\ \gamma a + \gamma' a' & \gamma b + \gamma' b' & \lambda + \gamma c + \gamma' c' & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n-2}\{\lambda^2 + \lambda(A+B) + AB - CD\},$$

wenn n die Ordnung der Determinante bedeutet, ferner:

$$A = (a, b, c, \ldots \between \alpha, \beta, \gamma, \ldots), \quad B = (\alpha, \beta, \gamma, \ldots \between a', b', c', \ldots),$$
$$C = (a, b, c, \ldots \between \alpha', \beta', \gamma', \ldots), \quad D = (a', b', c', \ldots \between \alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Ist $A = s = B$ und C oder $D = 0$, so wird das Resultat $\lambda^{n-2}(\lambda + s)^2$. Lp.

F. J. Studnička. Eine neue Anwendung der Kettenbruchdeterminanten. Prag. Ber. 3-6.

Der Verfasser geht von der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

aus, in der $a_1 < 2\sqrt{a_2}$, d. h. complexe Wurzeln x_1, x_2 vorausgesetzt werden, und benutzt die bekannte Relation:

$$x_1^n + x_2^n = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

zum Beweise folgender goniometrischen Formeln, welche für alle ganzzahligen n Giltigkeit haben:

$$\cos n\varrho = \begin{vmatrix} \cos\varrho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\varrho & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varrho & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varrho \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=0} (-1)^k 2^{n-2k-1} \cdot \frac{n}{k} \cdot (n-k-1)_{k-1} \cos^{n-2k}\varrho.$$

Diese Summenformel, welche übrigens in der Abhandlung zweimal falsch gedruckt ist, findet sich schon in Euler's Introductio, während die Determinanten-Darstellung unmittelbar aus der Gleichung:

$$\cos(n-1)\varrho + \cos(n+1)\varrho = 2\cos n\varrho \cos\varrho$$

erschlossen werden kann. R. M.

H. Poincaré. Sur les déterminants d'ordre infini. S. M. F. Bull. XIV. 77-90.

Herr Hill, Astronom, hatte die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf eine besondere Art behandelt.

Ist eine solche auf die Form gebracht:

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \vartheta w = 0,$$

so denke man sich ϑ als Function von t in der Form gegeben:

$$\vartheta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \vartheta_n e^{nit} \quad (i = \sqrt{-1},\ \vartheta_n = \vartheta_{-n}).$$

Dann erhält man zwei unabhängige particuläre Integrale (und

damit die allgemeine Lösung) der gegebenen Gleichung durch die Formeln:

$$w_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{(n+c)it}, \quad w_2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b'_n e^{-(n+c)it}.$$

Hier sind c und die b_n passend gewählte Constante (b'_n ist die zu b_n conjugirte Grösse). Die Reihe für w_1 muss zunächst convergiren.

Soll nun w_1 der Differentialgleichung genügen, so führt dies auf die Relationen:

$$\sum_p \vartheta_{n-p} b_p - (n+c)^2 b_n = 0 \quad \left(\begin{matrix} p = -\infty \text{ bis } +\infty \\ n = -\infty \text{ bis } +\infty \end{matrix}\right),$$

d. h. auf unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Herr Hill hatte diese Gleichungen unbedenklich nach der gewöhnlichen Methode behandelt, indem er zuvörderst für n, p endliche Zahlen nahm und dann zu den Grenzwerten der so erhaltenen Ausdrücke überging.

Um die Legitimität dieses Verfahrens zu prüfen, legte sich der Verfasser die allgemeine Frage vor, wann eine unendliche Reihe von absolut convergenten und verschwindenden Summen, die nach den nämlichen linearen Unbekannten fortschreiten, nach letzteren aufgelöst werden könne.

Seine Methode ist eine Art Variation von Constanten. Sind nämlich die Unbekannten bezeichnet mit A_i ($i = 1, 2, \ldots, \infty$), und giebt es ein particuläres Lösungssystem

$$A_i = B_i,$$

so frage man: Wie lassen sich die Werte der Factoren h_i bestimmen, sodass auch

$$A_i = h_i B_i$$

Lösungen repräsentiren?

Es zeigt sich, dass man, solange die h unter gewissen Grenzen bleibende Constante sind, in der That lauter Lösungen gewinnt, und wenn auch nicht bewiesen werden kann, dass damit alle Lösungen erhalten werden, so sind es doch für die Anwendungen hinreichend allgemeine Lösungen.

Die ursprüngliche Frage nach der Erfüllung gewisser Gleich-

heiten wird so zurückgeführt auf die gewisser Ungleichheiten. Der Beweis stützt sich auf zwei bekannte Theoreme von Weierstrass und Mittag-Leffler, nach denen man eine ganze, resp. meromorphe Function construiren kann, die an unendlich vielen vorgegebenen Stellen und nur an diesen Null, resp. mit vorgegebenen Residuen unendlich wird.

Die Coefficienten der gegebenen Gleichungen müssen gewisse Bedingungen erfüllen, wenn überhaupt Lösungen existiren sollen.

Der algebraische Teil des Beweises beschäftigt sich mit dem Nachweis, dass die Determinante, die man zunächst aus einer endlichen Zahl n von verticalen und horizontalen Coefficienten bildet, stets unter einer gewissen Grenze bleibt, auch wenn n beliebig wächst, und dass diese Eigenschaft der Determinante sich erhält, auch wenn eine gewisse Reihe ihrer Elemente gleich Null gesetzt wird.

In dem von Herrn Hill untersuchten Falle sind die erforderlichen Bedingungen zur Auflösbarkeit der Gleichungen, sowie zur Ausführbarkeit der nötigen Grenzprocesse thatsächlich erfüllt.

Eine frühere Arbeit von Herrn Kötteritzsch, die einen Teil der vom Verfasser gewonnenen Resultate enthält, ist offenbar dem Verfasser unbekannt geblieben. My.

P. Stassano. Sulle funzioni isobariche. Batt. G. XXIV. 57-93.

Ist

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m = g,$$
$$1 . \varepsilon_1 + 2 . \varepsilon_2 + \cdots + m\varepsilon_m = n,$$

so heissen die Functionen

$$V_n = \Sigma \psi(g) a_1^{\varepsilon_1} . a_2^{\varepsilon_2} \ldots a_m^{\varepsilon_m}.$$

isobarische Functionen vom Gewichte n und vom Grade g. Es werden die Beziehungen der isobarischen Functionen zu den symmetrischen, vier verschiedene Darstellungen der V_n, ihre Eigenschaften, ihre Beziehungen zu den Bernoulli'schen Func-

tionen entwickelt. Ferner Regeln zur Berechnung derselben, Specialfälle, zahlentheoretische Anmerkungen. Sn.

P. A. MacMahon. The law of symmetry and other theorems in symmetric functions. Quart. J. XXII. 74-81.

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ einer Gleichung werden als Functionen von

$$H_1 = \Sigma x_\alpha, \quad H_2 = \Sigma x_\alpha x_\beta, \quad H_3 = \Sigma x_\alpha x_\beta x_\gamma, \quad \dots$$
$$(\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n)$$

aufgefasst; es wird gezeigt, wie jene Functionen sich durch die H darstellen lassen; und ein dem Cayley'schen Symmetrie-Gesetz ähnliches wird abgeleitet. No.

E. Cesaro. Remarque sur une formule de Newton. Mathesis VI. 172-174.

Es seien c_i und s_i bez. die Summen der Producte zu je i und der i^{ten} Potenzen aus den Elementen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Dann ist

$$dc_i = c_{i-1}ds_1 - \tfrac{1}{2}c_{i-2}ds_2 + \tfrac{1}{3}c_{i-3}ds_3 - \dots \pm \frac{1}{i}ds_i,$$

eine Formel, aus welcher sich manche Verallgemeinerungen der Newton'schen Sätze über die symmetrischen Functionen ableiten lassen. Mn. (Lp.)

Zmurko. Begründung einiger wichtigen Abkürzungen der algebraischen Rechnung mittels einer näheren Untersuchung der algebraischen Division. Krak. Denkschr. XII. (Polnisch).

Inhalt: Darstellung der Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung m^{ten} Grades durch Polynome mit m Gliedern; Zerlegung eines Polynoms in zwei Polynome, deren jedes durch ein gegebenes teilbar ist; Darstellung der Eliminationsgleichung zweier gegebenen algebraischen Gleichungen in drei verschiedenen Determinantenformen; allgemeine Methode der Zerlegung algebraischer Bruchfunctionen. Dn.

L. Schendel. Zur Theorie der symmetrischen Functionen. Schlömilch Z. XXXI. 316-320.

Darstellung der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung durch ihre Potenzsummen und umgekehrt. Die eigentümlichen Bezeichnungen des Herrn Verfassers hätten eine Erklärung nicht überflüssig erscheinen lassen. No.

S. Dickstein. Ueber einige Eigenschaften der Functionen aleph. Krak. Denkschr. XII. (Polnisch).

Die Note behandelt die Haupteigenschaften der Wronski'schen symmetrischen Functionen aleph, ihre Darstellung in Determinantenformen sowie ihren Zusammenhang mit den Potenzsummen der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Dn.

S. Dickstein. Ueber den Crocchi'schen Satz. Krak. Denkschr. XII. (Polnisch).

Der Verfasser beweist hier einen Satz, der die Relation zwischen den Functionen aleph von Wronski und den Potenzsummen der Wurzeln algebraischer Gleichungen ausdrückt.

Dn.

S. Dickstein. Beweis zweier Formeln von Wronski. Krak. Denkschr. XII. (Polnisch).

Der Verfasser beweist hier zwei von Wronski ohne Beweis gegebene, zur Berechnung der Functionen aleph einer algebraischen Gleichung dienende Formeln. Die Methode der Herleitung ist analog derjenigen, mittels welcher der Waring'sche Satz bewiesen wird. Dn.

R. E. Allardice. Solution of a problem proposed by Dr. Muir. Edinb. M. S. Proc. IV. 37.

Gbs.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Capitel 1.

Niedere Arithmetik.

H. Schubert. Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik. I. Heft. Zweite Auflage. Potsdam. A. Stein. VIII u. 224 S. 8°.

Die zweite Auflage des ersten Heftes des Werkes, das F. d. M. XV. 1883. 990 besprochen ist, erscheint hinsichtlich des Aufbaus der Arithmetik und der Anordnung des Uebungsmaterials ungeändert, nur durch kleine Verbesserungen und Hinzufügungen, besonders neuer Gleichungen vervollkommnet. Lp.

O. Reichel. Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe. I. Teil. Berlin. Haude- & Spener'sche Buchhandlung.

Der Verfasser steht mit dem Referenten (System der Arithmetik, Potsdam, 1885) auf dem Kronecker'schen Standpunkt, dass die negativen, die gebrochenen, die irrationalen und die imaginären Zahlen nur Zahlformen sind, behufs Rechnungsabkürzung erfunden und immer so definirt, dass die für Anzahlen

(Ergebnisse des Zählens) und schon definirte Zahlformen bewiesenen Rechenregeln auch für sie bestehen bleiben. In dem vorliegenden ersten Teile gelangt der Verfasser nur bis zu den aus dem Differenzbegriff entspringenden algebraischen und den aus dem Quotientenbegriff hervorgehenden gebrochenen Zahlen. Das Büchelchen enthält nur die theoretische Entwickelung und keinen Stoff zur Einübung der erkannten Gesetze oder des Rechnens mit den definirten Zahlformen. Scht.

W. Fuhrmann. Wegweiser in der Arithmetik, Algebra und niedern Analysis. Leipzig. Teubner.

Ein Lexikon der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Schularithmetik und einiger angrenzender Gebiete in systematischer Anordnung von einem alphabetischen Register der Begriffe und Sätze begleitet. Scht.

Juling. Anfangsgründe der Arithmetik. Erster Teil: Lehrsätze. Zweiter Teil: Aufgaben. Pr. Realsch. Schönberg i. Mecklb. 36 + 80 S. 8°.

Umfasst die vier Grundrechnungsarten. „Die Lehrsätze sind möglichst kurz gefasst, damit sie sich leicht dem Gedächtnis einprägen. Die Beweise sind, wo es möglich war, nur angedeutet.“ Lp.

P. Mansion. Comptes rendus du „Traité d'arithmétique élémentaire“, du „Précis d'arithmétique“ et du „Recueil de problèmes d'arithmétique“ de M. l'abbé Gelin. Mathesis VI. Supplém. I. 8 S.

Auszug aus der Revue de l'Instruction publique en Belgique XXIX. 38-45. Mn.

E. Bardey. Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik. 13te Aufl. Leipzig. B.G.Teubner. XIV u. 330 S. 8°.

E. Bardey. Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. Vierte Aufl. Leipzig. B. G. Teubner. IX u. 268 S. 8°.

Pauli. Anweisungen zur Lösung der Textaufgaben in Dr. Bardey's Aufgabensammlung. Rastatt. Greiser.

Matthiessen. Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von E. Heis. Dritte Aufl. Zwei Bde. Köln. Du Mont-Schaumburg. XVI u. 610, VI u. 546 S.

Em. Schultze. Die vierte Rechenstufe. Hoppe Arch. (2) III. 302-314.

In denjenigen Lehrbüchern der Arithmetik, welche die Operationen derselben streng systematisch entwickeln, werden die Operationen vierter Stufe nicht allein erwähnt, sondern es wird auch die Berechtigung der Einführung derselben vom rein theoretischen Standpunkte aus eingeräumt. Zu solchen Lehrbüchern gehören z. B. die von Hankel, Grassmann, Scheffler, Ernst Schröder und vom Referenten. In Zeitschriften haben namentlich Eisenstein, Gerlach, Wöpcke über die directe Operation vierter Stufe geschrieben. Hier liegt eine neue Arbeit in dieser Richtung vor. Das Aufhören der Gültigkeit des Commutationsgesetzes bei der Potenzirung bedingt, dass bei der nächst höheren, der vierten Operationsstufe, zwei directe Operationen unterschieden werden müssen, nämlich:

$$([a^a]^a)^{a\cdots}, \text{ wo } a \text{ } p\text{-mal vorhanden ist,}$$

und

$$a^{\left(a^{[a\ldots]}\right)}, \text{ wo } a \text{ } p\text{-mal vorhanden ist.}$$

Von diesen beiden Operationen ausgehend, geht der Verfasser der vorliegenden Abhandlung weiter bis zu den beiden Operationen der n^{ten} Stufe. Er definirt die beiden Umkehrungen jeder derselben und giebt einige Eigenschaften an. Eine einigermassen

erschöpfende Behandlung der Operationen n^{ter} Stufe liegt noch nicht vor. Natürlich müsste dabei das Hankel'sche Princip der Permanenz formaler Gesetze zur Anwendung gelangen, indem der Zahlbegriff immer so erweitert wird, dass jede der Operationen ausnahmslos ausführbar wird.

Specieller geht der Verfasser dann auf diejenige Operation vierter Stufe ein, welche oben zuerst genannt ist, und sich als Potenz darstellen lässt, während er verspricht, in einem folgenden Aufsatze die zweite Operation vierter Stufe, die einen selbstständigeren Charakter hat, zu behandeln. Es handelt sich demgemäss hier im wesentlichen um die Eigenschaften der Functionen $a^{(a^z)}$ und $z^{(z^a)}$. Diese werden durch Reihenentwickelungen mit Benutzung der Vorstellung Riemann'scher Schraubenflächen aufgedeckt. Scht.

A. Ramsay. Lärobok i aritmetik. Borgå. 151 S. 8°.

Zweibergk-Eklöf. Lärobok i räknekonsten, med talrika öfnings-exempel. Lämpad efter metersystemet, till skolornas behofs. Åttonde omarbetade upplagan. Helsingfors. 211 S. 8°.

E. Bonsdorff. Esimerkkiä ja problemia algebran alalta. Toinen lisätty painos. Helsingfors. 171 S. 8°.

E. Kleinpaul. Aufgaben zum praktischen Rechnen. 12te Auflage. Neu bearbeitet von F. Mertens. 4 Hefte. Bremen. Heinsius.

Das Buch besteht aus einer Vorstufe und drei Heften und ist für höhere Schulen bestimmt. Referent möchte es trotz der 12 Auflagen anderen bekannten Sammlungen derselben Art nicht vorziehen. — Die in grosser Anzahl sich findenden Aufgaben

mit kleinen zum Kopfrechnen bequemen Zahlen wird der Lehrer sich jeden Augenblick zweckentsprechend selber bilden und besser Auge in Auge, als das Buch in der Hand mit seinen Schülern bearbeiten. Grade die nicht berücksichtigten Aufgaben aus der gemischten Regeldetri haben, wenn auch nicht für das praktische Leben, so doch für die formale Bildung grossen Wert und gehören deshalb vorzugsweise in ein Rechenbuch für Gymnasien. Ganz fortbleiben könnten dagegen Aufgaben über Arbitrage, Wechselrechnung, Warencalculation, Quadrat- und Kubikwurzeln und solche mit planimetrischem und stereometrischem Inhalt. Dieselben liegen ausser dem Gesichtskreis der meisten Schüler oder gehören in höhere Klassen und können daher auf der Stufe, für welche das Rechenbuch sich eignet, nur mangelhaft erklärt und gelöst werden. Es scheinen überhaupt die Verhältnisse unserer See- und Handelsstädte besonders berücksichtigt zu sein. Lg.

F. E. Feller u. C. G. Odermann. Das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. 15te Auflage. Leipzig. Otto Aug. Schulz. VIII u. 496 S. gr. 8°.

Das in fünfzehnter verbesserter Auflage vorliegende, zum achten Male von C. G. Odermann bearbeitete Buch behandelt alle Aufgaben des kaufmännischen Rechnens in achtzehn Abschnitten: Rechnen mit unbenannten Zahlen, mit benannten Zahlen, mit gemeinen Brüchen, Decimalbrüche, Verhältnisse und Proportionen, Alligationsrechnung, Procentrechnung, Zinsrechnung, Discontrechnung, Terminrechnung, Gold- und Silber-Rechnung, Münzrechnung, Berechnung des Gold- und Silber-Verhältnisses, Wechselrechnung, Berechnung der Effecten, der Masse und Gewichte, Warenrechnung, Berechnung des Spiritus und Getreides. Am Schlusse folgen Tabellen und die Resultate der Uebungsaufgaben. Die seit der vorigen Auflage (1881) in der kaufmännischen Lage eingetretenen Veränderungen sind berücksichtigt worden. Ein alphabetischer Index erleichtert das Auffinden gesuchter Gegenstände. Lp.

A. RAMSAY. Metersystemet belyst af talrika exempel. En handbok för skolan och till självundervisning. Helsingfors. 63 S. 8°.

A. RAMSAY. Luvunlaskun oppikirja. 152 S. 8°. 1887.

W. SPORER. Ueber Producte aus ganzen Zahlen. Hoppe Arch. (2) IV. 332-336, 434-436.

Die Identitäten

$$(p^2-\alpha^2)(q^2-\beta^2)+(\alpha q\pm\beta p)^2 = (pq\pm\alpha\beta)^2,$$
$$(p^2-\alpha^2)(q^2-\beta^2)(r^2-\gamma^2)+(\alpha\beta\gamma+\alpha qr+\beta rp+\gamma pq)^2$$
$$= (pqr+\beta\gamma p+\gamma\alpha q+\alpha\beta r)^2$$

werden in mannigfaltiger Weise specialisirt. Sn.

S. DICKSTEIN. Verhältnisse und Proportionalität Pädag. Revue. (Polnisch).

Methodologische Bemerkungen zum Unterricht in der Arithmetik. Dn.

J. VERVAET. Ueber die Multiplication von Decimalzahlen. Casop. XV. 24. (Böhmisch).

Die betreffende Regel gründet sich auf die Identität

$$MN = 10^n(M-b)+ab = 10^n(N-a)+ab,$$

wofern

$$M = 10^n-a,\quad N = 10^n-b.$$

Std.

A. KOSTĚNEC. Wie kann man leichter und sicherer dividiren? Casop. XV. 74. (Böhmisch.)

Unter Hinweis auf die vorangehende Regel Vervaet's zeigt

der Verfasser, wie man die dekadische Zahlenergänzung mit Vorteil auch bei der Division verwenden kann. Std.

R. Bettazzi. Sull' impossibilità di certe divisioni e sull'equivalenza delle equazioni. Besso Per. mat. I. 101-116, 129-143.

Selbstverständliche Betrachtungen über das Ergebnis der Einführung von Ausdrücken, die für gewisse Werte der Variabeln bedeutungslos werden, in algebraische Functionen und Gleichungen. — „Aequivalent“ heissen, nach dem Verfasser, zwei Ausdrücke, welche, solange als sie je eine Bedeutung haben, einander gleich sind, und gleichzeitig bedeutungslos werden. Das Addiren und Subtrahiren einer und derselben Grösse, die Zerlegung in Factoren, die Zurückführung von Brüchen auf ihren einfachsten Ausdruck, kann in einigen Fällen die ursprünglichen Grössen in nichtäquivalente Grössen überführen; sowie die Operationen, die man auf Gleichungen gewöhnlich ohne jedes Bedenken ausübt, die Anzahl der Wurzeln verändern können. Diese Ereignisse entspringen sämtlich aus der Unmöglichkeit (nach des Verfassers Ausdrucksweise) der Teilungen $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$; man kann aber in vielen Fällen jede Unbestimmtheit durch Grenzbetrachtungen aufheben. Vi.

F. Vormung. Die reducirten Quersummen und ihre Anwendung zur Kontrolle von Rechnungs-Ergebnissen u. s. w. mit einem Vorworte von Prof. Dr. Förster. Eberswalde. P. Wolfram. 16 S. 8°.

Erläuterung der Neunerprobe für das Zahlenrechnen. Sowohl die Neunerprobe als auch die Elferprobe sind sehr alt und jetzt nur von manchen nicht gekannt und geübt. Lp.

C. Moriconi. Frazioni decimali periodiche e loro generatrici. Besso Per. mat. I. 117-122.

Der erste Satz ist unrichtig; der Beweis des dritten enthält eine sonderbare Behauptung, dass nämlich zwei Decimalbrüche, bei welchen die erste Decimale verschieden ist, um mehr als 0,1 von einander abweichen. Uebrigens sind die Sätze 3) und 4) von selbst klar, und der ganze Aufsatz ist der Begründung von Theoremen gewidmet, die man in jedem Lehrbuche der Arithmetik viel einfacher bewiesen findet. Vi.

RÖSLER. Die neueren Definitionsformen der irrationalen Zahlen und ihre Bedeutung für die Schule.

M.

S. GATTI. Sulla divisibilità di alcuni polinomi. Besso Per. mat. I. 184-191.

Die Resultate dieses Aufsatzes kann man in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Sind n und $m+1$ relative Primzahlen, so ist

$$(x^{mn}+x^{(m-1)n}+\cdots+x^n+1):(x^m+x^{m-1}+\cdots+x+1)$$

eine ganze Function.

2) Ist ausserdem n ungerade, so ist auch

$$(x^{mn}-x^{(m-1)n}+\cdots-(-1)^m x^n+(-1)^m)$$
$$:(x^m-x^{m-1}+\cdots-(-1)^m x+(-1)^m)$$

eine ganze Function. Vi.

M. J. M. HILL. On the rule for contracting the process of finding the square root of a number. Brit. Ass. Rep. 538.

Gbs.

M. AZZARELLI. Trasformazione del binomio $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVIII. 227-242.

Eine Reihe elementarer Bemerkungen über die Umwandlung von $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ in $\sqrt{m}+\sqrt{n}$. No.

H. F. Th. Beyda. Das Ausziehen der Wurzeln jeglichen Grades sowohl aus den positiven als auch den negativen Zahlen. Bonn. (Stuttgart. J. B. Metzler.) 42 S. gr. 8°.

„Unsere Berechner der imaginären Grössen scheinen nicht zu wissen, dass die Wurzel aus der negativen Grösse gleich ist dem Negativen der Wurzel aus der gleichen positiven Grösse, dass

$$\pm\sqrt{-a^2} = -(\pm\sqrt{+a^2}) = \mp a$$

ist.“ (S. 34.) Dieser voreulersche Standpunkt hat also noch immer Anhänger. Referent schrieb F. d. M. XV. 1883. 1000 über eine andere Schrift desselben Verfassers:

„Nach der naiven Schreibweise könnte das Werk ein Jahrhundert zurückversetzt werden.“ Für die vorliegende Schrift muss es also heissen: „Zwei Jahrhunderte“. Lp.

Capitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

O. Stolz. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Erster Teil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. Zweiter Teil: Arithmetik der complexen Zahlen mit geometrischen Anwendungen. Leipzig. Teubner. VI u. 344 S.; VIII u. 326 S.

Der erste Teil dieses umfassenden Werkes beschäftigt sich mit dem Begriff der Grösse, der natürlichen Zahlen, der rationalen Zahlen und geht zu demjenigen der stetigen Grössen über, um so die Theorie der irrationalen Zahlen zu begründen. Es werden hierbei die Anschauungen von H. Grassmann, E. Schröder, Hankel, P. du Bois-Reymond, G. Cantor, J. Bertrand, R. Dedekind zur Geltung gebracht.

Die Untersuchungen über reelle Veränderliche und ihre Functionen führen zur Betrachtung der Grenze, der unendlich kleinen Grössen. Der Band schliesst mit der eingehenden Theorie der unendlichen Reihen mit reellen Gliedern, welche in grosser Vollständigkeit und mit ausserordentlicher Sorgfalt durchgeführt ist*).

Hinsichtlich der Convergenz- und Divergenz-Kriterien sind die Forschungen des Herrn P. du Bois-Reymond massgebend gewesen; Potenzreihen und ihre Convergenzgebiete werden behandelt; die Umkehrung einer Reihe geliefert. Der letzte Abschnitt handelt von den elementaren Eigenschaften der Exponentialfunction, der Potenz und des Logarithmus.

Im ersten Abschnitte des zweiten Bandes wird zunächst gezeigt, dass es ausser dem Systeme der gemeinen complexen Zahlen kein anderes giebt, für welches dieselben Rechnungsregeln gelten wie für die reellen Zahlen. Daran schliesst sich der Nachweis der Behauptung, dass Zahlensysteme mit vier und mehr Einheiten und gewöhnlicher Multiplication überflüssig sind. Im zweiten Abschnitte ist die Methode des Rechnens mit Strecken in der Ebene entwickelt, und daran sind einige geometrische Anwendungen geknüpft. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit den Grundbegriffen über die complexen Veränderlichen, der vierte mit den ganzen rationalen Functionen, den arithmetischen Reihen und der Interpolation. Der fünfte Abschnitt ist der wichtigen Theorie der unendlichen Reihen mit complexen Gliedern gewidmet; als Ziel hat dem Verfasser die Erledigung der Fragen über den Giltigkeitsbereich der Entwickelungen gewisser Functionen in Potenzreihen vorgeschwebt; dies führt auf die Behandlung der Entwickelung monogener Functionen in Potenzreihen. Das bis dahin Gewonnene wird zur Begründung der Lehre von den Potenzen mit complexen Exponenten und den complexen Logarithmen benutzt; daran schliesst sich eine Theorie

*) Bemerkt sei, dass der Satz über die Anordnung der Glieder einer bedingt convergenten Reihe derart, dass jede Summe erreichbar ist, auf Dirichlet zurückgeführt wird, während er sich schon bei Ohm findet.

der unendlichen Producte mit Anwendungen auf die üblichen Functionen und kurzem Discurse über Euler'sche und Bernoulli'sche Zahlen. Der achte und letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der Kettenbrüche, bei denen die vollständige Lösung der Frage nach der Convergenz oder Divergenz der periodischen Kettenbrüche gegeben wird. Die Anwendung der Kettenbrüche geht natürlich nicht nach der Seite der Zahlentheorie, sondern nach derjenigen der Functionentheorie.

Hervorzuheben ist die ausserordentliche Sorgfalt und Genauigkeit, mit der das Buch verfasst ist; die Quellen sind ausführlich angegeben, die Forschungen, wie auch der Titel mit Recht hervorhebt, bis zu den neusten Ergebnissen berücksichtigt.

No.

LEGENDRE. Zahlentheorie. Nach der dritten Auflage ins Deutsche übertragen von H. Maser. Leipzig. Teubner. I. II.

Da die dritte Auflage des Originalwerkes 1830 erschien, so ist hier nichts darüber zu sagen. Die Uebersetzung ist angemessen; die Einführung der dreifachen Druckart, gewöhnliche, gesperrte und fette Schrift hätte dem Leser erspart werden können.

No.

M. LERCH. Grundlagen zu einer rein arithmetischen Grössenlehre. Prag. Athenaeum. (Böhm.)

Die Abhandlung beschäftigt sich mit einer rein arithmetischen Behandlung der negativen Zahlen, der Brüche, der irrationalen Zahlen und schliesst mit der Auseinandersetzung einer mündlichen Mitteilung des Herrn Runge in Hannover (damals Privatdocenten in Berlin). Um die negativen Zahlen einzuführen, betrachtet der Verfasser Zahlenpaare $(a|b)$ und bezeichnet zwei Zahlenpaare $(a|b)$, $(c|d)$ als äquivalent — $(a|b) \frown (c|d)$ —, wenn $a+d=b+c$. Die Gesamtheit aller mit einem gegebenen Zahlenpaare $(a|b)$ äquivalenten Zahlenpaare heisst eine Differente;

dieselbe heisst positiv, wenn $a > b$, negativ, wenn $a < b$, und wird als eine Nulldifferente 0 bezeichnet, wenn $a = b$. Nachdem der Verfasser die Fundamentaloperationen mit Differenten definirt und einige Eigenschaften derselben abgeleitet, ändert er die Nomenclatur und nennt die Differenten einfach „benannte Zahlen“ (positive und negative). In ähnlicher Weise werden die gebrochenen Zahlen eingeführt. Die irrationalen Grössen werden auf folgende Weise definirt: Eine Wertfolge $a_0, a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ heisst convergent, wenn sie im Sinne des Herrn G. Cantor eine Fundamentalfolge ist, und zwei solche convergenten Wertfolgen heissen äquivalent, wenn sie es im Cantor'schen Sinne sind. Die Gesamtheit aller (mit einer gegebenen) äquivalenten Wertfolgen heisst eine Convergente; sie ist den Begriff des Grenzwertes zu ersetzen bestimmt und geeignet. Hat die Wertfolge einen Grenzwert (der also ein Bruch sein wird), so heisst die Convergente rational, sonst aber irrational u. s. f.

Die Runge'sche Mitteilung besteht aus folgendem Satze: Sind $M_\nu, N_\nu (\nu = 0, 1, 2, \dots)$ ganze Zahlen und so beschaffen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{M_\nu}{N_\nu} = a$ existirt, und dass die Ungleichung

$$\left| a - \frac{M_\nu}{N_\nu} \right| \leq \frac{1}{N_\nu^{n+\varepsilon_\nu}}$$

für unendlich viele ν besteht, wofür ε_ν oberhalb einer constanten kleinen Grösse bleibt, so kann die Zahl a nicht Wurzel einer ganzzahligen Gleichung n^{ten} Grades sein. Hieraus schliesst der Verfasser, dass alle Zahlen von der Form $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{10^{\nu!}}$, wobei die c_ν positive ganze Zahlen von 0 bis a bedeuten, transcendente Zahlen sind, vorausgesetzt, dass unter den c_ν unendlich viele von Null verschieden sind. (Lerch, Std.)

V. Grünwald. Dei sistemi numerici a base imaginaria. Commentari dell' Ateneo di Brescia. 43-54.

Dieser Aufsatz behandelt die Darstellung der ganzen complexen Zahlen durch Ausdrücke von der Form:

$$(1) \qquad c_m b^m + c_{m-1} b^{m-1} + \dots + c_1 b + c_0,$$

wo $b = \beta i$, β eine ganze reelle Zahl bedeutet. Die zur Darstellung aller ganzen complexen Zahlen notwendigen und hinreichenden Ziffern sind $2\beta^2-1$, nämlich:

für die geraden Stellen: $0, 1, 2, \ldots, \beta^2-1,$

für die ungeraden Stellen: $0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots, \frac{\beta^2-1}{\beta}$

(die der Verfasser durch $0, \underline{1}, \underline{2}, \ldots, \underline{\beta^2-1}$ bezeichnet). Das ist übrigens ganz selbstverständlich; denn wird eine ganze complexe Zahl $z = x + iy$ unter die Form (1) gesetzt, so ist:

$$x = \sum_0^n c_{2n}(-\beta^2)^n, \quad y = \sum_0^n (-1)^n c_{2n+1}\beta^{2n+1} = \sum_0^n c_{2n+1}\beta(-\beta^2)^n.$$

Man sieht hieraus, dass die neugeschaffene Darstellung mit der Darstellung der reellen Bestandteile x, y nach der reellen Grundzahl $-\beta^2$ identisch ist, und nichts Neues liefert, als die gegenseitige Verflechtung der x und y darstellenden Zahlen, die man aber bei jeder Operation wieder von einander trennen muss (bezüglich dieser letzten Behauptung siehe die Theorie der Operationen im Aufsatze selbst). Z. B. die ganze complexe Zahl $12-14i$ nimmt in dem Zahlensysteme mit der Grundzahl $3i$ die Form $1\underline{2}8\underline{4}3$ an; diese löst sich aber augenscheinlich auf in die zwei Zahlen 183, 24, welche 12 bezw. -14 im Zahlensysteme von der Grundzahl -9 darstellen. Vi.

G. Giuliani. Sulla potenza ad esponente irrazionale di un numero irrazionale. Besso Per. mat. I. 50-53.

Beweis des Satzes: Sind α, β zwei durch die Paare von Zahlenklassen (im Dedekind'schen Sinne) $a_1, a_2, \ldots$ und $a_1', a_2', \ldots$ bezw. $b_1, b_2, \ldots$ und $b_1', b_2', \ldots$ bestimmte irrationale Zahlen, so wird die Zahl α^β durch das Klassenpaar bestimmt:

$$a_1^{b_1}, a_2^{b_2}, \ldots \text{ und } a_1'^{b_1'}, a_2'^{b_2'}, \ldots$$

Vi.

L. Kraus. Beweis des Satzes, dass unendlich viele Primzahlen $(kp+1)$ existiren, wenn p eine Primzahl ist. Casop. XV. 61. (Böhm.)

Hat man

$$M = a^p - 1$$

und bezeichnet $\varphi(M)$, wie gewöhnlich, die Anzahl der mit M teilerfremden Zahlen, die M nicht übersteigen, so gilt

$$\varphi(M) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Enthält nun M die Primfactoren r, s, t, ..., so ist bekanntlich

$$\varphi(M) = M\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right) \cdots$$

Ist daher r von der Form $(kp+1)$, so folgt, dass $r-1$ durch p teilbar, also r durch $kp+1$ darstellbar ist. Aehnlich findet man p_k und somit p_{k+1}, wenn man setzt

$$M = (pp_1p_2 \ldots p_k)^p - 1.$$

Std.

M. Lerch. Expression analytique du plus grand commun diviseur de deux nombres entiers. Prag. Ber. 414-417. (1885)

Der grösste gemeinsame Teiler von m und n wird in der Form $e^{\Sigma f_\nu}$ dargestellt, wobei ν von 0 bis ∞ läuft und f_ν eine ganze ganzzahlige Function von $\sin\frac{2m\pi}{k}$, $\sin\frac{2n\pi}{k}$, ..., $\log 2$, $\log 3$, ... bedeutet, die in den Logarithmen linear ist. No.

P. W. Preobraschensky. Geometrie der Zahlen nebst einer Tabelle der Quadrate der vierziffrigen Zahlen. Phys. math. Wiss. (A). I. 49-73, 171-187, 273-281. (Russisch).

Nach des Verfassers Definition betrachtet die Geometrie der Zahlen die in ein bestimmtes System eingeordneten Zahlen und studirt ihre Eigenschaften im Zusammenhange mit dem Platze, den sie im System einnehmen. Der Verfasser behandelt den einfachsten Fall, wenn die Zahlen regelmässig in Reihen, deren jede 100 Zahlen einschliesst, verteilt sind. Die Betrachtungen des Verfassers geben ihm dann z. B. die Methode, für jede Zahl bis 100 000 000 ihre zweiziffrigen Factoren zu finden. Wi.

S. Dickstein. Ueber die Teilbarkeit der Zahlen. Lemberg. Museum (Polnisch).

Es wird die Zahl, deren Teilbarkeit durch eine andere untersucht wird, nach einer einfachen Regel, die für jedes Zahlsystem giltig ist, auf eine kleinere Zahl reducirt. Dn.

Dziwinski. Teilbarkeitsregeln auf Grund der Theorie der Congruenzen. Lemberg. (Polnisch.)

Dn.

P. Seelhoff. Die Auflösung grosser Zahlen in ihre Factoren. Schlömilch Z. XXXI. 166-174.

P. Seelhoff. Die neunte vollkommene Zahl. Schlömilch Z. XXXI. 174-178.

P. Seelhoff. Ein neues Kennzeichen für die Primzahlen. Schlömilch Z. XXXI. 306-310.

P. Seelhoff. Berichtigung. Schlömilch Z. XXXI. 320.

P. Seelhoff. Zur Analyse grosser Zahlen. Hoppe Arch. (2) III. 325-329.

P. Seelhoff. Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv r$ (mod. N). Schlömilch Z. XXXI. 378-380.

P. Seelhoff. Die Zahlen von der Form $k.2^n+1$. Schlömilch Z. XXXI. 380.

G. Valentin. Einige Bemerkungen über vollkommene Zahlen. Hoppe Arch. (2) IV. 100-103.

Herr Seelhoff sucht seine Methode, über welche im vorigen Jahrgang berichtet wurde (vgl. F. d. M. XVII. 124-125), fortzubilden und auf die verschiedenen, in den obigen Titeln angegebenen Probleme anzuwenden. Herr Valentin berichtigt in Uebereinstimmung mit Herrn Seelhoff einige von dessen Angaben über vollkommene Zahlen, teilt historische Notizen in Betreff derselben mit, und macht eine Reihe von Angaben über die Factoren der Zahlen von der Form $2^\lambda-1$. Sn.

P. SEELHOFF. Un nouveau nombre parfait. Mathesis. VI. 100-101, 178.

ÉD. LUCAS. Sur les nombres parfaits. Mathesis. VI. 145-148.

A. STERN. Sur les nombres parfaits. Mathesis. VI. 248-250.

Liste der seit alter Zeit bekannten vollkommenen Zahlen. Die Zahl $2^{60}(2^{60}-1)$ ist eine vollkommene Zahl. Alle geraden vollkommenen Zahlen werden durch die Regel Euklid's gegeben. Der Beweis dafür, dass es keine ungeraden vollkommenen Zahlen giebt, ist noch nicht geliefert. Wenn eine ungerade vollkommene Zahl vorhanden ist, muss sie die Form $a^{4p+1}b^{2q}c^{2r}\ldots$ haben. Andere Sätze über die vollkommenen Zahlen. Mn. (Lp.)

H. NOVARESE. Note sur les nombres parfaits. Teixeira J. VIII. 11-16.

Der Verfasser beweist folgende zwei Sätze:

Jede gerade vollkommene Zahl, 6 ausgenommen, ist ein um 1 vermehrtes Vielfaches von 9.

Jede gerade vollkommene Zahl, deren letzte Ziffer nicht 6 ist, endigt mit den Ziffern 28.

Darauf zieht er daraus folgende Schlüsse:

Jede gerade vollkommene Zahl (6 ausgenommen), die mit der Ziffer 6 endigt, ist ein um 1 vermehrtes Vielfaches von 45 und jede gerade vollkommene Zahl, die mit 8 endigt, ein um 2 vermindertes Vielfaches von 30. Tx. (Hch.)

L. GEGENBAUER. Die mittlere Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in zwei Factoren von vorgeschriebener Form. Wien. Ber. XCIII. 90-105.

L. GEGENBAUER. Arithmetische Notiz. Wien. Ber. XCIII. 447-454.

L. GEGENBAUER. Zahlentheoretische Notiz. Wien. Ber. XCIV. 35-40.

L. GEGENBAUER. Ueber grösste ganze Zahlen. Wien. Ber. XCIV. 611-612.

Eine Reihe von weiteren Folgerungen aus den Eigenschaften der Function $[x]$; vgl. F. d. M. XVI. 149-150; XVII. 130, 131, 144.

Sn.

J. S. MACKAY. On the divisibility of certain numbers. Edinb. M. S. Proc. IV. 55-56.

Gbs.

J. HACKS. Einige Sätze über Summen von Divisoren. Acta Math. IX. 177-181.

Im Anschluss an die Vorlesungen und Arbeiten von Herrn Lipschitz werden Entwickelungen der Functionen $F(m)$, $G(m)$, $K(m)$, $L(m)$ (vgl. F. d. M. XI. 142-143, XVII. 126-127), und besonders Untersuchungen angestellt, für welche Argumente m diese Functionen gerade oder ungerade Werte ergeben.

Sn.

P. SEELHOFF. Ein Rechenfehler von J. Bernoulli. Schlömilch Z. XXXI. 63.

J. Bernoulli hatte in der Zahl $10^{11}+1$ nur die Primfactoren 11 und 23 entdeckt, während sie sich in $11^2 . 23 . 4093 . 8779$ zerlegen lässt.

Lp.

P. A. MACMAHON. Certain special partitions of numbers. Quart. J. XXI. 367-373.

Die Zerlegung einer ganzen Zahl in Summanden wird hier eine vollkommene genannt, wenn in ihr auch eine, und nur eine Zerlegung aller kleineren Zahlen enthalten ist. Zahlen, welche nur eine vollkommene Zerlegung in diesem Sinne erlauben (die Zerlegung in Einheiten also), spielen hier die Rolle von Primzahlen. Es werden Typen von solchen aufgestellt. Minder vollkommene Zerlegungen heissen diejenigen, bei denen negative Grössen zugelassen werden müssen, um alle kleineren Zahlen herzustellen.

Sn.

E. Cesaro. Sur la distribution mutuelle des nombres polygones. Nouv. Ann. (3) V. 209-214.

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Trigonalzahlen liegt mindestens eine Quadratzahl und höchstens deren zwei; u. dgl. m.
Sn.

Evans. Solution of questions 3189, 4473. Ed. Times. XLIV. 65-66, 68-69.

Das Product von fünf oder von sieben aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen kann keine Quadratzahl sein. Lp.

P. Tannery. Sur un problème de Fermat. S. M. F. Bull. XIV. 41-45.

Diophant hat die Aufgabe gestellt (V, 25), drei pythagoreische Dreiecke zu suchen, für welche das Product aus allen drei Hypotenusen in drei Katheten eine Quadratzahl sei. Fermat hat behauptet, die allgemeine Lösung dieses Problems zu besitzen; seine Andeutungen sind aber mit einem Rechenfehler behaftet, den er selbst zwar bemerkt, indes nicht weiter erörtert hat; wie er zu seiner Lösung in sehr grossen Zahlen, deren Entdeckung nicht dem Zufall zugeschrieben werden kann, gekommen sein mag, bleibt fraglich. Sn.

E. Catalan. Sur le dernier théorème de Fermat. Belg. Bull. (3) XII. 498-500

Sechzehn Sätze über Zahlen a, b, c, für welche $a^n + b^n = c^n$.
Mn.

E. Catalan. Quelques théorèmes d'arithmétique. Belg. Mém. XLVI. 16 S.

Zahlreiche Sätze, ähnlich wie der von Lionnet: Wenn n eine Primzahl grösser als $p+1$ ist, so ist $s_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ durch n teilbar. Einige andere beziehen sich auf die Zerlegung

mancher Zahlen in Quadrate. So ist

$$B = (a^2+c^2)^2 p^2 + 2[(a^2+b^2+c^2)c^2 - a^2 b^2]pq + (b^2+c^2)q^2$$

die Summe aus vier Quadraten, wenn pq ein Quadrat ist; aus zwei Quadraten, wenn auch noch $a^2+b^2+c^2$ ein Quadrat ist.

Mn. (Lp.)

S. Realis Développements nouveaux sur quelques propositions de Fermat. Nouv. Ann. (3) V. 113-122.

Untersuchungen über die Darstellungen in den Formen $2x^2+y^2$ und $3x^2+y^2$. Sn.

Th. Pépin. Étude sur quelques formules d'analyse utiles dans la théorie des nombres. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVIII. 139-196.

Jacobi hat einen arithmetischen Ersatz für die Anwendung der θ-Reihen zur Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von vier Quadraten gesucht (Crelle XII). Seine Methode, wie auch die Fortbildungen derselben durch Dirichlet und Liouville (vgl. dessen Journal, 2. Série, III) finden hier eine neue vollständige Darstellung, und werden auf binäre und quaternäre Formen angewendet. Sn.

J. Hermes. Symmetrische und complementäre Verteilung der Indexsummenreste $\mathfrak{r}$ für Primzahlen von der Form $p = 2^{2^n}+1$. Hoppe Arch. (2) IV. 207-218.

Für die Kreisteilung und besonders für die Zerlegung von p in eine Summe von Quadraten ist es wichtig, ob die Zahlen

$$\mathfrak{r} \equiv \text{ind.}\alpha + \text{ind.}(\alpha+1) \qquad \text{mod.}(p-1)$$

ungerade, oder durch 2, 4, ..., 2^r teilbar sind. Es werden technische Hülfsmittel gegeben, um diese Untersuchung zuverlässig und möglichst expedit zu vollziehen. Sn.

Meissel. Ueber die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen Zahl A durch die Form $\Sigma p_n x_n$, in welcher die p gegebene, unter sich verschiedene Primzahlen, x_n ganze positive Zahlen mit Ausschluss der Null sind. Pr. Ob.-Realsch. Kiel.

Es werden für die Fälle $n = 2, 3, 4, 5$ Eigenschaften der Anzahl N solcher Darstellungen gesucht, wobei N als Function der darzustellenden Zahl A betrachtet wird. Ist S die Summe der p, P deren Product, so wird:

$$f_m(-A) = (-1)^{m+1} f_m(A+S),$$

$$f_{m-1}(A+nP) - f_{m-1}(A) = \frac{\partial f_m(A+nP)}{P\partial n}.$$

In der zweiten Formel ist der $(m+1)^{\text{te}}$ Parameter indes doppelt, als Factor und Summand, weggelassen.

Sind alle Parameter $= 1$, so ist die Anzahl der Darstellungen von

$$\sum_1^{m+1} x_\varrho = A$$

gleich $(A-1)_m$. Sn.

F. G. **Teixeira.** Sur le théorème d'Eisenstein. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 389-390.

Elementarer Beweis für den Eisenstein'schen Satz, dass die möglichst reducirten Coefficienten in der Reihenentwickelung einer algebraischen Function nur eine endliche Anzahl von Primzahlen in den Nennern enthalten können. No.

F. G. **Teixeira.** Ueber den Eisenstein'schen Satz. Hoppe Arch. (2) III. 315-317.

Ein neuer Beweis des Satzes: Die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots$ auf den einfachsten Ausdruck reducirte Brüche darstellen, kann nicht die Entwickelung einer Wurzel y einer in x und y algebraischen Gleichung mit ganzen Zahlen als Coeffi-

cienten sein, wenn die Nenner der $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Anzahl von Primfactoren enthalten. Sn.

E. Cesaro. Fonctions énumératrices. Brioschi Ann. (2) XIV. 141-158.

Eine Function $\Omega(x)$ habe die Werte 1 oder 0, je nachdem die ganze Zahl x einem beliebig definirten System Ω angehört, oder nicht angehört. Ist nun

$$\Omega(x)\Omega(y) = \Omega(xy),$$

so ist Ω eine geschlossene Gruppe und enthält auch alle Teiler ihrer Elemente. Dieser Satz lässt sich umkehren. Durch Summationen von $\Omega(x)$ lässt sich jede Anzahl irgend welcher Art im System Ω bestimmen. — Die Anwendungen beziehen sich auf die Reihe der nach ihrer Grösse geordneten irreductibeln Brüche, deren Nenner unter einer festen Grenze liegen; auf die Reihe ihrer n^{ten} Potenzen; auf die mittleren Werte und Wahrscheinlichkeitsbestimmungen für die Reihe der Trigonalzahlen; auf die Zahlenreihe, in welcher alle Quadrate fortgelassen sind; u. dgl. m. Sn.

R. Lipschitz. Propositions arithmétiques tirées de la théorie de la fonction exponentielle. Jordan J. (4) II. 219-238.

Im Anschluss an die Untersuchungen von Hermite, Lindemann und Weierstrass stellt sich Herr Lipschitz zunächst die Aufgabe, aus der Kettenbruchentwickelung der Exponentialfunction rein zahlentheoretische Ergebnisse zu ziehen. In dem Resultate, welches sich als Bestimmung einer Anzahl von Punkten einer gewissen Art innerhalb eines elliptischen oder hyperbolischen Sectors ergiebt, zeigt sich die Notwendigkeit, das fragliche Flächenstück für gewisse Fälle als mehrfach von jenen Punkten überdeckt anzusehen. — Es wird sodann eine allgemeine Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades an Stelle der quadratischen behandelt. Es ergiebt sich, dass die definirte Anzahl von Punkten hier um Eins grösser ist, als die Anzahl der Fundamental-

einheiten des Gebiets der aus den Wurzeln jener Gleichung gebildeten complexen Zahlen, im Sinne Dirichlet's. Sn.

E. Cesaro. Le déterminant de Smith et de Mansion. Nouv. Ann. (3) V. 44-47.

Weitere Untersuchungen über zahlentheoretische Determinanten (vgl. F. d. M. XVII. 136-137); die früher betrachteten Determinanten werden gerändert, und für gewisse zahlentheoretische Functionen der Randglieder wird der Wert der Determinante gegeben. No.

Ot. Ježek. Ueber die Auflösung eines Functionalgleichungssystems. Prag. Ber. 1885. 63-68.

Das Gleichungssystem lautet:

$$f_\alpha(x) f_\alpha(y) = f_{\alpha+1}(x+y), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ f_{n+1} = f_1),$$

und seine Lösung ist:

$$f_\alpha(x) = A_\alpha \,.\, e^{cx},$$

wobei

$$A_\alpha = A_{\alpha-1}^2 \quad \text{und} \quad A_1 = e^{\frac{2k\pi}{2^n-1}i}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, (2^n-2))$$

gesetzt werden muss. Die Anzahl der von einander verschiedenen Lösungen des Systems steht im engsten Zusammenhange mit der Frage: „In wie viel Gruppen zu je n Zahlen lassen sich die Zahlen 1, 2, 3, ..., (2^n-2) so ordnen, dass jede Zahl jeder Gruppe dem Doppelten der unmittelbar vorhergehenden Zahl derselben Gruppe nach dem Modul 2^n-1 congruent sei, und dass die Zahlen je zweier Gruppen von einander verschieden sind?" Auch für diese Aufgabe wird die Lösung gegeben.

No.

Ch. Hermite. Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques. Kronecker J. IC. 324-328.

Der Beweis für die Identitäten

$$\Sigma \frac{q^m}{1-q^m} = \Sigma \frac{q^n}{1-q^{2n}} = \Sigma \frac{q^{\frac{1}{2}(n^2+n)}}{1-q^n}$$

wird auf zahlentheoretischem Wege gegeben; die drei Ausdrücke sind auch $= \Sigma F(N) q^N$, wo $F(N)$ die Anzahl der ungeraden Teiler von N bezeichnet. Die Summe

$$F(1)+F(2)+\cdots+F(N)$$

nähert sich asymptotisch dem Werthe:

$$\tfrac{1}{2} N \log N + (C - \tfrac{1}{4}) N,$$

wo C die Euler'sche Constante.

Analog erweist sich

$$4\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\sqrt{q^m}}{1-q^m} = 4\Sigma(-1)^{m-1} \sqrt{q^{m^2}} \left(\frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m}}\right)$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots)$$

als identisch mit

$$\frac{2kK}{\pi} = \Sigma f(M) \sqrt{q^M} \qquad (M = 1, 3, 5, \ldots),$$

wo

$$f(M) = 4\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)},$$

wenn die Summe auf alle Teiler von M bezogen wird. Der asymptotische Wert von

$$f(1)+f(5)+f(9)+\cdots+f(M)$$

ergiebt sich gleich $\frac{\pi}{2} \cdot M$.

Auf ähnliche Weise werden noch zwei andere Identitäten untersucht, welche aus den Thetareihen entspringen. Sn.

W. J. Buniakoffsky. Ueber eine Modification der Function $E(f_{(x)})$ und über die Anwendung des veränderten Verfahrens zur Untersuchung einiger Eigenschaften der quadratischen und nichtquadratischen Reste der Zahlen von der Form $4k+1$. Petersb. Abh. LII. (Russisch).

Im Anschluss an seine früheren Untersuchungen über die Function $E(x)$ (S. Démonstration de quelques propositions rela-

tives à la fonction numérique $E(x)$, Mélanges math. V. VI) zeigt der Verfasser, wie die Eigenschaften der periodischen Brüche, welche bei der Zerlegung des Bruches $\frac{1}{q}$ nach dem Zahlensystem mit der Basis g (primitive Wurzel von q) entstehen, Hülfe leisten bei der Aufgabe, die Summe der quadratischen Reste der Zahl q zu ermitteln. Diese mit R bezeichnete Summe ist, wie aus den früheren Untersuchungen des Herrn Verfassers folgt, durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{R}{q} = g^2\left(\frac{g^{q-1}-1}{q(g^2-1)}\right) - \sum_{m=1}^{m=\frac{q-1}{2}} E\left(\frac{g^{2m}}{q}\right).$$

Am Ende der Abhandlung wird eine merkwürdige Eigenschaft der erwähnten periodischen Brüche gezeigt, nämlich dass in einer Periode die Summe der Ziffern, welche den Platz μ und $\frac{q-1}{2}+\mu$ einnehmen, immer dieselbe und gleich g ist. Wi.

P. Gazzaniga. Sui residui di ordine qualunque rispetto i moduli primi. Ven. Ist. Atti (6) IV. 1271-1280.

Man teile die Reste der arithmetischen Progression

$$q,\ 2q,\ 3q,\ \ldots,\ \frac{p-1}{\delta}q$$

in drei Kategorien, so dass

$$0 < r_1 \ldots r_\varrho < \frac{p}{\delta},$$

$$\frac{p}{\delta} < s_1 \ldots s_\nu < \frac{\delta-1}{\delta}\cdot p,$$

$$\frac{\delta-1}{\delta}p < t_1 \ldots t_\mu < p,$$

und bilde die Differenzen

$$p-t_1 = m_1,\ \ldots,\ p-t_\mu = m_\mu.$$

Sodann scheide man aus der Reihe der Zahlen $1 \cdots \frac{p-1}{\delta}$ die Zahlen r und m aus; es bleiben ν Zahlen $v_1 \ldots v_\nu$ übrig.

Ferner seien $y_1 \ldots y_\nu$ die Lösungen der Congruenzen

$$s_\sigma y_\sigma \equiv v_\sigma \qquad (\text{mod. } p).$$

Die Congruenz

$$x^n \equiv q \qquad (\text{mod. } p)$$

ist dann und nur dann lösbar, wenn

$$(-1)^\mu . y_1 \ldots y_\nu \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

Dieser Satz ist offenbar eine interessante Verallgemeinerung des bekannten Lemma von Gauss. Sn.

E. E. KUMMER. Zwei neue Beweise der allgemeinen Reciproeitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen, deren Grad eine Primzahl ist. Kronecker J. C. 10-50.

Abdruck aus den Abhandlungen der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1861. Man vergleiche jedoch die Note des Herrn Kronecker auf S. 16. Sn.

BOCK. Ueber eine neue zahlentheoretische Function. Hamb. Mitth. 187-194.

Ein neuer Beweis „durch Reduction“ für das quadratische Reciprocitätsgesetz. Die Zahl μ wird durch eine gewisse Anzahl von Verschiebungen dargestellt, und diese als Function studirt; ihre Berechnung geschieht mit Hülfe der Näherungswerte einer Kettenbruchentwickelung. Sn.

TH. PÉPIN. Sur trois théorèmes de Gauss. Sur quelques congruences binômes. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVIII. 197-200, 201-210.

Ueber den kubischen Charakter der Zahl 2; über deren biquadratischen Charakter, über das Lemma von Gauss (Dirichlet § 43). Anleitungen zum Gebrauch des Canon arithmeticus.

Sn.

E. BUSCHE. Arithmetischer Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die biquadratischen Reste. Kronecker J. IC. 261-274.

Es wird eine Relation zwischen

$$\left(\left(\frac{n}{m+2\lambda n}\right)\right) \quad \text{und} \quad \left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$$

mit Zuhülfenahme der geometrischen Darstellung complexer Zahlen abgeleitet. Aus dieser Relation ergeben sich dann durch geeignete Specialisirungen die einzelnen Fälle des Reciprocitätsgesetzes. Sn.

E. DE JONQUIÈRES. Étude sur une question d'analyse indéterminée. Batt. G. XXIV. 1-11.

Für die Theorie der Transformationen ebener Curven ist nach Herrn Cremona das System der diophantischen Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha_i = 3(n-1), \quad \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2-1$$

von Wichtigkeit. Es werden geometrische (d. h. continuirliche) und arithmetische Systeme von Lösungen unterschieden, und diese Systeme nach verschiedenen Gesichtspunkten in Gruppen geordnet. Sn.

TH. PÉPIN. Solution des deux équations

$$13x^4 - 11y^4 = 2z^2, \quad 8x^4 - 3y^4 = 5z^2.$$

Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVIII. 30-45.

Alle Lösungen der ersten dieser diophantischen Gleichungen sind in zwei Systemen enthalten, welche sich als Resultate einer ziemlich naheliegenden Analyse bieten. Die Anwendung derselben Methode auf die zweite Gleichung aber führt, obwohl diese kleinere Ziffern enthält, auf eine weit grössere Zahl von Einzelfällen. Es wird ein besonderer Beweis notwendig, dass man auf dem angegebenen Wege alle unter einer vorgeschriebenen

Grenze liegenden Wertepaare erhält. Es existiren zehn Lösungen, bei welchen $x < 10000$, nämlich

$$x = 1, 2, 4, 23, 107, 136, 181, 1007, 1238, 2416.$$

Sn.

Desboves. Applications des formules générales qui donnent la solution complète, en nombres entiers, de l'équation homogène du second degré contenant un nombre quelconque d'inconnues. Nouv. Ann. (3) V. 226-233.

Die vom Verfasser Nouv. Ann. (3) III. 225ff. (cf. F. d. M. XVI. 1884 p. 164) gegebene Lösungsmethode wird auf folgende specielle Fälle angewendet:

$$X^2 + bY^2 + dXY = Z^2;\quad X^2 + Y^2 = cZ^2,$$

wo c gleich der Summe der Quadrate zweier ganzen Zahlen sein muss; $aX^2 + bY^2 + dXY = cZ^2$, wo $c = a + b + d$ ist, und $X^2 + Y^2 + Z^2 = U^2$ und allgemeiner

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \cdots = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots) U^2.$$

T.

A. Stern. Einige Bemerkungen über die Congruenz $\frac{r^p - r}{p} \equiv a \pmod{p}$. Kronecker J. C. 182-188.

Es werden Sätze von Eisenstein (Monatsber. d. Berl. Ak. 1850) und Sylvester (C. R. LII. 161) neu bewiesen, teilweise berichtigt und in einen grösseren Zusammenhang gestellt. Sn.

Desboves. Résolution, en nombres entiers et sous la forme la plus générale, de l'équation cubique, homogène, à trois inconnues. Nouv. Ann. (3) V. 545-579.

Cauchy hat gezeigt, wie man aus einer Lösung der allgemeinen, homogenen, kubischen Gleichungen mit drei Unbekannten eine zweite, und aus zwei Lösungen eine dritte ableiten

könne. Diese Formeln werden hier in vereinfachter Weise abgeleitet und eingehend discutirt. Hierbei stellt es sich z. B. heraus, dass die von Herrn Lucas angegebenen Formeln nur eine Combination der Cauchy'schen sind. — Dann wird bewiesen, dass, wenn eine Gleichung der angegebenen Art durch ganze Zahlen befriedigt werden kann und eine Lösung gegeben ist, ihre vollständige Lösung von der einer biquadratischen Gleichung abhängt, was deshalb wichtig ist, weil für gewisse Arten der biquadratischen Gleichungen vollständige Lösungen bekannt sind, bei kubischen aber nicht. Zu einer biquadratischen kann man rückwärts die zugehörige kubische construiren. Endlich wird ein ähnlicher Zusammenhang zwischen gewissen kubischen Gleichungen nachgewiesen. No.

E. DE JONQUIÈRES. Étude arithmétique d'une équation indéterminée du troisième degré. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVII. 183-188.

Für die Theorie der Osculation von Flächen ist die Gleichung

$$\frac{(x+1)(x+2)x+3)}{6}-1=\frac{(y+1)(y+2)}{2}$$

von Wichtigkeit. (Vgl. Hermite, Cours d'Analyse I, 145.) Eine allgemeine Methode zur Lösung fehlt; auch hier wird nur eine Reihe von Wertepaaren gewonnen. Sn.

A. BERGER. Om antalet lösningar till en viss indeterminerad eqvation med flere obekanta. Stockh. Öfv. XLIII. 355-366.

Folgendes Theorem wird bewiesen: „Die Zahlen

$$s,\quad m,\quad n,\quad g_1,\quad g_2,\quad \dots,\quad g_s$$

sind ganze positive Zahlen und $\psi(n)$ ist die Anzahl ganzzahliger positiver Lösungen der Gleichung:

$$g_1x_1^m+g_2x_2^m+\dots+g_sx_s^m=n.$$

Dann ist immer

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)}{n^{\frac{s}{m}}} = (g_1 . g_2 \cdots g_s)^{-\frac{1}{m}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)^s}{\Gamma\left(1+\frac{s}{m}\right)}.\text{“}$$

M.-L.

B. Theorie der Formen.

J. Vivanti. Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. Schlömilch Z. XXXI. 273-282.

Der Verfasser studirt im besonderen die Formen $(a, b, -c)$, wo $c = a+b$ und a, b (sowie die Determinante D) positiv sind. Er nennt sie „Nullformen“.

Eine Nullform ist reducirt.

Sein Hauptsatz lautet:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorkommen von Nullformen im reducirten Formensystem von der Determinante D ist, dass bei der Zerlegung von D in Primfactoren der Factor 2 und die Primzahlen von der Form $6n+5$ mit geraden Exponenten (0 incl.) auftreten.“ My.

L. Gegenbauer. Neue Klassenanzahlrelationen. Wien. Ber. XCIII. 288-290.

Der Verfasser vervollständigt die in einer früheren Note (F. d. M. XVII. 1885. 163) besprochene Tabelle von Klassenanzahlrelationen. My.

Ch. Hermite. Remarques sur les formes quadratiques de déterminant négatif. Darb. Bull. (2) X. 23-30.

Man erhält alle reducirten (nicht ambigen) Formen mit

mittleren positiven Coefficienten (und jede nur einmal) in der Gestalt:

$$(2s+r,\ s,\ 2s+r+t),$$

wo r, s, t alle ganzen positiven Zahlen (excl. 0) durchlaufen.

Dann ist der Coefficient von q^N in dem Ausdruck

$$S = 2\Sigma q^{(2s+r)(2s+r+t)-s^2} = 2\Sigma \frac{q^{(2s+r)^2+(2s+r)-s^2}}{1-q^{2s+r}}$$

gleich der zur Determinante $-N$ gehörigen Klassenanzahl.

Zwei ähnliche Summenausdrücke ergeben sich bei der Bestimmung der Klassenanzahl der ambigen Formen. Man kann dieselben einer (in der Theorie der ϑ-Functionen gebräuchlichen) analytischen Transformation unterwerfen, und es kommt:

$$S_1 + S_2 = \Sigma \frac{q^m}{1-q^{2m}} + \Sigma \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

wo m alle ungeraden, n alle (positiven) Zahlenwerte überhaupt annimmt. Daraus folgt sofort für ein ungerades $N = M$ die Klassenanzahl der ambigen Formen gleich $\varphi(M)$, wo $\varphi(M)$ die Anzahl der Teiler von M bedeutet, und für ein gerades $N = 2^n M$ die entsprechende Zahl gleich $n\varphi(M)$.

Bei Fortsetzung dieses Weges gelangt der Verfasser zu eleganten Formeln für Mittelwerte von Klassenanzahlen, wie sie schon von Gauss und Lipschitz auf anderem Wege gefunden wurden. My.

H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies. C. R. CII. 735-737.

Ist eine indefinite ternäre quadratische Form gegeben, die man immer in der Form

$$F(x, y, z) = Y^2 - XZ$$

voraussetzen darf (wo X, Y, Z lineare Formen sind), so bildet die Gesamtheit der ganzzahligen Substitutionen S, welche F in sich überführen, eine discontinuirliche Gruppe G.

Dieser ordnet sich, Element für Element, eine gewisse „Fuchs'sche Gruppe“ g zu. Man kann daher umgekehrt aus der Theorie der letzteren, namentlich des zugehörigen „erzeugenden

Polygons", Rückschlüsse auf die Eigenschaften der ternären Formen machen. Die einzigen Fälle, die hier auftreten, sind die, wo die Summe der Winkel eines „Cyklus" des Polygons den Werth 2π, π, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 annimmt. Danach teilen sich die entsprechenden Formen in gewisse Familien ein.

Im Anschlusse daran wird die Frage aufgeworfen und beantwortet, ob und wann für eine solche Fuchs'sche Function ein „Additionstheorem" existirt (analog dem für die elliptischen Functionen geltenden). Dagegen scheint es zweifelhaft, ob sich die gewonnenen Resultate auf die allgemeinen Fuchs'schen Functionen ausdehnen lassen. My.

E. Cesaro. Formes algébriques à liens arithmétiques. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 56-61.

Es werden quadratische Formen

$$x = \sum_{i,k} F(i,k) x_i x_k$$

von n Variabeln betrachtet, deren Coefficienten ganze Functionen zahlentheoretischer Functionen der Indices sind, z. B. des grössten gemeinsamen Teilers (i, k) der Zahlen i und k. Diese werden auf eine gewisse Normalform gebracht; die adjungirte Function von x wird betrachtet, u. dergl. mehr. No.

R. Lipschitz. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn. Cohen & Sohn. 147 S.

R. Lipschitz. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Darb. Bull. (2) X. 163-183.

Die vorliegende Schrift, über die der Herr Verfasser im Darb. Bull. ein Selbstreferat erstattet hat, zerfällt in drei Abschnitte. Der erste beschäftigt sich mit der Transformation einer Summe von zwei oder drei Quadraten in sich selbst durch reelle Substitutionen; dies führt auf die Rechnungsregeln, denen die (Gauss'schen) complexen Grössen, sowie die (Hamilton'schen)

Quaternionen unterliegen. Der zweite Abschnitt dehnt diese Untersuchungen aus auf beliebig viele Variable, und erweitert so jene beiden Gattungen von Symbolen in naturgemässer Weise zu den „complexen Ausdrücken n^{ter} Ordnung.“

Eine Anwendung findet diese Theorie auf das Problem des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Inhalt der Seitenflächen und auf die Borchardt'sche Erweiterung desselben (auf Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen).

Die Resultate des zweiten Abschnitts werden im dritten selbst wieder auf den Fall ausgedehnt, dass die Coefficienten (sowohl der Quadratsummen wie der mit ihnen vorgenommenen Transformationen) complexe Grössen sind. Hieraus erwachsen die sog. „bicomplexen Ausdrücke n^{ter} Ordnung“, mit denen sich kurz zuvor schon Weierstrass und Dedekind beschäftigt hatten. Zum Schlusse wird gezeigt, wie die erhaltenen Resultate auf beliebige quadratische Formen übertragen werden können.

Die Haupteigenschaften der „complexen Ausdrücke n^{ter} Ordnung“ hängen wesentlich von der Zahl n ab. Das Commutationsgesetz der Multiplication gilt nur für $n = 2$, die in jene Ausdrücke eingehenden „Haupteinheiten“, deren Anzahl 2^{n-1} ist, lassen sich von $n > 3$ ab in rationaler Weise auf eine geringere Anzahl unabhängiger, nämlich $1 + \frac{n(n-1)}{2}$, zurückführen. (Es sind dies die zuerst von Clifford entwickelten Einheiten.)

Es sollen nunmehr einige Hauptmomente der Entwickelung in Kürze hervorgehoben werden.

Die Grundforderung lautet, die lineare, reelle Substitution von der Determinante 1

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

so zu bestimmen, dass die Summe der x^2 identisch gleich der Summe der y^2 wird. Ist eine solche Substitution gegeben, so gehen daraus $2^{n-1}-1$ weitere mit der nämlichen Eigenschaft hervor, indem man in irgend zwei der Verticalreihen der α, Element für Element das Vorzeichen wechselt. Dann lässt sich nach Hurwitz zeigen, dass jedenfalls eine der 2^{n-1} zugehörigen

Determinanten

$$D = |\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kk}+1, \alpha_{k,k+1}, \ldots, \alpha_{k,n}|$$

von Null verschieden ist. Da diese gerade den gemeinsamen Nenner der Ausdrücke bildet, die man erhält, wenn man die Differenzen $x_i - y_i$ als lineare, ganze Functionen der

$$x_1+y_1, \quad x_2+y_2, \quad \ldots, \quad x_n+y_n$$

darstellt, so ist diese Darstellung immer möglich, nämlich:

$$x_i - y_i = \frac{1}{D}\sum_k (x_k+y_k)\left(D\varepsilon_{ik} - 2\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ik}}\right) \quad \binom{\varepsilon_{ik} = 0 \text{ für } i \lessgtr k}{\varepsilon_{ii} = 1}.$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\frac{1}{D}\left(D - 2\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ii}}\right) = \frac{\lambda_{ii}}{\lambda_0}, \quad -\frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ik}} = \frac{\lambda_{ik}}{\lambda_0} \qquad (\lambda_0 \lessgtr 0),$$

so folgt unmittelbar aus der Forderung $\Sigma(x_i^2 - y_i^2) = 0$, dass

$$\lambda_{ii} = 0, \quad \lambda_{ik} = -\lambda_{ki},$$

und dann stellt sich die Ausgangssubstitution in der eleganten Form dar:

$$\lambda_{1k}x_1 + \lambda_{2k}x_2 + \cdots + \lambda_0 x_k + \lambda_{k+1,k}x_{k+1} + \cdots + \lambda_{nk}x_n$$
$$= \lambda_{k1}y_1 + \lambda_{k2}y_2 + \cdots + \lambda_0 y_k + \lambda_{k,k+1}y_{k+1} + \cdots + \lambda_{kn}y_n.$$

Die weitere Entwickelung beruht im wesentlichen darauf, dass die Determinante der Coefficienten (links wie rechts), multiplicirt mit λ_0, als Summe von 2^{n-1} Quadraten erscheint:

$$\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \cdots + \lambda_{1234}^2 + \cdots$$

Also z. B. für $n = 3$ gleich $\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2$.

Hier drücken sich die höheren Glieder nach einem einfachen Gesetze durch die niederen aus, man hat z. B.

$$\lambda_{1234} = \frac{\lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}}{\lambda_0} \quad \text{u. s. f.}$$

Mit Hülfe imaginärer Symbole gelingt es nun, die Gleichungen der Ausgangssubstitution in eine einzige zusammenzufassen. So kommt für $n = 2$ die Gauss'sche Zerlegung:

$$(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12})(x_1 + i_{12}x_2) = (y_1 + i_{12}y_2)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12}) \qquad (i_{12}^2 = -1),$$

für $n = 3$:

$$(\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23})(x_1 + i_{12}x_2 + i_{13}x_3)$$
$$= (y_1 + i_{12}y_2 + i_{13}y_3)(\lambda_0 - i_{12}\lambda_{12} - i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23}).$$

Hier ist der erste Factor nichts anderes als die Hamilton'sche

Quaternion, nämlich

$$\lambda_0 + i_{12}\lambda_{12} + i_{13}\lambda_{13} + i_{23}\lambda_{23} = \lambda_0 + i\lambda_{12} + j\lambda_{23} + k\lambda_{31},$$

und die Reihenfolge der Factoren ist nicht mehr vertauschbar. Im allgemeinen entstehen so die „complexen Ausdrücke n^{ter} Ordnung“ mit ihren Rechnungsgesetzen.

Sind im besonderen die Coefficienten der Substitution, also auch die $\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_0}$ rationale Zahlen, so kann man die λ_{ik} und λ_0 als ganzzahlig annehmen. Auf diese Weise erkennt man, dass die Theorie der „ganzen“ Quaternionen auf das engste mit dem berühmten Problem der Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von vier Quadratzahlen verwachsen ist.

Es erweist sich für das weitere als zweckmässig, die Symbole $i_{12}, \ldots, i_{1234} \ldots$ durch nur n andere, die sogenannten „Primitivzeichen“ $k_1, k_2, \ldots, k_n$ auszudrücken. Bildet man dann die vier complexen Ausdrücke n^{ter} Ordnung:

$$\begin{cases} \mathit{\Delta} = \lambda_0 + k_1k_2\lambda_{12} + \cdots + k_2k_3\lambda_{23} + \cdots + k_1k_2k_3k_4\lambda_{1234} + \cdots, \\ \mathit{\Delta}_1 = \lambda_0 - k_1k_2\lambda_{12} - \cdots - k_2k_3\lambda_{23} - \cdots - k_1k_2k_3k_4\lambda_{1234} - \cdots, \\ X = x_1 + k_1k_2x_2 + \cdots + k_1k_nx_n, \\ Y = y_1 + k_1k_2y_2 + \cdots + k_1k_ny_n, \end{cases}$$

so lässt sich der Gesamtinhalt des Vorangehenden in der einen symbolischen Gleichung niederlegen:

$$\mathit{\Delta}X = Y\mathit{\Delta}_1.$$

Es wird umgekehrt bewiesen, dass diese eine Beziehung sämtliche Substitutionen von der Determinante 1 repräsentirt, welche eine Summe von n Quadraten wieder in eine solche überführen.

Die 2^{n-1} Ausdrücke $\mathit{\Delta}$, die zu den 2^{n-1} Determinanten D, resp. zu den 2^{n-1} Grössen $\lambda_0, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1234} \ldots$ entsprechend gehören, heissen, in Anlehnung an den Gauss'schen Ausdruck für $n = 2$, „associirt“ („un ensemble de compagnons“).

Die Umkehrung der Ausgangssubstitution, nämlich

$$y_k = \sum_i \alpha_{ik} x_i$$

führt zu dem, zu λ „conjugirten“ Ausdrucke:

$$\mathit{\Delta}' = \lambda_0 + k_2k_1\lambda_{12} + \cdots + k_4k_3k_2k_1\lambda_{1234} + \cdots$$

Das Product $\mathit{\Delta}\mathit{\Delta}'$ wird die oben erwähnte Summe der Quadrate

$\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \cdots + \lambda_{1234}^2 + \cdots$ und wird als „Norm“ von $\varDelta$, $N(\varDelta)$, bezeichnet. Allgemein ist die Norm eines Productes complexer Ausdrücke $\varDelta$ gleich dem Producte der Einzelnormen.

Mit Benutzung des Normbegriffes gelingt eine elegante Ableitung tiefer liegender Eigenschaften der Determinante:

$$D_s = |\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kk} + s_k, \alpha_{k,k+1}, \ldots, \alpha_{kn}|,$$

wo die s reelle Variable mit der Beschränkung $|s| > 1$ bedeuten. So z. B. ist der Wert von D_s ein Bruch mit dem Zähler $N(\varDelta)$, dessen Nenner das Product von $(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)$ in eine weitere einfache Norm ist.

Weiter stellen sich die Quadrate λ_0^2, $\lambda_{12}^2, \ldots, \lambda_{1234}^2, \ldots$ nunmehr, abgesehen von dem gemeinsamen Factor $\frac{N(\varDelta)}{2^n}$, dar als die Determinanten $D(s)$, wenn man eine gerade Anzahl von s durch negative, die übrigen durch positive Einheiten ersetzt hat.

Eine Ausdehnung der Eigenschaften complexer Ausdrücke n^{ter} Ordnung wird erzielt, wenn man in dem Ausdrucke

$$\varDelta = \lambda_0 + k_1 k_2 \lambda_{12} + \cdots + k_1 k_2 k_3 k_4 \lambda_{1234} + \cdots$$

wo, wie oben erwähnt, sich die λ_{1234} etc. rational durch die λ_0 und λ_{ik} darstellen lassen, an Stelle der λ ganz unabhängige complexe Ausdrücke n^{ter} Ordnung einführt. My.

R. Lipschitz. Recherches sur la transformation, par des substitutions réelles, d'une somme de deux ou de trois carrés en elle-même. Jordan J. (4) II. 373-440.

In sehr interessanter Art verbindet Herr Lipschitz die Transformation von Summen aus zwei resp. drei Quadraten in sich selbst mit der Einführung der Gauss'schen complexen Grössen resp. der Hamilton'schen Quaternionen. In beiden Fällen werden die allgemeinen Substitutionen, welche jene Transformation ermöglichen, mit Hülfe eines resp. dreier Symbole in je eine Gleichung zusammengefasst, aus welcher einmal die Rechnungsregeln dieser Symbole abgelesen, andrerseits sämtliche reelle Substitutionen bestimmt werden können. Dies leitet in beiden

Fällen auf die Betrachtung der Normen der eingeführten Zahlen und dadurch zu der Aufgabe: alle complexen Zahlen resp. alle Quaternionen zu finden, deren Norm eine gegebene Zahl ist; in engste Verbindung hierzu treten die Congruenzen

$$\xi_1^2+\xi_2^2\equiv 0 \pmod{p^\gamma},\quad \omega^2+1\equiv 0 \pmod{p^\gamma}$$

resp.

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\equiv 0 \pmod{p^\gamma},\quad \omega_1^2+\omega_2^2+1\equiv 0 \pmod{p^\gamma},$$

durch deren Lösungen die ganzen Zahlen hier wie dort in gewisse Klassen geteilt werden. Im ersten Falle gelangt man zu der Darstellung jeder Primzahl der Form $4k+1$ als Summe zweier Quadrate, wofür ein Beweis geliefert wird; im zweiten Falle wird die Zahl der Lösungen gleich $(p+1)p^{\gamma-1}$ gefunden, mit Ausnahme des Falles $p^\gamma=4$, und das Problem der Darstellung vollständig erledigt. Für die Quaternionen bleibt es noch übrig, alle möglichen Zerlegungen einer gegebenen Quaternion in Prim-Quaternionen zu liefern. Als Resultat ergiebt sich für solche, deren Coefficienten keinen gemeinsamen Teiler besitzen, und deren Norm das Doppelte einer ungeraden Zahl, oder selbst ungerade ist, dass den Normen der einzelnen Factoren eine beliebige Anordnung vorgeschrieben werden kann, wobei dann die Quaternionen selbst bestimmten Klassen angehören müssen; ist dagegen die Norm durch vier teilbar, so hat man bei den Factoren, deren Norm zwei ist, die Wahl unter 24 Quaternionen; ist dieselbe getroffen, so erfolgt alles Weitere wie oben, bis wiederum ein Factor 2 auftritt. Die durchgeführte Theorie gestattet es, alle Substitutionen mit rationalen Coefficienten anzugeben, die eine Summe von drei Quadraten in sich selbst transformiren. No.

G. Morera. Un piccolo contributo alla teoria delle forme quadratiche. Lomb. Rend. (2) XIX. 532-558.

Wenn man die Determinante einer quadratischen Form von n Variabeln mit $r(\leqq n-1)$ Paaren beliebiger Veränderlicher rändert, so erhält man eine Bildung, die sich, wie zuerst Frobenius nachgewiesen, für das Studium der genannten Formen als ganz

fundamental erwiesen hat. Der Verfasser nennt sie die „r^{te} Adjungirte" der ursprünglichen Form, und beweist den Satz:

„Wenn die $(r-1)^{te}$ Adjungirte identisch verschwindet, so ist die r^{te} Adjungirte ein vollständiges Quadrat." Daraus folgt ein einfacher Beweis des bekannten Resultates, dass dann die ursprüngliche Form nur noch von $n-r$ Variabeln abhängt.

In einer angehängten Note giebt Herr Bertini eine geometrische Interpretation obiger Sätze, indem er in einem Raume von n Dimensionen operirt. Es hängt dies mit Sätzen, die er und Herr Segre früher in dieser Richtung ermittelten, eng zusammen.

My.

H. Poincaré. Mémoire sur la réduction simultanée d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. J. de l'Ec. Pol. cah. LVI. 79-142.

Diese Arbeit ist als ein Anhang zu einer früher ausführlich (F. d. M. XV. 1883. 97) besprochenen anzusehen, in der der Verfasser die linearen Substitutionen untersuchte, welche eine quaternäre kubische Form in eine reducirte Form, resp. in sich selbst überführen.

Mit genau denselben Methoden wird hier der Fall durchgeführt, wo die erwähnte Form in eine quadratische und eine lineare zerfällt. Die Aufzählung der zahlreichen Unterfälle bietet zu wenig Interesse dar, um im Einzelnen angegeben zu werden.

My.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

G. Bruno. Sopra un punto della teoria delle frazioni continue. Torino Atti. XXI. 273-277.

Diese Note führt eine von Lagrange in den Zusätzen zur

Euler'schen Algebra gemachte Bemerkung näher aus. Es seien $\frac{P_i}{Q_i}$ die Näherungswerte eines Kettenbruchs x mit den positiven Teilnennern $a_0, a_1, a_2, \ldots$, so dass:

$P_{i+2} = P_{i+1}a_{i+1} + P_i;\quad Q_{i+2} = Q_{i+1}a_{i+1} + P_i, \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots);$

es sei ferner K eine beliebige ganze Zahl mit der Bedingung $0 < K < a_{i+1}$, und es werde

$$R = P_{i+1}K + P_i, \quad S = Q_{i+1}K + Q_i$$

gesetzt, so ist $\frac{R}{S}$ ein „Zwischenwert" zwischen $\frac{P_i}{Q_i}$ und $\frac{P_{i+2}}{Q_{i+2}}$; in vorliegender Note wird bewiesen, dass ein Bruch $\frac{A}{B}$, der sich dem wahren Werte x des Kettenbruchs mehr nähert als $\frac{R}{S}$ aus grössern Zahlen bestehen muss, ausgenommen, wenn

$$\frac{A}{B} = \frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}.$$

Wenn $\frac{A}{B}$ und $\frac{R}{S}$ von x in demselben Sinne abweichen, ist die Richtigkeit der Behauptung schon von Lagrange bewiesen, desgleichen auch im entgegengesetzten Falle, sobald nur $\frac{A}{B}$ zwischen $\frac{R}{S}$ und $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ liegt; Herr Bruno erledigt den noch übrigen Fall, wo $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ zwischen $\frac{A}{B}$ und x liegt.

Eine Ausnahme macht der Bruch $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$, welcher aus kleineren Zahlen als $\frac{R}{S}$ besteht und trotzdem näher an

$$x = \frac{P_{i+1}x_{i+1} + P_i}{Q_{i+1}x_{i+1} + Q_i}$$

liegt, wofern

$$K < \tfrac{1}{2}\left\{x_{i+1} - \frac{Q_i}{Q_{i+1}}\right\}.$$

Solche ungünstigen Werte von K existiren immer, sobald $a_{i+1} \geqq 3$, manchmal auch, wenn $a_{i+1} = 2$ ist. R. M.

O. Stolz. Ueber Convergenz rein periodischer Kettenbrüche. Innsbruck. Ber. 1-2.

Vorläufige Mitteilung eines Satzes, den der Verfasser seitdem ausführlich behandelt hat in seinen „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“. Bd. II, pag. 299ff. R. M.

M. d'Ocagne. Sur certaines suites de fractions irréductibles. S. M. F. Bull. XIV. 93-98.

Eine Reihe von irreductibeln echten Brüchen $\frac{a_m}{b_m}$, für welche

$$b_m + \alpha a_m \leqq N$$

(α und N ganze Zahlen, N positiv) sei nach der Grösse geordnet. Jede solche Reihe $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ hat alsdann die Eigenschaft, dass

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{a_{m+1} + a_{m-1}}{b_{m+1} + b_{m-1}}$$

wie von Halphen gezeigt worden ist. (Vgl. F. d. M. IX. 120—121.) Es werden mehrere Eigenschaften solcher Reihen und speciell angegeben, wie aus $\mathfrak{S}(0, N)$ unmittelbar $\mathfrak{S}(\alpha, N)$ abgeleitet werden könne. Geometrische Repräsentation der Resultate.

Sn.

M. d'Ocagne. Sur certaines suites de fractions irréductibles. Brux. S. sc. X. B. 90-108.

Ausdehnung der Eigenschaften der Farey'schen Reihen auf allgemeinere Reihen, bei denen die betrachteten Brüche die Einheit übersteigen können. Mn. (Lp.)

Sleschinsky. Zur Frage von der Kettenbruchentwickelung der analytischen Functionen. Od. Ges. VI. 33-104. (Russisch).

Die Methode, welche Lagrange benutzt hat, um die Kettenbruchentwickelung der Function y zu erhalten, die der Gleichung

$$N + Py + Qy^2 + R\frac{dy}{dx} = 0$$

genügt, wird von dem Verfasser angewandt, um zu zeigen, dass die Nenner und Zähler der Näherungsbrüche einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Es werden dann als specielle Fälle die Resultate von Laguerre's Arbeiten (Vgl. F. d. M. XII. 332-334, XVI. 374) gefunden. Im zweiten Capitel der Arbeit behandelt der Verfasser die Frage nach der Convergenz der Kettenbrüche, indem er der Veränderlichen und den Coefficienten complexe Werte giebt. Wi.

A. A. Markoff. Ueber die Verteilung der Wurzeln einiger Gleichungen. Chark. Ges. 89-98. (Russisch).

Die in der Abhandlung betrachteten Gleichungen erhält man, wenn man die Function

$$F(z) = \int_a^b \frac{g(y)dy}{z-y} - \xi \int_c^d \frac{f(y)dy}{z-y}$$

in einen Kettenbruch entwickelt; a, b, c, d sind reell ($a < b < c < d$), ξ und die Werte der Functionen $g(y)$, $f(y)$ sind positiv vorausgesetzt. Wenn $\varphi_n(z)$ den Nenner des n^{ten} Näherungsbruches bezeichnet, so besteht die Frage, welche hier behandelt ist, in der Bestimmung der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(z) = 0$, welche in den Intervallen $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c), (c, d), $(d, +\infty)$ liegen. Wi.

C. Possé. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St. Pétersbourg.

Die Theorie der algebraischen Kettenbrüche und ihrer Anwendungen hat sich in den letzten Jahren durch wichtige Resultate bereichert, besonders Dank den Arbeiten der russischen Mathematiker Tschebyscheff, Markoff, Posse u. a. Die meisten dieser Resultate in einem Buche zusammenzufassen und der mathematischen Welt zugänglicher zu machen ist der Zweck der Arbeit des Herrn Posse. Die Arbeit ist in fünf Capitel geteilt. Das erste Capitel enthält die Beweise der Grundeigenschaften

der Näherungsbrüche $\frac{\varphi_n}{\psi_n}$ in der Zerlegung des Integrals von der Form $\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}$ in einen Kettenbruch. Dann folgen einige Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Nennern der Näherungsbrüche dieses Integrals einerseits und der Integrale

$$\int_a^b \frac{(y-a)f(y)\,dy}{z-y}, \quad \int_a^b \frac{(b-y)f(y)\,dy}{z-y},$$

$$\int_a^b \frac{(y-a)(b-y)f(y)\,dy}{z-y}$$

andererseits entwickeln, und einige Theoreme über die gegenseitige Verteilung der Wurzeln der betrachteten ganzen Functionen.

Das zweite Capitel enthält die Anwendung der Eigenschaften, welche in dem Capitel 1 bewiesen sind, auf die Bildung des Polynoms der Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate und auf die Bildung des Restgliedes der Reihe für

$$\int_a^b f(x)\Omega_1(x)\Omega_2(x)\,dx;$$

diese Reihe ist

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{\int_a^b f(x)\,\Omega_1(x)\,\varphi_m(x)\,dx \cdot \int_a^b f(x)\,\Omega_2(x)\,\varphi_m(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\varphi_m^2(x)\,dx}.$$

Für alle Anwendungen ist es sehr wichtig, den Ausdruck des Restgliedes der Reihe zu kennen. Der Herr Verfasser reproducirt hier die Analyse, die er schon früher veröffentlicht hat (Darboux Bull. (2) VII. 214, vgl. F. d. M. XV. 1883. 237). Der Ausdruck für das Restglied ist

$$R_n = \frac{\int_a^b \varphi_n^2(x)f(x)\,dx}{\left[\frac{d^n\varphi_n}{dx^n}\right]^2} \cdot \Omega_1^{(n)}(\xi)\,\Omega_2^{(n)}(\eta),$$

wo ξ und η zwei Zahlen zwischen a und b sind. Auf diesem Ausdrucke des Restgliedes beruht der Beweis der Tschebyscheff'-

schen Ungleichheiten: $\int_0^1 uv dx > \int_0^1 u dx \cdot \int_0^1 v dx$, wenn die Functionen u, v gleichzeitig zu- oder abnehmen zwischen den Grenzen 0 und 1 der Veränderlichen, und

$$\int_0^1 uv dx < \int_0^1 u dx \cdot \int_0^1 v dx$$

im entgegengesetzten Falle.

Das dritte Capitel handelt von den Eigenschaften der Functionen T_n, welche den Legendre'schen ähnlich sind, d. h. der Nenner der Näherungsbrüche der Zerlegung des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{z-y} dy.$$

Alle diese Eigenschaften: die Differentialgleichung, der diese Functionen genügen, der Ausdruck der Function T_n durch die n fache Derivirte, die Ausdrücke der erzeugenden Function für T_n, der Discriminante und einiger anderer symmetrischen Functionen der Gleichung $T_n(z) = 0$ und das Theorem von Stieltjes über das Maximum der Function

$$\Pi(x_i - x_k)^2 (1+x_1)^\alpha \ldots (1+x_n)^\alpha (1-x_1)^\beta \ldots (1-x_n)^\beta,$$

sind aus der Definitionsgleichung der Functionen T_n:

$$\int_{-1}^{+1} (1+z)^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1} T_n . \theta_{n-1} dz = 0,$$

wo θ_{n-1} eine willkürliche ganze Function des Grades $\leqq n-1$ ist, entwickelt.

Das vierte Capitel enthält die Anwendung der Theorie des ersten Capitels auf die angenäherte Berechnung der Integrale. Man hat nämlich

$$\int_a^b f(x)\Omega(x)dx = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi_n(z_i)}{\varphi_n'(z_i)} \Omega(z_i) + R_n,$$

wo z_i die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ sind und R_n eine lineare Function der Coefficienten a_{2n}, a_{2n+1}, ... in der Entwickelung der Function Ω in die unendliche Reihe:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n} + \cdots$$

Man kann immer zwei Grenzen bestimmen, zwischen welchen R_n enthalten ist. Für diesen Zweck benutzt der Verfasser die

Hermite'sche Interpolationsformel (Borchardt J. LXXXIV., F. d. M. IX. 1877. 312). Man erhält dann für R_n den Ausdruck

$$\frac{\Omega^{(2n)}(\zeta)}{1.2\ldots 2n}\int_a^b \varphi_n^2(z):f(z)\,dz,$$

wo ζ zwischen den Grenzen a und b liegt. Dieser Ausdruck ist zuerst von Herrn Markoff in seiner Arbeit gegeben: „Ueber einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche". (F. d. M. 1885. XVII. 168.) Dieselbe Hermite'sche Formel giebt jetzt dem Verfasser auch andere ähnliche Ausdrücke für die angenäherte Berechnung der Integrale, in welche die Functionen W_n, U_n, V_n, d. h. die Nenner der Näherungsbrüche der Integrale

$$\int_a^b \frac{f(y)(y-a)(b-y)\,dy}{z-y},\quad \int_a^b \frac{f(y)(y-a)}{z-y}\,dy,\quad \int_a^b \frac{f(y)(b-y)}{z-y}\,dy$$

eintreten. Auf diese Ausdrücke stützt sich der Beweis der vier Ungleichheiten, welche von Herrn Markoff in dem oben citirten Werke bewiesen sind.

Das fünfte Capitel ist der Lösung des Problems gewidmet, das Maximum und das Minimum des Integrals $\int_a^x \Omega(y)f(y)\,dy$ nach den gegebenen Werten der Integrale

$$\int_a^b f(y)\,dy,\quad \int_a^b yf(y)\,dy,\quad \ldots,\quad \int_a^b y^\mu f(y)\,dy$$

zu finden, wo x eine gegebene Zahl zwischen den Grenzen a und b ist, $f(y)$ keine negativen Werte annehmen kann. Das Problem ist bekanntlich von Tschebyscheff gestellt für den Fall $\Omega(y)=1$ in seiner Abhandlung: „Sur les valeurs limites des intégrales" (Journ. de Math. 1874); die erste ausführliche Lösung des Problems in seiner Allgemeinheit ist von Herrn Markoff in dem oben citirten Werke gegeben; die Ausnutzung der Eigenschaften der Functionen U_n, V_n, W_n gestattet jedoch Herrn Posse, die Beweise in einfacherer Gestalt zu liefern; er giebt auch einige neue Sätze in Bezug auf die Verteilung der Wurzeln verschiedener Gleichungen, welche zur Lösung der betrachteten Frage unentbehrlich sind.

Weiter zeigt der Verfasser, wie seine Formeln für die Auf-

findung des Maximums und Minimums des Integrals

$$\int_a^x \Omega(z) f(z) dz$$

in die Formeln übergehen, welche von Herrn Tschebyscheff in der Abhandlung: „Sur la représentation des valeurs limites des intégrales“ für den speciellen Fall $\Omega = 1$ gegeben sind.

Am Ende sind einige Fragen der Maxima und Minima beantwortet, welche sich auf die früher gelöste Aufgabe reduciren, z. B. die Frage, das Maximum und Minimum der Function $f(x)$ zwischen den Grenzen 0 und 1 zu finden nach den gegebenen

$$s_0 = \int_0^1 f(y) dy, \quad \ldots, \quad s_\mu = \int_0^1 y^\mu f(y) dy$$

und dem Anfangswerte der Function $f(0)$. Wi.

P. Mansion. Principe fondamental de la théorie des fractions continues périodiques. Mathesis. VI. 80-84.

Mn.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

LAPLACE. Oeuvres complètes. Tome VII. Théorie des probabilités. Paris. Gauthier-Villars.

JOH. v. KRIES. Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Eine logische Untersuchung. Freiburg i. Br. Mohr. 298 S.

Der Autor verfolgt, wie er im Vorwort bemerkt, bei dieser Veröffentlichung einen doppelten Zweck; er will zunächst die Aufmerksamkeit der Philosophen auf die Fundamental-Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lenken; in zweiter Reihe will er eine Scheidung des Richtigen und Falschen, des Wertvollen und Bedeutungslosen, welches nach seiner Auffassung in allen bisher erschienenen systematischen Darstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie unter einander gemischt enthalten ist, wenigstens in grossen Zügen vornehmen. Aus diesen Bemerkungen wie aus dem dem Titel beigefügten Zusatz „eine logische Untersuchung“ geht bereits hervor, dass der Verfasser sich weniger an den Mathematiker als an den Philosophen wendet. Noch klarer wird dies aus folgendem gewissermassen entschuldigenden

Passus des Vorworts: „Die Natur des Gegenstandes brachte es mit sich, dass einige Teile der Untersuchung sich in Gedankengängen bewegen, welche nur dem mit mathematischen Vorstellungen einigermassen vertrauten Leser ganz geläufig sein werden. Von diesen Abschnitten können einige (Cap. V und VIII) einfach übergangen werden, ohne dass das Verständnis der Hauptsachen dadurch beeinträchtigt wird. Nicht so die Expositionen S. 38—74, deren Inhalt für alles Folgende einigermassen wesentlich ist. Da vielleicht dem einen oder andern Leser das Verständnis gerade dieses Abschnitts schwierig erscheint, so mag hier die Bemerkung Platz finden, dass man die wichtigsten Ergebnisse sich wird aneignen können, auch wenn man die in jenen Teilen enthaltene strenge Exposition übergeht, und sich mit einer, ich darf wohl sagen, populären Auffassung begnügt."

Der Inhalt dieses interessanten Buches ist wesentlich kritischer Natur, und es ist daher sehr schwierig, denselben auszugsweise anzugeben, will man dem Autor gerecht werden. Derselbe geht davon aus, dass die die Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffende Literatur in Bezug auf die principiellen Fragen nur sehr Unzulängliches bietet, „dass die Mathematiker zwar den rechnenden Teil der Theorie in ausgezeichneter Weise entwickelt", „daneben aber die Grundlagen der ganzen Lehre meist in einer Weise behandelt haben, welche an grossen Unklarheiten leidet, und die mannigfaltigsten Zweifel bestehen lässt". Wir glauben, dass der Verfasser bei dieser Behauptung zu weit geht, und dass er selbst ohne die von ihm erstrebte Klarheit erreicht zu haben, die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie in zu enge Grenzen einschliessen will. Zwar sind wir völlig mit ihm darin einverstanden, dass man mit der Aufstellung von numerischen Wahrscheinlichkeiten vielfach Missbrauch getrieben, und die Rechnung häufig auch da angewendet hat, wo die zulässigen Bedingungen für dieselbe nicht vorhanden waren, und wir können ihm nur dankbar sein, dass er immer und immer wieder die Notwendigkeit betont, die Grundlagen für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf das sorgfältigste zu prüfen. Indes von gewissen Voraussetzungen über die „Constanz der allgemeinen

Bedingungen, die Unabhängigkeit und Chancen-Gleichheit der Einzelfälle" (p. 147) können wir uns auch auf dem Gebiet der Zufallspiele, für welches der Verfasser die Wahrscheinlichkeitsrechnung im vollen Umfang gelten lassen will, nicht freimachen, und diese Voraussetzungen sind nach unserer Auffassung auch auf dem Gebiete der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft zulässig, wenn man nur wirklich eine genügend grosse Anzahl von Einzelbeobachtungen hat, so dass die Verschiedenheit der Einzelfälle verschwindet. Bezieht sich doch die Wahrscheinlichkeitsrechnung allemal auf einen gewissermassen ideellen Zustand, dem wir uns mehr und mehr nähern können, ohne ihn je ganz zu erreichen. Dagegen haben wir uns zu hüten vor der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf solchen Gebieten, auf denen uns nur eine kleine Zahl von Erfahrungen zu Gebote steht, wie z. B. bei Zeugenaussagen oder bei therapeutischen Erfolgen.

Wir haben das vorliegende Buch bereits als ein hoch interessantes bezeichnet; der Verfasser liebt es, neue Wege einzuschlagen, auch wenn er zu Resultaten gelangen will, die wir sonst gewohnt sind, auf „schulmässigem" Wege zu erreichen. Aber gerade die Anregung, welche durch seine Darstellung gegeben wird, fordert auch andererseits gewissermassen den Widerspruch heraus. Dennoch wollen wir denselben unterdrücken, weil wir fürchten, wir könnten sonst bei denen, die das Buch noch nicht kennen, ein ungünstiges Vorurteil hervorrufen, und weil wir doch wünschen, dass dasselbe auch in mathematischen Kreisen zahlreiche Leser finden möge. Wenn der Verfasser in seinem Bestreben, das Falsche auszuscheiden, nach unserer Ansicht hier und da zu weit geht, und als falsch bezeichnet, was diese Bezeichnung keineswegs verdient, so halten wir das für wenig bedenklich. Die Folge wird nur die sein, dass man festere Begründungen und strengere Beweise als bisher für die mit Unrecht angegriffenen Sätze aufstellen wird. Ls.

N. Schwaiger. Uebersetzung des Werkes „Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten" von P. S. de Laplace. Leipzig. Duncker & Humblot. 198 S.

Wie wir aus dem Vorwort des Uebersetzers erfahren, ist diese Schrift von Laplace bisher nur ein einziges Mal, und zwar im Jahre 1819 durch Tönnies ins Deutsche übersetzt worden. Diese Uebersetzung ist aber längst vergriffen, und wir können es Herrn Schwaiger nur Dank wissen, dass er eine neue Uebersetzung unternommen hat, zumal dies in höchst gelungener Weise geschehen ist. Wir haben eine Reihe von Stellen, bei denen es uns auffiel, wie absolut modern dieselben klingen, wie scheinbar den Anschauungen unserer Zeit entsprungen und keineswegs als ob sie im Anfang dieses Jahrhunderts geschrieben worden, mit dem Original verglichen, und können bezeugen, dass sie wirklich eine vollkommen genaue und getreue Wiedergabe dessen sind, was Laplace geschrieben. Darin bekundet sich ja der grosse Meister, dass seine Worte nicht veralten. Ueber den Inhalt des Werkes brauchen wir natürlich nichts zu bemerken.

Der Uebersetzung ist die letzte Auflage des Essai philosophique, welche Laplace selbst besorgt hat, zu Grunde gelegt; der Uebersetzer hat auch einen kurzen erläuternden Anhang hinzugefügt und durch Noten an den betreffenden Stellen angemerkt, wo in der Théorie analytique des probabilités, Aufl. von 1812, die mitgeteilten Lehren ausführlicher begründet werden.

Ls.

A. Robertson. A problem in combinations. Edinb. M. S. Proc. IV. 78-87.

Folgendes ist die behandelte Aufgabe: Es seien Sätze von Bällen verschiedener Farbe gegeben; auf wie viel Arten können diese reihenweise so angeordnet werden, dass nie zwei Bälle derselben Farbe zusammentreffen? Drei Sätze, m weisse, n schwarze, p rote, werden betrachtet; zuerst wird die Aufgabe für besondere Werte von m, n, p gelöst, danach wird die allgemeine Lösung ermittelt.

Gbs. (Lp.)

E. Gelin. Sur les combinaisons avec répétition. Mathesis VI. 175-178.

Mn.

M. Frolow. Les carrés magiques. Nouvelle étude. Paris. Gauthier-Villars. VI u. 46 S. gr. 8°. VII. Taf.

Der Verfasser, dessen Schrift „Le problème d'Euler et les carrés magiques" wir in den F. d. M. XVI. 1884. 140 angezeigt haben, giebt in dem vorliegenden Hefte einen Nachtrag zur ersten Arbeit. Die Herren Éd. Lucas und V. Coccoz haben ihm einige dort gemachte Versehen angezeigt; ferner haben ihm die Herren Delannoy, Feisthamel und A. H. Frost litterarische Mitteilungen gemacht, zum Teil Ergebnisse eigener Untersuchungen übergeben. Das erste Capitel (S. 1—13), welches die Artikel XI und XII des älteren Buches zu ersetzen bestimmt ist, behandelt in gründlicher Weise die Eigenschaften der magischen Quadrate der Wurzel 4, Capitel II (14—17) magische Quadrate höherer Wurzeln als 4, Capitel III (22—26) die geränderten magischen Quadrate. In drei Noten erläutert der Verfasser sodann die von Herrn Delannoy benutzte Methode zur Auffindung der Anzahl der Quadrate der Wurzel 4; die von demselben Herrn angegebene Methode zur Aufzeichnung des Ganges des Springers auf beliebigem Schachbrette, wenn man die Aufgabe für Schachbrette mit 5, 6, 7, 8 Feldern in der Seite lösen kann; endlich die von Herrn Lucas aus seinen Principien der Geometrie des Gewebes abgeleitete Theorie der diabolischen Quadrate. Die Tafeln I bis VI geben Typen der magischen Quadrate mit 4 Feldern in der Seite, Tafel VII diabolische Quadrate mit 5 Feldern und zwei Schemata nach Herrn Frost für das Springerproblem auf einem Schachbrett von 100 Feldern unter zwei Annahmen über das Gesetz eines Sprunges. In der Vorrede erklärt der Verfasser, dass er in diese Studie nur solche Methoden aufgenommen hat, die ihm neu zu sein schienen, dass er es dagegen vermieden hat, solche zu verwenden, die schon andere Autoren benutzt haben.

Lp.

J. B. KÜRTEN. Theorie der magischen Zahlenquadrate und Kreise. Köln. Heinrich Theissing. 72 S. 8°.

Der Verfasser giebt Methoden an, nach denen jeder ohne mathematische Vorbildung magische Quadrate ausfüllen kann. Im ersten Teile wird das bekannte Verfahren für Quadrate mit ungerader Felderzahl in der Seite erläutert, im zweiten dasjenige für Quadrate mit gerader Felderzahl. Der dritte Teil lehrt magische Quadrate auf Grund einer vorgeschriebenen Summe zu bilden, der vierte behandelt magische Kreise und Rösselsprünge nebst der Berechnung der Schwingungen aller musikalischen Töne nach dem Quintenzirkel, ein Thema, dessen Zusammenhang mit dem Gegenstand des Buches nicht klar ist und das auch ohne Verbindung mit der bekannten akustischen Theorie der Temperatur geblieben ist. Der Verfasser ist offenbar mit der einschlägigen Litteratur nicht vertraut, da er den Inhalt seines Werkes für neu oder doch seine Methoden für unbekannt hält. Lp.

FR. HOFMANN. Sur la marche du Cavalier. Nouv. Ann. (3) V. 224-226.

Es wird nachgewiesen, dass auf einem Schachbrett von n^2 Feldern, wo n eine ungerade Zahl sein soll, ein geschlossener Rösselsprung nicht möglich ist; d. h. auf einem solchen Schachbrett kann der Springer nicht so geführt werden, dass er alle Felder berührt und zu dem Ausgangsfeld zurückkehrt. Ls.

H. SCHUBERT. Das Skatspiel im Lichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hamburg. J. F. Richter.

Der Verfasser hat die Wahrscheinlichkeitsbrüche für die wichtigsten im Skatspiel vorkommenden Chancen berechnet und zusammengestellt, um dem Skatspieler für sein auf Erfahrung beruhendes Urteil ein objectives Kontrollmittel an die Hand zu geben. Eine kurze Erläuterung über die Ableitung der Wahr-

scheinlichkeitsbrüche ist beigefügt. Die in Betracht gezogenen Wahrscheinlichkeiten beziehen sich hauptsächlich auf die Verteilung der Karten unter die einzelnen Spieler und den Skat.

Ls.

M. DU CHATENET. Étude sur les paris de courses. Nouv. Ann. (3) V. 327-348, 380-396, 408-424, auch sep. bei Gauthier-Villars. Paris.

Es ist dies eine längere Abhandlung, welche sich damit beschäftigt, die Regeln für solche Combinationen von Wetten bei den Pferderennen aufzustellen, bei denen der Wettende, mag der Ausfall des Rennens sein, welcher er wolle, einen Gewinn realisirt. Da die Wetten nicht nur dahin gerichtet sind, dass dies oder jenes Pferd einen Preis gewinnt, sondern auch auf das Gegenteil, dass es nicht gewinnt, so lassen sich zahlreiche derartige Combinationen aufstellen. Nach den Aeusserungen des Autors handelt es sich keineswegs um eine lediglich theoretische Untersuchung; vielmehr scheinen in Paris diese Wetten vielfach vorzukommen.

Die einzelnen Pferde haben eine Klasse (cote) $a, b, c, \ldots, m$, welche angiebt, wie vielmal der Einsatz von dem Verlierenden der Wette, der ausserdem den Einsatz zurückgeben muss, bezahlt werden soll. Diese Klasse wird nach dem Urteil, welches sich der Wettende über die Pferde gebildet hat, festgestellt, und ist für verschiedene Personen verschieden. Nennen wir den Einsatz P, so ist die mathematische Hoffnung auf die Summe, welche beim Gewinnen der Wette bezogen wird, $(m+1)P$, und ist μ die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, so folgt

$$\mu = \frac{1}{m+1}.$$

Es sollte also

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \cdots = 1$$

sein.

Dies ist aber in Wirklichkeit fast niemals der Fall, und darauf gründet sich die Möglichkeit, die Wetten so einzurichten, dass sie unter allen Umständen einen Gewinn geben. Ls.

M. Weill. Question de probabilité. S. M. F. Bull. XIV. 158-159.

Es handle sich um k verschiedene Ereignisse, alle mit derselben Wahrscheinlichkeit; es werden p Versuche gemacht, und man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes der betrachteten Ereignisse in der Versuchsreihe mindestens zweimal hintereinander auftreten werde.

Bezeichnen die Buchstaben $a, b, c, \ldots$ die k Ereignisse und sei $X(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis a mindestens zweimal auftrete. Da die Anzahl der möglichen Fälle k^p ist, so wird $k^p X(p)$ die Anzahl der günstigen Fälle. Diese Anzahl wird andererseits gefunden, wenn man die Anzahl der bei $(p-1)$ Versuchen auftretenden günstigen Fälle mit k multiplicirt, also $k^p X(p-1)$, und die Anzahl der ungünstigen Fälle bei den $(p-1)$ Versuchen, welche mit a enden, hinzufügt. Diese ist gleich der Anzahl der ungünstigen Fälle überhaupt minus der Anzahl derjenigen, die nicht mit a endigen, also gleich

$$k^{p-1}(1-X(p-1))-k^{p-2}(k-1)(1-X(p-2)).$$

Es ergiebt sich

$$X(p) = \frac{k-1}{k} X(p-1) + \frac{k-1}{k^2} X(p-2) + \frac{1}{k^2}.$$

Ls.

E. Cesaro. La rottura del Diamante. Batt. G. XXIV. 124-127.

Es handelt sich um die folgende Aufgabe: Ein Juwelier erhält die Nachricht, dass einer seiner rohen Diamanten in drei Stücke gebrochen sei. Man macht ihm den Vorschlag, diese Stücke zu verkaufen, ohne dass sie vorher besehen werden. Der Preis ist auf der Grundlage zu bestimmen, dass der Wert eines rohen Diamanten proportional ist dem Quadrat seines Volumens. Wird der Preis des ursprünglichen rohen Diamanten als Einheit genommen, und sind x, y, z die Verhältnisse der Volumina der drei Stücke zu dem ungebrochenen Stein, so wird der Preis der

drei Stücke

$$w = x^2 + y^2 + z^2.$$

Da die Summe der drei Verhältnisse x, y, z gleich der Einheit ist, so können alle möglichen Arten, wie der Bruch erfolgte, durch einen Punkt P bezeichnet werden, der in einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe 1 belegen ist. Die Entfernungen zwischen P und den Seiten ergeben die Verhältnisse x, y, z. Bezeichnet R die Entfernung zwischen P und dem Schwerpunkt des Dreiecks G, so ergiebt sich

$$w = \tfrac{3}{2}R^2 + \tfrac{1}{3}.$$

Alle unzähligen Möglichkeiten des Bruches, bei denen der Wert w derselbe bleibt, werden dargestellt durch die Punkte des Umfanges eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{\tfrac{2}{3}(w-\tfrac{1}{3})}$, dessen Scheitel in G liegt, und es findet sich nach einigen weiteren Betrachtungen als der mittlere Wert des Preises

$$\sigma = \tfrac{1}{2},$$

so dass der Käufer die Hälfte des ursprünglichen Wertes anlegen darf.

Sodann wird die Frage aufgeworfen, ob der Käufer ein gutes Geschäft macht, und es wird gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, die Stücke haben einen geringeren Wert,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 0{,}60460$$

wird, dass es also wahrscheinlicher ist, dass der Juwelier ein gutes Geschäft gemacht habe, dass damit aber das Gesetz der Billigkeit nicht verletzt werde; denn während der mögliche Gewinn des Käufers sich auf 100 Procent steigern kann, wird derselbe für den Juwelier niemals 50 Procent übersteigen.

Der Verfasser entwickelt weiter die Formeln für dieselben Fragen, wenn der Stein in n Stücke gebrochen ist, und fügt ausserdem eine Entwickelung bei für die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein willkürlich genommenes Dreieck ein stumpfwinkliges oder ein spitzwinkliges ist. Er findet die Wahrscheinlichkeit des letzteren gleich $\tfrac{1}{4}$. Ls.

E. CATALAN. Problèmes et théorèmes de probabilité. Belg. Mém. XLVI. 16 S.

Anwendung folgender Regel: „Die Wahrscheinlichkeit eines künftigen Ereignisses ändert sich nicht, wenn die Ursachen, von denen es abhängt, unbekannte Wandelungen erleiden.

Mn. (Lp.)

E. CATALAN. Rapport sur un mémoire intitulé: Sur l'étude des événements arithmétiques, par M. É. Cesaro. Belg. Bull. (3) XI. 139-145.

Bericht über eine Arbeit aus der asymptotischen Arithmetik; den Inhalt bildet die Lösung der folgenden Aufgabe: „Ist $X = F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine beliebige Grösse, welche mittels gegebener Operationen aus den Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ erzeugt ist, so soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass die Zahl X eine Eigenschaft Ω besitze". Die Noten des Berichtes enthalten eine Skizze der Lösung. Mn. (Lp.)

E. CESARO. Sur l'étude des événements arithmétiques. Belg. Mém. S. É. XLVII. 13 S.

Dies ist die im vorstehenden Referate besprochene Arbeit, über welche Herr Catalan der Akademie berichtet hatte.

Mn. (Lp.)

F. GALTON. Family likeness in stature. Lond. R. S. Proc. XL. 42-63.

J. D. H. DICKSON. Appendix to family-likeness in stature. Lond. R. S. Proc. XL. 63-73.

Es wird bezweckt, durch Formeln die Beziehung auszudrücken, welche zwischen den Gestalten besonderer Menschen und denen ihrer Verwandten in jedem gegebenen Grade besteht, um die Vorgänge klar zu stellen, durch welche allmählich Familieneigentümlichkeiten der Gestalt verschwinden, bis in

jedem entfernteren Grade der Verwandtschaft die Gruppe der Verwandten nicht unterscheidbar wird von einer nach Belieben aus der allgemeinen Bevölkerung ausgewählten Gruppe. Die Arbeit enthält Tabellen und Diagramme, der Appendix einige mathematische Forschungen hinsichtlich der Häufigkeitsfläche, des mittleren Fehlers u. s. w. Cly. (Lp.)

F. Galton. Family likeness in eye-colour. Lond. R. S. Proc. XL. 402-416.

Cly.

F. Y. Edgeworth. Problems in probability. Phil. Mag. (5) XXII. 371-384.

Die in diesem Artikel behandelten Aufgaben sind dem Bankgeschäfte entnommen; es wird die Annahme gemacht, dass das Exponentialgesetz der Häufigkeit für die zu beliebiger Zeit an den Banquier gestellten Forderungen gilt. Folgendes ist das Hauptproblem: „Gegeben eine Reihe von Bankrimessen (z. B. Noten in Händen des Publikums oder der Reserve); die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die nächste Rimesse oder die Rimessen in nächster Zeit nicht gewisse Grenzen übersteigen werden". Gbs. (Lp.)

W. J. C. Miller. Infinitesimal or zero? Ed. Times. XLIV. 24-27.

„Ein willkürlicher Punkt wird auf einer gegebenen Linie angenommen; welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass derselbe mit einem vorher bezeichneten Punkt zusammenfalle?" Diese Frage war gelegentlich einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe in Ed. Times XLIII. 86 erhoben worden; Herr Dodgson behauptete, die Wahrscheinlichkeit sei eine unendlich kleine Grösse, oder „angenähert" gleich Null, Herr Simmons dagegen, die gesuchte Wahrscheinlichkeit sei „absolut" gleich Null. Der Herausgeber der Ed. Times stellte daher diese im Grunde alte Frage nach

dem Wesen des Unendlichkleinen zur Erörterung. Die beiden genannten Geometer und ausserdem die Herren Biddle, MacColl, Knowles teilen ihre Gedanken über die Aufgabe mit, zuweilen mit vielem Witz und Humor, ohne jedoch den Kern der Frage nach dem Wesen der unendlich kleinen Grösse, als einer „Variablen“ mit der Grenze Null, scharf zu kennzeichnen. Ueber eine von Herrn C. Simmons gestellte, ähnliche Frage (8200), ob, wenn zwei Geraden in einer Ebene beliebig gezogen werden, die Wahrscheinlichkeit ihres Parallelismus Null oder unendlich klein sei, macht Herr D. Biddle in Ed. Times XLV. 53 im übrigen sehr verständige Bemerkungen. Lp.

W. J. C. Miller, C. Simmons, D. Biddle. Solutions of questions 8166, 7713. Ed. Times. XLIV. 69-76.

„Drei oder mehrere Münzen werden willkürlich auf einen rechtwinkligen Tisch geworfen. Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass sie alle auf einer beliebigen, zu einer Tischkante parallel gezogenen Geraden liegen.“ (Gestellt von C. Simmons.) „Wenn ein Florin, ein Schilling und ein Sixpence willkürlich auf einen rechteckigen Tisch geworfen werden, durch eine allgemeine Lösung die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass die drei Münzen alle auf einer zu einer Tischkante parallel gezogenen Geraden liegen.“ (Gestellt von W. J. C. Miller.) Die von Herrn Biddle gegebene Lösung dieser Aufgaben berücksichtigt offenbar nicht genügend die Schwierigkeiten, welche dann entstehen, wenn die gezogene Parallele von der betreffenden Kante um weniger als den Halbmesser der Münze entfernt ist. In der sich an diese Lösung anknüpfenden Discussion zwischen den Herren Biddle und Simmons wird der Streit durch eine Gegenrechnung des Letzteren zuletzt zum Stillstand gebracht, was seine nicht immer klaren und wohl auch nicht durchweg richtigen Einwände nicht vermocht hatten. Lp.

W. J. C. Miller, D. Biddle. Solution of question 8282. Ed. Times XLV. 113-114.

Folgendes ist die von Herrn Miller gestellte, von Herrn Biddle gelöste Aufabe: Eine Münze falle beliebig auf ein Gitter, das aus parallelen, in gleichem Abstande stehenden Drähten in einer horizontalen Ebene gebildet wird. Jenachdem der Abstand zwischen den Drähten gleich 1) dem Radius, 2) dem Durchmesser, 3) dem Umfange der Münze ist, werden die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten für das Durchfallen der Münze mit Anschlag an das Gitter gegeben durch

$$w_1 = \tfrac{1}{6}\pi + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}, \quad w_2 = \tfrac{1}{4}\pi, \quad w_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Lp.

D. Biddle. Solution of question 8100. Ed. Times. XLIV. 76-78.

„Drei Kreise mit den Durchmessern 1, 2, 3 werden völlig durch einen vierten vom Durchmesser 4 umschlossen, liegen aber sonst willkürlich in ihm. Die bezüglichen Wahrscheinlichkeiten zu finden, dass ein im grösseren Kreise willkürlich angenommener Punkt in 0, 1, 2, 3 der kleineren Kreise liegt.“ Zu der von Herrn Biddle gestellten und gelösten Aufgabe macht Herr Simmons folgende Bemerkung: „Herrn Biddle's Lösung ist so bewundernswert, dass ich nur äusserst ungern mein Bedenken äussere, dass dieselbe in Wahrheit zu einer anderen Aufgabe gehört, die etwa so auszusprechen ist: Ein Punkt werde willkürlich auf der Peripherie von einem Kreise aus einer Reihe von 20 concentrischen angenommen, so dass seine Wahrscheinlichkeit, auf einer Peripherie zu liegen, der Länge derselben proportional gesetzt ist; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass er im Innern von 1, 2, 3, ... Kreisen liege. Die genaue Lösung von Aufgabe 8100 kann ohne Integration nicht bewerkstelligt werden, und die erforderliche Integration ist von einer so abscheulichen Art, dass sie fast hoffnungslos erscheint.“ Lp.

M. W. Crofton, G. Heppel. Solution of question 8119. Ed. Times. XLIV. 80-81.

Der von Herrn Crofton vorgelegte, von Herrn Heppel bewiesene Satz lautet: Wenn drei beliebige Punkte innerhalb eines Dreiecks angenommen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schwerpunkt des Dreiecks innerhalb desjenigen liegt, welches die drei Punkte zu Ecken hat, gleich $\frac{2}{27} + \frac{20}{81} \log 2$.

Lp.

W. J. C. Miller, T. C. Simmons. Solutions of questions 8318 and 8444. Ed. Times. XLV. 103-104.

Die von Herrn Miller gestellten, von Herrn Simmons gelösten Aufgaben lauten: 1) Vier Punkte P, Q, R, S seien beliebig auf je einer Seite eines Vierecks $ABCD$ angenommen; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Inhalt von $PQRS$ kleiner als ein Bruchteil n des Inhaltes von $ABCD$ ist. 2) Das Resultat auf den Fall eines Rechtecks anzuwenden und 3) zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $PQRS$ kleiner als drei Viertel von $ABCD$ ist, den Wert hat:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{4} \log 2 = 0,\ 991434.$$

Lp.

Weitere Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, gestellt von B. Easton, B. H. Rau, W. J. C. Miller, A. Macfarlane, T. C. Simmons, J. Wolstenholme, B. Chakravarti, D. Biddle, M. W. Crofton, Steggall, F. Morley, N. Sarkar, J. O'Regan, S. Marks, Matz, A. Martin, W. J. C. Sharp, H. McColl mit Lösungen von denselben und von G. G. Storr, A. Gordon, G. Heppel, S. Aiyar, A. Cayley, A. M. Nash, F. R. J. Hervey, J. Beyens, L. Tanner, A. Mukhopâdhyây stehen in Ed. Times. XLIV. 39-40, 42-43, 48-50, 56-57, 60-61, 63-64, 84-85, 97-99, 102-103, 109, 116-117. XLV. 26-27, 30-31, 32, 36, 48, 53, 64-65, 71-72, 84-85, 88, 111-113, 123, 147, 148-150, 158.

Lp.

W. Veltmann. Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach dem Princip symmetrisch berechneter Mittelgrössen. Marburg. Elwert'sche Verl.-Buchhndlg. 43. S.

Nachdem der Verfasser in den beiden ersten Abschnitten, gewissermassen als Einleitung zu seiner eigentlichen Aufgabe, verschiedene Sätze über Mittelgrössen und über Determinanten entwickelt und begründet hat, kommt er in Abschnitt III zu einer Kritik der herkömmlichen Begründung der Ausgleichungsrechnung mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Methode der kleinsten Quadrate. Er erblickt die Schwierigkeiten, welche sich einer befriedigenden Theorie des gebräuchlichen Ausgleichungsverfahrens entgegenstellen, in den ungeeigneten Ausgangspunkten. Von einer so unsichern Sache, wie den sogenannten Fehlergesetzen dürfe die Ausgleichung nicht abhängig sein. Dass die gesuchte Grösse, in dem einfachsten Fall der Ausgleichungsrechnung, gleich dem arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen werden muss, sei unmittelbar einleuchtend, auch liessen sich sachgemässe Gründe dafür angeben. Wenn es sich nur um diesen Fall handelte, so würde man nicht daran gedacht haben, die Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden, ebenso wenig würde man es erforderlich halten, nachzuweisen, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist. Ganz ähnlich verhalte es sich aber auch bei den andern complicirteren Fällen der Ausgleichungsrechnung; die ausgeglichenen Werte seien allemal Mittelgrössen, deren Zweckmässigkeit ebenso unmittelbar einleuchtend oder ebenso einfach zu begründen sei, wie in dem einfachsten Falle des arithmetischen Mittels. Minimum von Quadratsummen, Wahrscheinlichkeitsbeziehungen etc. seien hier ebenso überflüssig wie dort. Die Eigenschaft der ausgeglichenen Werte der Unbekannten, Mittelwerte zu sein zwischen denjenigen Werten, welche man durch beliebige Combination der Fehlergleichungen erhält, habe deshalb auch als das wahre Princip der Ausgleichung, das Minimum der Summe der Fehlerquadrate dagegen nur als secundäre Folgerung zu gelten. Dass Mittelgrössen sich auch zur Bestimmung mittlerer

(nicht sogenannter wahrscheinlicher) Fehler eignen, das liege schon in dem Begriff derselben.

Abschnitt IV behandelt die Bestimmung einer Grösse aus unmittelbaren Beobachtungen, bei welchen man durch Messung die Werte $l_1, l_2, \ldots, l_m$ gefunden habe. Wären die Messungen genau gewesen, so würde man stets denselben Wert gefunden haben, die Differenz jedes dieser Werte von jedem vorhergehenden wäre immer gleich 0. Eine Mittelgrösse aus den absoluten Werten dieser Differenzen

$$\sqrt{\frac{(l_1-l_2)^2+(l_1-l_3)^2+\cdots+(l_1-l_m)^2+(l_2-l_m)^2+\cdots}{\frac{1}{2}m(m-1)}}$$

würde also ein passendes Mass der durchschnittlichen Ungenauigkeit sein, und der gesuchte ausgeglichene Wert der beobachteten Grösse stellt sich auf

$$\frac{l_1+l_2+\cdots+l_m}{m},$$

was noch weiter von dem Verfasser begründet wird.

Diese Betrachtung bildet den Ausgangspunkt für die Begründung der complicirteren Fälle: Abschnitt V. Bestimmung einer Grösse aus nicht unmittelbaren Beobachtungen, Abschnitt VI. Bestimmung mehrerer Grössen. Es wird stets vorausgesetzt, dass die in Frage kommenden Gleichungen die zu bestimmenden Grössen in linearer Form enthalten. Die Ausgleichung wird auch hier auf die Bestimmung von Mittelgrössen zurückgeführt, nur treten Quotienten, bez. Determinanten an die Stelle der Grössen l des einfachsten Falles. Von denselben will der Verfasser kaum mehr behaupten, als dass die absoluten Werte derselben weder sämtlich zu gross, noch sämtlich zu klein sein werden, dass also der beste Wert innerhalb des von denselben umfassten Intervalls liegen werde. Der Hauptgrund bei der Ausgleichung nach Mittelgrössen bleibt die Vermeidung der Nachteile einer willkürlichen Auswahl von Beobachtungen, jede derselben trägt mit dem vollen ihr zukommenden Gewicht zur Bildung der Mittelgrösse bei. Dieser Mittelwert behält auch dann seine Geltung, wenn einseitig wirkende Fehlerursachen vorkommen. Auch in diesem Fall wird die Genauigkeit der Resultate der mittleren

Genauigkeit der besseren Beobachtungen entsprechen, und somit durch die Ausgleichung das erreicht werden, was ohne nähere Kenntnis jener einseitig wirkenden Fehlerursachen erreicht werden kann.

Von den erhaltenen Werten der Unbekannten wird gezeigt, dass sie mit denjenigen, welche sich nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben, übereinstimmen. Der allgemeine mittlere Fehler der Beobachtungsreihe stimmt mit dem Gauss'schen vollständig überein, der mittlere Fehler einer Unbekannten ist von dem Gauss'schen durch einen von der Zahl der Beobachtungen abhängenden Factor verschieden. Die Entwicklung der theoretischen Begründung lässt sich hier nicht weiter verfolgen, da dieselbe mit complicirten Formeln geführt werden muss.

Im VII. Abschnitt endlich, dem letzten, zeigt der Verfasser die Ausführung der Rechnung, für welche die bei der Begründung benutzten Determinanten-Ausdrücke nicht geeignet sind. Die Rechnung schliesst sich eng an diejenige für die Methode der kleinsten Quadrate an, und ein davon abweichendes Verfahren, welches ebenfalls hier erläutert wird, würde auch bei der Methode der kleinsten Quadrate sehr zweckmässig zur Anwendung gebracht werden können. Ls.

B. Homann. Die wissenschaftliche Fehler-Ausgleichung in der Markscheidekunst nebst entsprechend ausgewählten Abschnitten aus der höhern Analysis. Freiberg. Craz & Gerlach (Joh. Stettner).

Die kleine Schrift (55 S.) ist ein Separatabdruck aus der Vereinsschrift des Rheinisch-Westfälischen Markscheidervereins, und ist, wie der Verfasser in der Vorbemerkung angiebt, auf Wunsch des genannten Vereins im Jahre 1884 geschrieben, dann aber im zweiten Teil „Ausgleichung“ durch eine Anzahl von Rechnungsaufgaben vervollständigt worden.

Der erste Teil enthält in kurzem Abriss: die Differentialwie die Integralrechnung, sowie die Auflösung der höheren alge-

braischen Gleichungen, nebst einer grösseren Anzahl von Aufgaben, und es verdient anerkannt zu werden, dass es dem Verfasser gelungen ist, eine grosse Menge von Stoff in durchaus übersichtlicher und verständlicher Weise auf wenige Seiten zusammenzustellen, ohne durch diese Zusammendrängung zu ermüden. Selbstverständlich konnte auf Einzelheiten, auf strengere Beweisführung und Begründung nicht eingegangen werden. Die Schrift setzt nach unserer Meinung voraus, dass die betreffenden Disciplinen von dem Leser bereits früher mehr oder weniger eingehend studirt worden sind, und dass hier nur in aller Kürze recapitulirt werden soll, worauf es bei der praktischen Ausübung der Markscheidekunst ankommt.

In dem zweiten Teil „Die Methode der kleinsten Quadrate" hätten wir freilich eine etwas eingehendere Begründung am Platze gefunden. Der Verfasser scheint anzunehmen, dass dieselbe denjenigen, für welche er die Schrift bestimmt hat, vollkommen geläufig ist. In dieser Annahme scheint uns indes ein Widerspruch zu liegen mit den vielen ganz elementaren Erläuterungen, welche gegeben werden. Ls.

S. Newcomb. A generalized theory of the combination of observations, so as to obtain the best result. Newcomb Am. J. VIII. 343-366.

In den einleitenden Bemerkungen zu dieser Abhandlung weist der Verfasser darauf hin, dass man, ausgehend von dem bekannten Fehlergesetz, bei einer Reihe von Beobachtungen erwarten dürfe, dass der wahrscheinliche Fehler nur bei einem Hundertstel der Zahl der Beobachtungen überschritten werde, während die Erfahrung lehre, dass es viel häufiger der Fall sei, auch dass es überhaupt zu den seltenen Ausnahmen gehöre, wenn die Verteilung der einzelnen Fehler ihrer Grösse nach jenem Fehlergesetz entspräche, und endlich, dass man fast jedesmal einige abnorm grosse Fehler finde, deren Behandlung stets grosse Schwierigkeiten bereite. Gewöhnlich empfehle man solche Beobachtungen als abnorm ganz auszuscheiden, aber es fehle

an einem positiven Kriterium, an welchem man erkennen könne, ob eine Beobachtung als abnorm zu betrachten sei. Bei den Beobachtungen von Mercur- und Venus-Durchgängen durch die Sonnenscheibe seien die grossen Fehler verhältnismässig so zahlreich, dass sich eine Trennung zwischen abnorm und normal vollständig unausführbar erweise.

Die übliche Betrachtungsweise gründe sich darauf, dass alle in Frage stehenden Beobachtungen in gleicher Weise als den Fehlern ausgesetzt angesehen würden, lediglich in den zufälligen Umständen, die die Fehler erzeugen, als verschieden; wenn das aber nicht der Fall sei, wenn wir ein System von Beobachtungen vor uns hätten, von denen ein Teil mit einem kleinen, ein Teil mit einem grössern, ein dritter Teil mit einem noch grössern wahrscheinlichen Fehler behaftet ist, dann würden sich die Fehler des ganzen Systems keineswegs nach dem Fehlergesetz ordnen lassen. Und ein solches Verhalten finde bei fast allen astronomischen und physikalischen Arbeiten statt. Daraus folge dann, dass aus einer Mischung von solchen Beobachtungen das arithmetische Mittel keineswegs den wahrscheinlichsten Wert liefere, vielmehr dass den vom Mittel weiter abweichenden Beobachtungen ein geringeres Gewicht beigelegt werden müsste.

Es wird sodann gezeigt, dass durch die abnormen Beobachtungen die Gestalt der Wahrscheinlichkeits-Curve wesentlich geändert wird, und dass dieselbe sehr verschiedene Formen annehmen kann, so dass es verschiedene wahrscheinlichste Werte giebt. Da entsteht dann die Frage, ob auch in diesem Fall ein allgemeines Princip aufgestellt werden kann, mit dessen Hülfe sich ein bestimmter Wert berechnen lässt, der allen andern vorzuziehen wäre, und welche Hypothese gemacht werden muss, um uns bei der Wahl von Fehlern verschiedener Grösse zu leiten. Im praktischen Leben nehmen wir an, dass der Nachteil, welchen ein Fehler mit sich führt, sich zunehmend steigert, wenn der Fehler wächst, und daraus entwickelt der Verfasser, dass es am besten sei, anzunehmen, dass der Nachteil eines Fehlers proportional sei dem Quadrat der Grösse des Fehlers.

Der Wert einer Beobachtung wird dahin definirt, dass er

umgekehrt proportional ist der Totalsumme der Fehler-Nachteile, die dabei in Frage kommen, jeder Nachteil multiplieirt mit der Wahrscheinlichkeit des Fehlers, was auch mit der gewöhnlichen Fehlertheorie im Einklang steht. Derjenige Wert einer Beobachtung, für welchen diese Summe ein Maximum wird, verdient also den Vorzug, er tritt an die Stelle des wahrscheinlichsten Wertes und die Grösse des damit verbundenen Nachteils an die Stelle des wahrscheinlichsten Fehlers der gewöhnlichen Theorie.

Der weitaus grösste Teil der Abhandlung beschäftigt sich nun mit der Aufstellung der Formeln, welche den vorhin erörterten Principien entsprechen, so wie mit der Umformung derselben, um sie für praktische Aufgaben verwendbar zu machen. An Beispielen wird die Entwickelung erläutert. Ls.

Ch. M. Schols. Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace. Delft. Ann. de l'École Polyt. II. 123-178.

Uebersetzung einer früheren Abhandlung des Verfassers. (Siehe F. d. M. VII. 1875. 114.) G.

F. Y. Edgeworth. On the law of error and the elimination of chance. Phil. Mag. (5) XXI. 308-324.

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist der besondere Fall in der Anwendung des Fehlergesetzes auf die Elimination des Zufalles (chance), wenn die Abweichung vom Mittelwerte sehr gross ist, „so gross, um den Zweifel zu erregen, ob das Fehlergesetz, um welches sich die ganze Theorie dreht, richtig erfüllt ist“. Es wird der Nachweis versucht, dass die gewöhnliche Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass der Betrag der Abweichung in einer angegebenen Richtung bloss vom Zufalle herrührt, nämlich angenähert $\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}\, c} e^{-\frac{x^2}{c^2}} dx$, „im allgemeinen hinlänglich genau ist, oder wenigstens darin zuverlässig, dass sie eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit des blossen Zufalls liefert, ein Beweisgrund a fortiori für das Gesetz; dass jedoch in einer gewissen

Klasse von Fällen eine Correction erforderlich und in einer gewissen Art innerhalb jener Klasse erreichbar ist".

Gbs. (Lp.)

F. Y. EDGEWORTH. On the determination of the modulus of errors. Phil. Mag. (5) XXI. 500-507.

Da bei der Anwendung des Fehlergesetzes häufig die Bestimmung einer gewissen Constante verlangt wird, so wird zu ihrer schnellen Auswertung ein Verfahren angegeben. Die Constante kann als das „mittlere Fehlerquadrat" unter der Voraussetzung beschrieben werden, dass der Schwerpunkt der Punkt des Nullfehlers ist; kurz der Trägheitsradius für die Leichtigkeitscurve (facility curve), unter welche eine gegebene Beobachtung sich einordnet. Gbs. (Lp.)

P. PIZZETTI. Un teorema relativo all' errore medio di una funzione di quantità determinate dall' esperienza. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 597-602.

Wenn in der Function

$$F = L_0 + L_1 x + L_2 y + \cdots + L_w t$$

die Werte $x, y, \cdots, t$ aus directen Beobachtungen abgeleitet sind, so lässt sich der mittlere Fehler von F immer berechnen; sind aber $x, y, \cdots, t$ aus einem System indirecter Beobachtungen mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden, und hat man die denselben zu Grunde liegenden Beobachtungen nicht aufbewahrt, so ist man im allgemeinen nicht im Stande, den mittleren Fehler von F zu bestimmen. Dies wird von dem Verfasser nachgewiesen, und es wird gezeigt, dass sich in diesem Falle Grenzwerte für den mittleren Fehler angeben lassen.

Ls.

W. KÜTTNER. Zur mathematischen Statistik. Antwort auf die Angriffe des Herrn Dr. Zimmermann. Schlömilch Z. XXXI. 246.

Im Jahrgang XXV der Schlömilch'schen Z. p. 11-25 (F. d. M. XII. 1880. 166) hat Herr Küttner folgenden Satz veröffentlicht.

„Wenn *n* Ereignisse, die von *n* von einander unabhängigen Ursachen bedingt werden, sich sämtlich oder teilweise ausschliessen, d. h. wenn das vorherige Eintreffen des einen oder des andern das Eintreffen mehrerer oder aller übrigen unmöglich macht, so kann bei einem unendlich kleinen Zeitintervall doch dieses Abhängigkeitsverhältnis nicht in Frage kommen, weil, wenn die Aufeinanderfolge zweier oder mehrerer Ereignisse von dem Zusammentreffen durch unsere Sinne unterschieden werden soll, immer ein endliches, wenn auch noch so kleines Zeitintervall zwischen denselben liegen muss. Für ein unendlich kleines Zeitintervall werden daher derartige abhängige Ereignisse unabhängig von einander, und die Sätze der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten sind auf sie anwendbar."

Herr Küttner hatte diesen Satz auf die Verhältnisse der Sterblichkeit und der Dienstuntauglichkeit der Activen angewendet, Herr Zimmermann jedoch erklärt denselben in seinem Werke: „Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse" nicht nur in seiner Anwendung auf den vorliegenden Fall, sondern im allgemeinen für unrichtig, und deutet an, dass der Beweis nach der Grenzmethode geführt werden müsste, um zugelassen zu werden.

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Beweis von Herrn Küttner geliefert. Ls.

F. Ronchetti. Saggio di aritmetica dei titoli di credito. Batt. G. XXIV. 242-269.

Es werden Formeln entwickelt und Aufgaben gelöst für die Berechnung von Anleihepapieren, bei denen eine regelmässige Amortisation stattfindet. Ls.

C. Kihm. Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden bei der Lebensversicherung. Zürich. Orell Füssli & Co. 91 S.

Besprechung dieser Veröffentlichung. Rundschau der Versicherungen. XXXVI. 125-131.

ZILLMER. Besprechung dieser Veröffentlichung. Zeitschrift für Versicherungswesen. Jahrgang 1886 No. 18. II. Beilage. 224-225.

C. KIHM. Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden bei der Lebensversicherung I und II. Zeitschrift für Versicherungswesen. No. 34. 399-404 und No. 35. 409-411.

Eine Reihe von Lebensversicherungs-Gesellschaften hat die Bestimmung getroffen, dass die Dividenden, welche sie aus ihren Gewinnen an die Versicherten zurückzahlen, in ihrer Höhe abhängig sind von dem Alter der Versicherungen, so dass bei im übrigen gleichen Verhältnissen diejenigen Versicherten, deren Versicherung bereits seit längerer Zeit besteht, eine höhere Dividende beziehen, sei es nun, dass dieselbe der Anzahl der Versicherungsjahre (den überhaupt gezahlten Prämien), sei es, dass sie dem sogenannten Deckungskapital (der Prämien-Reserve) proportional gesetzt wird. Herr Kihm vermisst bei diesen Gesellschaften eine genaue Berechnung über die Höhe der Procentsätze, und eine Reserveberechnung, welche darüber Aufschluss geben soll, ob der gewählte Procentsatz richtig ist. Er will in der vorliegenden Abhandlung zeigen, wie nach seiner Ansicht die Höhe der Dividenden ermittelt und die Berechnung der Reserve vorgenommen werden soll.

Die erforderlichen Formeln werden abgeleitet und auf Grund der damit gewonnenen Resultate wird beispielsweise das Verfahren verschiedener Gesellschaften einer kritischen Besprechung unterzogen.

In der Rundschau der Versicherungen wird die Arbeit des Herrn Kihm sehr abfällig beurteilt, und gezeigt, dass derselbe zu unrichtigen Resultaten kommen musste, weil er von irrigen Voraussetzungen ausgegangen ist.

In ähnlicher Weise spricht sich auch Herr Zillmer in der Zeitschrift für Versicherungswesen aus. Er bemerkt, dass gegen die Formelentwickelung nichts einzuwenden sei, wenn man die Voraussetzungen zugiebt, er sucht indes nachzuweisen,

dass die von Herrn Kihm gemachten Voraussetzungen nicht zutreffen.

Herr Kihm nimmt sodann den Gegenstand in No. 34 und 35 der Zeitschrift für Versicherungswesen nochmals wieder auf, und führt aus, wie sich die Formeln ändern werden, wenn man andere Voraussetzungen macht, und welche Ergebnisse sich in diesem Falle herausstellen. Ls.

H. Zimmermann. Ueber Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse. Berlin. Puttkammer & Mühlbrecht. 109 S.

Diese verdienstvolle Veröffentlichung ist erfolgt, wie wir aus der dem Titel beigefügten Bemerkung ersehen, im Auftrage des Vereins Deutscher Eisenbahn-Verwaltungen, sie bildet gewissermassen die Fortsetzung der unter dem Titel: Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitäts-Verhältnisse bei dem Beamten-Personal der deutschen Eisenbahn-Verwaltungen während der Jahre 1868-1873 mit Nachträgen für die Jahre 1874-1883 veröffentlichten Arbeiten des Herrn G. Behm. Herr Zimmermann hat sich der mühevollen Arbeit unterzogen, das gesamte Material der Dienstunfähigkeits- und Sterbens-Statistik Deutscher Eisenbahn-Verwaltungen, welches seit dem Jahre 1868 gesammelt worden ist, bis einschliesslich zum Jahre 1884 zur Aufstellung von Tafeln zu verwerten, und dadurch einen wesentlichen Beitrag geliefert für die Erforschung der Invaliditätsverhältnisse. Die vorliegende Schrift enthält nicht nur die Beobachtungszahlen selbst und die daraus abgeleiteten Tafeln, sie giebt auch bis im einzelnen davon Rechenschaft, wie dies geschehen, von welchen Grundsätzen der Verfasser ausgegangen, und welches Verfahren er dabei eingeschlagen, so dass ein jeder, welcher die Tafeln benutzen will, dies nicht kritiklos zu thun braucht, sondern sich selbst andere Zahlen aus dem Material ableiten kann, wenn er es für gut befindet.

Gleich im Beginne seiner Arbeit erörtert Herr Zimmermann seine Auffassung über den Begriff der Sterbenswahrschein-

lichkeit eines Diensttauglichen sowie über die Verbindung zwischen Sterbens- und Dienstunfähigkeitswahrscheinlichkeiten. Es haben sich auf diesem Gebiet abweichende Ansichten gebildet, die daraus entstanden sind, dass das Eintreten des Todes bezw. der Dienstunfähigkeit, wenn auch in gewissem Sinne von einander unabhängig, doch in ihrer Aufeinanderfolge der Beschränkung unterliegen, dass eine Person wohl erst dienstunfähig werden und dann sterben kann, aber nicht umgekehrt. Von der einen Seite wird behauptet, dass man trotz dieses Verhaltens den Begriff einer, sagen wir „unabhängigen" Wahrscheinlichkeit, dienstunfähig zu werden, einführen dürfe, welche vorhanden sein würde, wenn die Activen der Sterblichkeit nicht unterworfen wären, und ebenso eine, sagen wir „unabhängige" Wahrscheinlichkeit des Sterbens der Activen, wenn dieselben nicht dienstunfähig, und in Folge dessen unter ein anderes Sterblichkeitsverhältnis treten würden. Herr Zimmermann verwirft die Einführung dieses Begriffes als überflüssig und den thatsächlichen Verhältnissen nicht entsprechend, bestreitet auch die Richtigkeit der zur Begründung derselben gegebenen Beweise, und u. a. auch diejenige, welche Herr Küttner in verschiedenen Arbeiten geliefert hat. Da der Referent früher, 1876, in diesem schon alten Streit selbst Partei ergriffen hat, so würde es nicht passend sein, an dieser Stelle irgend ein Urteil auszusprechen und dadurch die Grenzen einer vollständig objectiven Berichterstattung irgendwie zu überschreiten.

In dem Abschnitt: „Die Methode der Bearbeitung" wird das eingeschlagene Ausgleichungsverfahren eingehend erörtert, und bei dieser Gelegenheit werden auch Gesichtspunkte von allgemeinerer Bedeutung beleuchtet. Wenn der Verfasser indes aus einem Vergleich zwischen der Ausgleichung der Sterbenstafel H^M (Healthy Males) der 20 englischen Gesellschaften einerseits durch Woolhouse gegeben, andererseits durch Wittstein nach der Methode der kleinsten Quadrate auf Grund einer von ihm aufgestellten Sterblichkeitsfunction sich zu Gunsten der Woolhouse'schen Methode entscheidet, so können wir dieser Schlussfolgerung nicht zustimmen. Das Resultat der Ausgleichung spricht

vielleicht gegen die von Wittstein gewählte Function, aber keineswegs gegen die Anwendbarkeit der Methode der kleinsten Quadrate.

Den Zahlentabellen ist auch eine Curventafel angefügt.

Ls.

Rozmarynowicz. Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherungsrechnung mit Anwendung auf die Pensions-Kassen, herausgegeben von B. Danielewicz. Warschau. (Polnisch).

Dn.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

R. GEIGENMÜLLER. Elemente der höheren Mathematik zugleich als Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der algebraischen Analysis, analytischen Geometrie, Differential- und Integralrechnung. Für technische Lehranstalten und zum Selbststudium. I. Algebraische Analysis enthaltend. Mittweida. Polyt. Buchhandl. (R. Schulze). 61 S. 8°.

Für „Schüler, von welchen anfangs nur die Kenntnis der Hauptsätze der niederen Mathematik, sowie einige Geläufigkeit im algebraischen Rechnen und im Lösen von geometrischen Constructionsaufgaben vorausgesetzt werden darf", entwickelt der Verfasser in möglichst einfacher Weise im vorliegenden Hefte den binomischen Lehrsatz für beliebige Exponenten, die Lehre von den Gleichungen (kubische Gleichungen, Newton's Näherungsmethode für numerische Gleichungen), den Begriff der Function und des Grenzwertes einer Function, die Theorie der unendlichen Reihen mit Einschluss der Reihe für e, die Zerlegung rational gebrochener Functionen in Partialbrüche.

Lp.

P. MANSION. Sur le principe de substitution des infiniment petits. Brux. S. sc. X. A. 47.

In einer Grenze einer arithmetischen Summe oder eines Verhältnisses unendlich kleiner Grössen kann man ein unendlich kleines α durch ein anderes β ersetzen, dessen Grenzverhältnis $\nu = \beta : \alpha$ die Einheit ist, „selbst wenn man alle Veränderlichen, von denen dieses Verhältnis abhängt, auf eine unabhängige Weise gleichzeitig oder nicht gleichzeitig sich ändern lässt". Mancher Schriftsteller hat die hier hervorgehobene Bedingung ausser Augen gelassen. Mn. (Lp.)

P. MANSION. Principes généraux de la théorie des limites. Mathesis. VI. 265-272.

Mn.

M. D'OCAGNE. Sur un problème de limite. Mathesis. VI. 76-79.

Mn.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber eine Eigenschaft unendlicher Reihen. Klein Ann. XXVII. 397-402.

Der Satz: „Wenn die unbeschränkt convergente Reihe: $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\cdots$, in welcher $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... rationale Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten rational aus ϱ beliebigen Grössen δ_1, δ_2, ..., δ_ϱ zusammengesetzt sind, die Eigenschaft hat, dass ihr stets nur solche x ein und denselben Wert erteilen können, welche nicht zugleich Lösungen einer mit Adjungirung von δ_1, δ_2, ..., δ_ϱ irreductiblen Gleichung sein können, so wird dieselbe von einer bestimmten Grenze an für in δ_1, δ_2, ..., δ_ϱ rationale, algebraische und transcendente Werte der Variabeln stets für beliebig grosse aber endliche n entsprechend selbst wieder rationale, algebraische und transcendente Werte annehmen, gleichgültig welcher Natur der Wert

der unendlichen Reihe selbst für das gewählte x ist"; dieser Satz wird bewiesen und auf die Functionen e^x und $\sin x$ angewandt.

Wz.

M. Lerch. Ueber die Punktmengen und ihre Bedeutung für die Analysis. Cas. XV. 211. (Böhm.)

Der Verfasser zeigt, wie sich der Begriff des Grenzwertes zum Zwecke gewisser Untersuchungen verallgemeinern lässt. Ist $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine unendliche Folge von reellen Grössen, so wird die Gesamtheit der Elemente der Ableitung von der Punktmenge (a_ν), vermehrt um die unendlich wiederholten Elemente a_ν selbst, eine arithmetische Ableitung genannt, und mit $\underset{\nu=\infty}{D}(a_\nu)$ bezeichnet. Dieser Begriff wird eingeführt, um einige Convergenzkriterien präciser ausdrücken zu können: Die Anwendungen beziehen sich auf das Cauchy'sche Convergenzkriterium $\lim\limits_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, welches sich in allgemeinerer Weise so ausdrückt, dass die arithmetische Ableitung $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ aus echten Brüchen besteht. Diese hinreichende Bedingung ist aber keine notwendige. Der Verfasser giebt zwei Beispiele, nämlich

$$u_\nu = \frac{1+(-1)^\nu}{2^{\nu+1}} + \frac{1-(-1)^\nu}{\nu^2}$$

und

$$u_\nu = \delta^{\nu-(\lg\nu)} g^{\frac{1}{2}(\lg\nu)[1+(\lg\nu)]},$$

wobei $\delta < 1$, $g > 1$, $\delta\sqrt{g} < 1$; im ersten Falle besteht die arithmetische Ableitung $\underset{\nu=\infty}{D}\left(\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}\right)$ aus den beiden Stellen $(0, \infty)$, im zweiten dagegen aus den Stellen (δ, ∞). Dadurch wird bewiesen, dass der auf dem Cauchy'schen Convergenzkriterium beruhende Beweis einer Fundamentaleigenschaft der Potenzreihen im allgemeinen falsch ist. — Schliesslich geht der Verfasser zum Begriffe des „Grenzwertsystems" über, dem man bei einem stetigen Grenzübergange begegnet. Als Beispiele werden namentlich zwei Fälle angeführt: Die Tangentenmenge einer stetigen

richtungslosen Curve und das Dichtigkeits-System eines Körpers in einem bestimmten Punkte. Std.

A. Gutzmer. Sur une série considérée par M. Lerch. Teixeira J. VIII. 33-36.

Es wird die Reihe untersucht:

$$\sum_\nu u_\nu = \sum_\nu \delta^{\nu-(\log\nu)} \cdot g^{\frac{1}{2}(\log\nu)[1+(\log\nu)]},$$

in der $(\log\nu)$ den ganzen Teil des gewöhnlichen Briggs'schen Logarithmus von ν bedeutet und in welcher die Grössen δ und g positiv sind und zwar $\delta<1$, $g>1$, aber derart dass $\delta\sqrt{g}<1$. Herr Lerch hat bewiesen, dass für Werte von ν von der Form $10^\mu-1$ der Quotient $u_{\nu+1}:u_\nu$ beliebig gross wird, trotzdem die Reihe convergent ist. (Siehe F. d. M. XVII. 1885. 207 und oben S. 194.) Herr Gutzmer zeigt, dass man die vorliegende Reihe Σu_ν in eine andere Σv_μ transformiren kann, in welcher der Quotient $v_{\mu+1}:v_\mu$ immer <1 ist. Es ergiebt sich

$$\sum_\nu u_\nu = \sum_\mu v_\mu = \sum_\mu \delta^{10^\mu-\mu} \cdot g^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)} \cdot \frac{1-\delta^{9.10^\mu}}{1-\delta}.$$

Tx. (Hch.)

V. Mollame. Sopra una serie speciale per la rappresentazione d'una quantità reale variabile nell' intervallo $(0 \ldots \alpha)$. Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze Naturali di Catania. (3) XIX. 1886.

Bezeichnet man mit m_k das allgemeine Glied einer Reihe von ganzen positiven Zahlen $m_1, m_2, \ldots$, die den Bedingungen

$$m_1>1, \quad m_{k+1}\geqq m_k$$

genügen (wo aber das Gleichheitszeichen nicht durchgängig vorkommen darf), und ist x eine veränderliche Grösse, welche sämtliche Werte eines positiven Intervalles $0 \ldots \alpha$ (die Grenzwerte ausgeschlossen) annehmen kann, so lässt sich für jeden Wert von x eine und nur eine Reihe m_k derart angeben, dass

$$x = \alpha\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{1}{m_1 m_2 m_3} + \cdots\right)$$

ist. Die Reihe ist endlich oder unendlich, jenachdem $\frac{x}{\alpha}$ rational oder irrational ist.

Sind n Reihen m_k vorhanden, nämlich $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{n,k}$, so convergirt die Reihe

$$\frac{1}{a_{1,1}} + \frac{1}{a_{1,1}a_{2,1}} + \cdots + \frac{1}{a_{1,1}a_{2,1}\ldots a_{n,1}}$$
$$+ \frac{1}{a_{1,1}a_{2,1}\ldots a_{n,1}a_{1,2}} + \frac{1}{a_{1,1}a_{2,1}\ldots a_{n,1}a_{1,2}a_{2,2}} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{a_{1,1}a_{2,1}\ldots a_{n,1}a_{1,2}a_{2,2}\ldots a_{n,2}}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und ihre Summe ist eine irrationale Zahl des Intervalles $0 \ldots 1$.

Hieraus ergiebt sich leicht das folgende Theorem, das aber eine nur scheinbare Verallgemeinerung des bekannten Cantor'schen Satzes (Acta Math. II. 316) bildet:

Sind:

$$x_1 = \alpha\left(\frac{1}{a_{1,1}} + \frac{1}{a_{1,1}a_{1,2}} + \cdots\right),$$
$$x_2 = \alpha\left(\frac{1}{a_{2,1}} + \frac{1}{a_{2,1}a_{2,2}} + \cdots\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \alpha\left(\frac{1}{a_{n,1}} + \frac{1}{a_{n,1}a_{n,2}} + \cdots\right)$$

n unabhängige veränderliche Grössen, die jeden Wert des Intervalles $0 \ldots \alpha$ annehmen können, der zu α in irrationalem Verhältnisse steht, und ist

$$y = \beta\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots\right)$$

eine veränderliche Grösse von derselben Beschaffenheit im Intervalle $0 \ldots \beta$, so lässt sich eine eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Wertsystemen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einerseits und den Werten y andererseits aufstellen. Vi.

T. J. STIELTJES. Recherches sur quelques séries semiconvergentes. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 201-258.

Reihen von der Form:

$$F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \cdots,$$

worin a als reell und positiv vorausgesetzt wird, nennt der Herr Verfasser semiconvergente und teilt sie in Reihen erster und zweiter Art, je nachdem das Vorzeichen der Glieder wechselt oder unverändert bleibt. Die letzteren bilden den hauptsächlichsten Inhalt der Abhandlung. Um solche Reihen zur numerischen Berechnung der durch sie dargestellten Functionen benutzen zu können, hat man ein Restglied R_n zu bestimmen, das man einer endlichen Anzahl von Gliedern der Reihe hinzuzufügen hat. Nimmt man für a sehr grosse Werte, so nehmen die Glieder der Reihe mit wachsendem Index zunächst ab, um nachher über jede Grenze zu wachsen. Die zu lösende Aufgabe besteht also in der Ermittelung desjenigen Wertes von n, für welchen R_n sein Zeichen wechselt, mithin in der angenäherten Auflösung der transcendenten Gleichung $R_n = 0$, worin n als eine stetige Veränderliche betrachtet wird. Wünschenswert wäre es, wenn dieser Zeichenwechsel von R_n in der Nähe des kleinsten Gliedes der Reihe stattfände, und bei den vom Herrn Verfasser behandelten Beispielen ist dies der Fall. Die angenäherte Lösung der Gleichung $R_n = 0$ hat die Form:

$$n = \alpha a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \cdots;$$

sie ergiebt sich, indem man das zu einem in der Umgebung des kleinsten Gliedes der Reihe befindlichen Gliede T_n gehörige R_n in eine nach abnehmenden Potenzen von n fortschreitende semiconvergente Reihe entwickelt.

In vielen Fällen ist es nicht erforderlich, die Reihe soweit fortzusetzen, bis R_n das Zeichen wechselt; es lässt sich der Grad der Annäherung angeben, wenn die Reihe bei einem beliebigen Gliede abgebrochen wird.

Das erste Beispiel ist der Integrallogarithmus: $li(e^a)$; der-

selbe wird in die bekannte Reihe entwickelt, und dem Restglied die Form

$$R_n = \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{v^n e^{-av}}{1-v} dv$$

gegeben. Setzt man $a = n + \eta$, so wird

$$R_n = \left\{ \int_{1-h}^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \right\} \frac{(ve^{-v})^n}{1-v} e^{-\eta v} dv,$$

wo h, k endliche Grössen bedeuten und die Integrale von 0 bis $1-h$ und von $1+k$ bis ∞ unterdrückt werden durften. Setzt man jetzt $ve^{-v} = e^{-1-x^2}$, $1-v = t$, so ist $(1-t)e^t = e^{-x^2}$; für hinreichend kleine Werte von x kann daher t (und $e^{-\eta v}$) nach Potenzen von x entwickelt werden. Dadurch nimmt das erste Integral die Form:

$$e^{-a} \int_{\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}}}^{L} e^{-nx^2} \left\{ 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \right\} \frac{dx}{x}$$

an, worin L nur von h abhängt, A_1, A_2, ... Functionen von η sind. Durch die Forderung, dass die Reihe $1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$ zwischen den Grenzen des Integrals convergent sei, ergiebt sich für h eine numerische Constante. Addirt man hierzu das in ähnlicher Weise umgeformte zweite Integral, so wird:

$$R_n = 2e^{-a} \int_0^L e^{-nx^2} \{ A_1 + A_3 x^2 + A_5 x^4 + \cdots \} dx,$$

und durch Integration:

$$R_n = e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left\{ \eta - \tfrac{1}{3} + \left(\tfrac{1}{6}\eta^3 - \tfrac{1}{2}\eta^2 + \tfrac{1}{12}\eta + \tfrac{1}{540}\right) \frac{1}{n} \right.$$
$$\left. + \left(\tfrac{1}{40}\eta^5 - \tfrac{5}{24}\eta^4 + \tfrac{25}{72}\eta^3 - \tfrac{1}{24}\eta^2 + \tfrac{1}{288}\eta + \tfrac{65}{6048}\right) \frac{1}{n^2} + \cdots \right\}.$$

Der Wert von η, für welchen $R_n = 0$ wird, kann daher nach Potenzen von n entwickelt werden:

$$\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \cdots,$$

und da $a = n + \eta$ ist, so erhält man:

$$n = a - \tfrac{1}{3} - \frac{8}{405a} + \frac{16}{25515a^2} - \cdots$$

Beschränkt man sich bei der Berechnung auf $a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405a}$, so ist der für n begangene Fehler eine Grösse von der Ordnung $e^a\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$, derjenige für $li(e^a)$ von der Ordnung $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$.

In analoger Weise werden die Functionen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin au}{1+u^2}du, \quad \int_0^\infty \frac{u \cos au}{1+u^2}du, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{e^{\frac{n}{a}}-1}$$

behandelt. Dagegen führen $\log \Gamma(a)$ und die beiden Integrale $J(a)$, $K(a)$ der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2z}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dz}{da} + z = 0,$$

nämlich:

$$J(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\cos au}{\sqrt{1-u^2}}du; \quad K(a) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{\infty} \frac{\cos au}{\sqrt{u^2-1}}du$$

zu Reihen erster Art. Der Herr Verfasser zeigt nun, wie man $\log \Gamma(ai)$, $J(ai)$, $K(ai)$ definiren kann, und gelangt dadurch zu Reihen zweiter Art, die er eingehend behandelt. Wz.

Cahen. Note sur la théorie des séries. Nouv. Ann. (3) V. 535-538.

In einer Reihe, deren Glieder positiv sind, gehe $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bei unendlich wachsendem n durch kleinere Werte in den Grenzwert 1 über. Man setze $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha_n}$ und suche die Grenze von $n\alpha_n$. Je nachdem diese Grenze > 1, resp. < 1 ist, convergirt, resp. divergirt die Reihe. Dieses von Duhamel aufgestellte Kriterium vervollständigt der Herr Verfasser: Setzt man $n\alpha_n = 1+\beta_n$, so divergirt die Reihe, wenn die Grenze von $n\beta_n$ von $+\infty$ verschieden ist. Wz.

Ed. Weyr. Deux remarques relatives aux séries. Teixeira J. VIII. 97-100.

Zuerst zeigt der Verfasser, dass man in einer convergenten

Reihe mit positiven Gliedern von einem beliebigen Gliede an die Glieder immer so zusammenfassen kann, dass der Quotient zweier auf einander folgender Glieder der neuen Reihe kleiner ist als eine beliebige positive Zahl, die kleiner als 1 ist.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf Reihen mit complexen Gliedern. Herr Weyr zeigt, dass man in jeder convergenten Reihe die Glieder so in Gruppen vereinigen kann, dass die so gebildete neue Reihe absolut convergent ist. Tx. (Hch.)

T. J. Stieltjes. Sur les séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable. C. R. CIII. 1243-1246.

Ist $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ convergent für $0 \leqq x \leqq 1$, so existirt $f'(1)$ nicht notwendig, wie das Beispiel:

$$f(x) = (1-x)\sin\left(\log\frac{1}{1-x}\right)$$

zeigt.

Ob aus der Voraussetzung, dass $f'(1)$ existirt und einen endlichen Wert hat, allein gefolgert werden darf, dass $\lim f'(x)_{x=1} = f'(1)$ ist, bleibt zweifelhaft (ist berechtigt, wenn $\sum_1^\infty s_n$ convergirt, wo $s_k = \sum_k^\infty a_n$ gesetzt ist). Wz.

P. Tchebycheff. Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs. Acta Math. IX. 182-184.

Für die beiden begrenzten Reihensummen

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} A_k x^k, \quad \sum_{k=1}^{k=n} B_k k^{\;x}$$

sollen Grenzen gefunden werden, zwischen denen sie jedenfalls liegen. Ueber die Lösung ist hier nur folgendes angegeben. Stehen $F(z)$ und $\Phi(z)$ in der Beziehung

$$\Phi(t) = \int_0^\infty e^{-tz} F(z)\,dz,$$

wo $F(z)$ beständig positiv, so ist

$$\int_0^{-\frac{\Phi''(\varrho)}{\Phi'(\varrho)}} F(z)\,dz \geqq \Phi(\varrho) - \frac{[\Phi'(\varrho)]^2}{\Phi''(\varrho)};$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)}} F(z)\,dz \leqq \frac{\Phi^2(\sigma)}{\Phi(2\sigma)}.$$

Erfüllen nun ϱ und σ für ein beliebiges u die Bedingungen

$$-\frac{\Phi''(\varrho)}{\Phi'(\varrho)} \leqq u; \quad \frac{1}{\sigma}\log\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)} \geqq u,$$

so hat man eine obere und eine untere Grenze für

$$\int_0^u F(z)\,dz.$$

Um dies auf jene beiden Reihensummen anzuwenden, hat man bezw. zu setzen:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k e^{-kt}; \quad u = n-1,$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k k^{-t}; \quad u = \log n.$$

H.

P. du Bois-Reymond. Ueber den Convergenzgrad der variabeln Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente. Kronecker J. C. 331-358.

Siehe Abschnitt VII, Capitel 1.

L. W. Thomé. Ueber Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreise. Kronecker J. C. 167-178.

Eine Potenzreihe $F(x) = \sum_0^\infty a_\lambda x^\lambda$ sei über den Convergenzkreis hinaus in einem endlichen Gebiete, welches singuläre Punkte, die in endlicher Anzahl vorkommen sollen, nicht enthält, als einwertige und stetige analytische Function fortsetzbar, bei einem

singulären Punkte dagegen sei $F(x)$ gleich

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo die c Constanten, die y Ausdrücke von der Form:

$$(1) \quad (x-a)^r \{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \log(x-a) + \cdots + \varphi_k(x) (\log(x-a))^{k-1}\},$$
$$(k \geqq 1)$$

bezeichnen, in denen die $\varphi(x)$ Potenzreihen $\sum_0^\infty c_\lambda x^\lambda$ bedeuten und die Exponenten von $x-a$ sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden; dann beweist der Herr Verfasser im Anschluss an frühere Abhandlungen folgende Sätze:

Wenn in den Entwickelungen (1) der niedrigste reelle Teil der Exponenten von $x-a$ grösser als -1 ist, so convergirt die Potenzreihe in allen nichtsingulären Punkten des Convergenzkreises und in denjenigen singulären, in welchen nach Abzug des constanten Gliedes der Entwickelung der reelle Teil der Exponenten von $x-a$ grösser als Null ist, gegen den Wert der erzeugenden Function.

Die Function $F(x)$ habe in einem Punkte a des Convergenzkreises eine Entwickelung von der Form (1) und in dieser sei der niedrigste reelle Teil der Exponenten von $x-a$ gleich oder kleiner als -2, während über das Verhalten von $F(x)$ bei Annäherung an andere Punkte des Convergenzkreises nichts vorausgesetzt zu werden braucht, alsdann divergirt die Reihe in allen Punkten des Convergenzkreises. Wz.

S. Pincherle. Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell. Rom. Acc. L. Rend. (4) II$_2$. 214-217.

Als das $(n+1)^{\text{te}}$ Appell'sche Polynom wird der Ausdruck

$$A_n(x) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

bezeichnet. Ist $A(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}}$ eine Potenzreihe, welche für $|z| > R$ convergirt, so ist für alle Werte von x, y die den Bedingungen:

$$|x| < \varrho, \quad |y| > R + \varrho$$

genügen:

$$A(y-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(x)}{y^{n+1}}.$$

Hieraus ergeben sich die Formeln:

$$A_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n A\left(\frac{1}{y}-x\right)}{\partial y^n}\right]_{y=0}$$

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} A(y-x)y^n\,dy,$$

wo C eine Kreislinie um den Nullpunkt mit dem Radius $r > R + \varrho$ bedeutet.

Ist $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius R_1, und bedeutet $F(A)$ (zunächst von der Convergenz abgesehen) diejenige Entwickelung, die sich ergiebt, wenn man in $F(z)$ $A_n(x)$ statt z^n einsetzt, so ist $R_1 - R$ (wenn überhaupt diese Grösse positiv ist) der Convergenzradius von

$$F(A) = \Sigma c_n A_n(x).$$

Man kann umgekehrt, wenn eine in der Umgebung des Nullpunktes regulär sich verhaltende Function vorgegeben ist, dieselbe in eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A_n(x)$ entwickeln. Dazu dienen die von Appell als „umgekehrte Polynome" bezeichneten Functionen $B_n(y)$, welche durch die Beziehungen:

$$B(y-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(y-z)^{n+1}},$$

$$B(y-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(y)}{z^{n+1}}$$

definirt werden.

Ist

$$A(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^{(n)}(y),$$

so gilt die wichtige Gleichung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} A^{(n)}(y)\,B_m(y)\,dy = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n \\ 1 \text{ für } m = n, \end{cases}$$

wo c eine um den Nullpunkt gezogene, in einem bestimmten Bereiche liegende Kreislinie ist. Vi.

A. Capelli. Sopra un teorema che si collega strettamente colla formola che serve ad esprimere le forme algebriche di n serie di variabili n^{arie} per mezzo di potenze del determinante delle variabili e di forme che dipendono da sole $n-1$ serie di variabili. Palermo Rend. I. 133-138.

Sind n Reihen von Variabeln

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{matrix}$$

vorhanden, und ist

$$D_{x^{(\alpha)}x^{(\beta)}} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(\beta)} \frac{d}{dx_i^{(\alpha)}},$$

so lautet der Satz:

Die Identität

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_{x^{(i)}x^{(n)}} f_i = (x^{(1)}x^{(2)} \dots x^{(n)})F,$$

wo f_i, F von den Variabeln $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ unabhängige, ganze Functionen sind, kann nicht bestehen, wenn F nicht identisch verschwindet. Vi.

M. d'Ocagne. Sur l'algorithme $[abc \dots l]^{(n)}$. Nouv. Ann. (3) V. 257-272.

Für den Ausdruck $[abc \dots l]^{(n)}$ (cfr. F. d. M. XV. 1883. S. 188) werden Ausdrücke, wie:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a^{\nu}[bc \dots l]^{(n-\nu)} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{n} [ab]^{(\nu)}[c \dots l]^{(n-\nu)}$$

abgeleitet und auf $[\alpha\alpha \dots \alpha\, abc \dots l]^{(n)} = [\alpha^{(p)} abc \dots l]^{(n)}$ angewandt.

Durch die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{i=n}(a^i+b^i) = \sum_n^1 (a, b); \quad \sum_{i=0}^{i=n}\sum_i^1 (a, b) = \sum_n^2 (a, b);$$

$$\sum_{i=0}^{i=n}\sum_i^2 (a, b) = \sum_n^3 (a, b); \ \ldots$$

wird der Ausdruck $\sum_n^p (a, b)$ definirt und $\sum_n^p (a)$ berechnet. Es ergeben sich zwei Entwickelungen für $\sum_n^p (a)$, und durch Vergleichung der Coefficienten zeigt sich, dass $[1^{(p)}]^{(n)}$ gleich dem Binomialcoefficienten $\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots(p-1)}$ ist und die Gleichung

$$[1^{(p)}]^{(n-1)} + [1^{(p-1)}]^{(n)} = [1^{(p)}]^{(n)}$$

befriedigt.

Bedeuten $abc \ldots l$ die Wurzeln der Gleichung:

$$z^p + A_1 z^{p-1} + A_2 z^{p-2} + \cdots + A_{p-1} z + A_p = 0,$$

so ist die Summe der n^{ten} Potenzen:

$$\Sigma a^n = p[abc\ldots l]^{(n)} + (p-1)A_1[abc\ldots l]^{(n-1)}$$
$$+ (p-2)A_2[abc\ldots l]^{(n-2)} + \ldots + A_{p-1}[abc\ldots l]^{(n-p+1)}.$$

Es seien endlich in dem Algorithmus $A \doteq [abc\ldots l]^{(n)}$ die Grössen $abc\ldots l$ irgend k (von einander verschiedene) der p^{ten} Einheitswurzeln, R sei der Rest der Division von n durch p, dann gilt der Satz: 1°. Für $R = 0$ ist $A = 1$. 2°. Ist R gleich einer der Zahlen 1, 2, 3, ..., $p-k$, so ist A gleich plus oder minus der Summe der Producte aus je R derjenigen $p-k$ p^{ten} Einheitswurzeln, welche in dem Algorithmus A nicht vorkommen, und zwar ist das Vorzeichen plus oder minus, je nachdem R gerade oder ungerade ist. 3°. Für $R > p-k$ ist $A = 0$.

Zum Schluss wird noch $\sum_n^q (ab\ldots l)$ durch $[1^{(q)}ab\ldots l]^{(n)}$, $[1^{(q)}ab\ldots l]^{(n-1)}$ ausgedrückt und durch Anwendung des Resultates auf die p^{ten} Wurzeln der Einheit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ die Gleichung:

$$\sum_n^q (\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_p) = p\sum_{i=0}^{i=E\left(\frac{n}{p}\right)} [1^{(q)}]^{(n-ip)}$$

gefunden, wo $E\left(\frac{n}{p}\right)$ das bekannte Zeichen ist. Wz.

O. CALLANDREAU. Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. Application au développement en série du potentiel d'un corps homogène. C. R. CIII. 864-867.

Wenn die Function $f(x)$ sich für alle positiven Werte von x, die kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl a ($a\leqq 1$) sind, durch die Maclaurin'sche Reihe darstellen lässt und die Coefficienten der Reihe $f^n(0)$ von einem gewissen n an nicht wachsen, so kann man die Darstellung der Function durch die Reihe fortsetzen, soweit dies nicht durch eine Unstetigkeit der Ableitungen $f^n(x)$ oder die Grenze der Convergenz verhindert wird.

Wz.

G. A. MAGGI. Deduzione della formola di Taylor. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 217-219.

Setzt man

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f^r(a)h^r}{1.2\ldots r} + R_n h^n,$$

so wird der Rest R_n ohne unbekannte Grösse in der Form:

$$R_n = \int_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=1} \alpha_1^{\,n-1} d\alpha_1 \int_{\alpha_2=0}^{\alpha_2=1} \alpha_2^{\,n-2} d\alpha_2 \ldots$$

$$\int_{\alpha_{n-1}=0}^{\alpha_{n-1}=1} \alpha_{n-1}\, d\alpha_{n-1} \int_{\alpha_n=0}^{\alpha_n=1} f^n(a+h\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\, d\alpha_n$$

ausgedrückt. Wz.

F. G. TEIXEIRA. Sur une formule d'analyse. Nouv. Ann. (3) V. 36-39.

Wenn die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ und ihre Ableitungen $f'(x)$, $F'(x)$, $f''(x)$, $F''(x)$, ..., $f^m(x)$, $F^n(x)$ für alle Werte von x im Intervall (x_0, x) endlich und bestimmt sind, so ist:

$$\frac{f(x)-f(x_0)-\cdots-\frac{(x-x_0)^i}{i!}f^i(x_0)}{F(x)-F(x_0)-\cdots-\frac{(x-x_0)^k}{k!}F^k(x_0)}$$

$$=\frac{\frac{(x-x_0)^{i+1}}{(i+1)!}f^{i+1}(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!}f^{m-1}(x_0)+R}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}F^{k+1}(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}F^{n-1}(x_0)+R'},$$

wo:

$$R=\frac{(x-x_0)(1-\theta)^{m-1}f^m[x+\theta(x-x_0)]}{(m-1)!},$$

$$R'=\frac{(x-x_0)(1-\theta)^{n-1}F^n[x+\theta(x-x_0)]}{(n-1)!}$$

ist, und θ zwischen 0 und 1 liegt. Wz.

Ch. Lagrange. Développement des fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes à l'aide d'autres fonctions de ces mêmes variables. Dérivées des fonctions de fonctions. Belg. Mém. S. É. XLVIII. 16 S.

Ausdehnung der „loi suprême“ auf den Fall mehrerer Veränderlichen. Das Verfahren zur Bestimmung des Restes ist das von Cauchy für den Taylor'schen Satz angewandte beim Uebergange von dem Falle einer Veränderlichen zu demjenigen von mehr als einer. Jedoch geschieht die Bestimmung der Coefficienten durch ein dem Verfasser eigentümliches Verfahren, nämlich eine Erweiterung derjenigen Methode, die er in seiner ersten Arbeit benutzt hat. Man vergleiche den Bericht des Herrn Mansion in Belg. Bull. (3) VIII. 317-322 (F. d. M. XVI. 1884. 209).

Mn. (Lp.)

G. Eneström. Note historique sur une série dont le terme général est de la forme $A_n(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. C. R. CIII. 523-525.

Mit Bezug auf die Noten des Herrn Bendixson: „Sur la formule d'interpolation de Lagrange" (C. R. CI. 1050-1053, 1129-1131; F. d. M. XVII. 1885. 226) bemerkt Herr Eneström, dass Herr Frobenius dieselbe Reihe bereits behandelt hat (Borchardt J. LXXIII. 1-30; F. d. M. III. 1871. 188) in der Abhandlung: „Ueber die Entwicklung analytischer Functionen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten", dass jedoch die ersten Betrachtungen über die Reihe schon 1727 in einer Abhandlung von Nicole vorkommen: „Méthode pour sommer une infinité de suites nouvelles, dont on ne peut trouver les sommes par les méthodes connues." (Mém. de l'Ac. Royale des Sciences de Paris.)

Lp.

J. Bendixson. Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss. Acta Math. IX. 1-34.

Der Herr Verfasser entwickelt einige Sätze über die Convergenz der Reihe:

$$B:\ \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\nu),\quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a,$$

wo a eine endliche complexe Grösse bedeutet, und folgert daraus, dass diese Reihe für alle innerhalb ihres Convergenzbezirkes gelegenen Werte von x einer Potenzreihe von $x-a$ gleichgesetzt werden kann. Das gewünschte Resultat lautet dann: Bedeutet $F(x)$ eine Function von x, welche in der Umgebung von $x=a$ in eine nach ganzen, positiven und wachsenden Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ entwickelt werden kann, bedeuten ferner $A_1, \dots, A_\nu \dots$ die Werte von $F(x)$ für

$$x = a_1, \dots, a_\nu, \dots, \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a,$$

so kann $F(x)$ für alle im Innern des Convergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}(x-a)$ befindlichen Werte von x in die Reihe B ent-

wickelt werden, wobei gesetzt ist:

$$B_0 = A_1,\ B_1 = A_2^1 = \frac{A_2 - A_1}{a_2 - a_1}, \ldots, B_\nu = A_{\nu+1}^{(\nu)} = \frac{A_{\nu+1}^{(\nu-1)} - A_\nu^{(\nu-1)}}{a_{\nu+1} - a_\nu},$$

$$A_\mu^1 = \frac{A_\mu - A_1}{a_\mu - a_1}, \ldots, A_\mu^{(\nu)} = \frac{A_\mu^{(\nu-1)} - A_\nu^{(\nu-1)}}{a_\mu - a_\nu}.$$

Weiterhin untersucht der Herr Verfasser die Reihe B unter der Voraussetzung $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$ und zwar für den Fall, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|}$ convergent ist (für den Fall, dass diese Reihe divergent ist, lässt sich die Untersuchung nicht allgemein führen). 1) Wenn dann die Reihe B für $x = \alpha$ ($\alpha \gtrless a_\nu$) convergirt, resp. gleichmässig convergirt, so gilt dies auch für jeden endlichen Wert von x. 2) Wenn die Reihe B für $x = \alpha$ ($\alpha \gtrless a_\nu$) convergirt, so convergirt sie gleichmässig innerhalb einer beliebigen endlichen Fläche der Ebene der Veränderlichen x.

An einigen Beispielen wird gezeigt, in welcher Weise der Convergenzbereich der Reihe B sich mit der Wahl der Grössen a_ν ändert und schliesslich $D_x \log \Gamma(x+1) + C$, wo C die Euler'sche Constante ist, durch eine Reihe von der Form B dargestellt.

Wz.

P. Alexander. A proof of Fourier's series for periodic functions. Mess. XVI. 23-26.

Der Beweis hat denselben allgemeinen Charakter wie der Poisson'sche.

Glr. (Lp.)

P. Alexander. Extension of Fourier's trigonometric series theorems. Mess. XVI. 42-61.

Die Erweiterungen betreffen den Fall, in welchem $f(x)$ in eine Reihe nach den Sinus und den Cosinus der Vielfachen von x zu entwickeln ist, nämlich $n_1 x$, $n_2 x$, ..., wo n_1, n_2, ... in unendlicher Anzahl vorkommen und entweder ganz willkürlich sind, oder auch aus irgend welchen Gleichungen von der Art wie

$\frac{nX}{\tan g nX} = 1 - hX$ abgeleitet werden können, die von Fourier in § 292 betrachtet sind. Glr. (Lp.)

A. R. JOHNSON. A proof of Fourier's series theorem. Mess. XVI. 90-98.

Der Aufsatz betrifft die Entwickelung von $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1})$. Als Ausgangspunkt wählt der Verfasser den Satz, dass der Grenzwert von

$$\int \frac{\zeta f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}) dx_1 dx_2 \ldots dx_n}{\{\zeta^2 + (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-1}')^2\}^{\frac{1}{2}n}}$$

für $\zeta = 0$ gleich

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} f(x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}')$$

ist, wenn der Punkt $x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}'$ innerhalb des Integrationsraumes liegt, und Null, wenn ausserhalb. Die Function f ist durch diesen Raum hin als continuirlich vorausgesetzt.

Glr. (Lp.)

C. V. L. CHARLIER. En metod att föröka konvergensen hos en trigonometrisk serie. Stockh. Öfv. 157-166.

Eine Uebersetzung dieses Aufsatzes ist unter dem Titel „Sur une méthode permettant d'augmenter la convergence des séries trigonométriques" im Bulletin Astronomique III. 1886 pag. 378—385 erschienen. M. L.

F. G. TEIXEIRA. Sur un théorème de M. Hermite relatif à l'interpolation. Kronecker J. C. 83-86.

Es sei $f(x)$ eine eindeutige Function von x mit polaren Unstetigkeiten, welche in einer durch die Curven A und a begrenzten, ringförmigen Fläche stetig ist; $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ seien die Coordinaten von Punkten dieser durch

A resp. a begrenzten Flächen. Dann ist:

$$f(x) = \Pi(x)+\theta(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_A \frac{f(z)(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma \dots dz}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta(z-a_3)^\gamma \dots}$$

eine Verallgemeinerung der von Herrn Hermite (Kronecker J. LXXXIV; vgl. F. d. M. IX. S. 312) aufgestellten Interpolationsformel. Hierin bedeutet $\theta(x)$ eine ganze Function von $\frac{1}{x-b_1}$, $\frac{1}{x-b_2}, \dots$, $\Pi(x)$ eine Function von x vom Grade $\alpha+\beta+\gamma+\dots-1$.

Wz.

T. H. Miller. A proof of Lagrange's theorem. Edinb. M. S. Proc. IV. 45-46.

Nach dem Taylor'schen Satze werden die ersten drei Terme gefunden; durch Induction wird sodann gezeigt, dass ihr Bildungsgesetz allgemein gültig ist. Gbs. (Lp.)

J. M. Rodrigues. Nota sobre a serie de Lagrange. Teixeira J. VIII. 59-64.

In dieser Arbeit versucht der Verfasser die Lagrange'sche Reihe zu verallgemeinern; aber die Gleichung, welche er betrachtet, lässt sich leicht auf die von Lagrange untersuchte zurückführen. Tx. (Hch.)

Ch. Lagrange. Démonstration élémentaire de la loi suprême de Wronski. Belg. Mém. S. É. XLVII. 8 S.

Eine Uebersicht und Vereinfachung des Beweises von Herrn Lagrange findet man in Belg. Bull. (3) VIII. 165—172 (F. d. M. XVI. 1884. 209). Der von demselben Verfasser in C. R. XCVIII. 1422—1425 (F. d. M. XVI. 1884. 208) veröffentlichte Beweis ist noch einfacher und völlig gleichwertig. Mn. (Lp.)

J. DERUYTS. Sur certains développements en séries. Belg. Mém. S. É. XLVII. 18 S.

Der Gegenstand dieser Abhandlung ist 1885 gleichzeitig mit den Berichten der Herren Catalan und Mansion besprochen worden, die in Belg. Bull. IX. 523—525, 525—528 erschienen sind. (F. d. M. XVII. 1885. 218). Mn. (Lp.)

Capitel 2.

Besondere Reihen.

W. FUHRMANN. Aufgaben aus der niederen Analysis. Pr. 20 S. 4°.

Als Ergänzung der gebräuchlichen Aufgabensammlungen liefert der Verfasser im ganzen 57 Beispiele, 19 über die Binomialcoefficienten, 12 über Partialbrüche und Lamé'sche Coefficienten, 26 über die unendlichen Reihen für den natürlichen Logarithmus, für arctang u. s. w. Manche von den Aufgaben sind neu, andere bekannten Werken entlehnt, wie z. B. der Introductio von Euler oder der Hoffmann'schen Zeitschrift. Lp.

H. W. L. TANNER. Note on the classification of some algebraical series. Mess. XV. 187.

Der Verfasser erdenkt Reihen, denen die Namen gleichsam-arithmetisch, gleichsam-geometrisch, gleichsam-harmonisch passender Weise beigelegt werden können. Glr. (Lp.)

L. KRONECKER. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. C. R. CIII. 980-987.

Ist $\varphi_1+\varphi_2+\cdots$ eine convergente Reihe reeller Zahlen und $\psi_1, \psi_2, \ldots$ eine Reihe reeller, positiver, wachsender Zahlen von der Art, dass $\lim_{n=\infty}\frac{1}{\psi_n}=0$ ist, dann ist:

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{\psi_n}(\varphi_1\psi_1+\cdots+\varphi_n\psi_n)=0$$

und allgemeiner

$$(2)\qquad \lim \frac{1}{\psi_n-\psi_m}(\varphi_{m+1}\psi_{m+1}+\cdots+\varphi_n\psi_n)=0$$

für wachsende Werte von m und in gewisser, davon abhängiger Weise wachsende Werte von n. Dies wird auf den Fall

$$\psi_k=k,\quad \varphi_k=\frac{c_k}{k}$$

und allgemeiner

$$\varphi_k=\frac{c_k}{k^{1+\varrho}}\quad (\varrho \geqq 0)$$

angewandt und hieran werden Folgerungen geknüpft, die für die Zahlentheorie wichtig sind. T.

G. de Marco. Soluzioni delle quistioni 54 e 48. Batt. G. XXIV. 378-380.

Betrachtet man alle Polygone von n Seiten, so ist das arithmetische Mittel desjenigen Winkels, welcher in der wachsenden Reihe der Winkel eines jeden Polygons die r^{te} Stelle einnimmt, gleich:

$$n\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n-r+1}+\frac{1}{n-r+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Setzt man hierin $n=2k$ und lässt k unendlich gross werden, so nimmt dieser Ausdruck angenähert den Wert $124^\circ 46'$ an. Wz.

M. Stern. Sur un théorème de M. Hermite relatif à la fonction $E(x)$. Acta Math. VIII. 93-96.

Herr Hermite hat gezeigt, dass

$$E(x)+E\left(x+\frac{1}{m}\right)+\cdots+E\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$

gleich $E(mx)$ ist. Sind nun k und m zwei ganze Zahlen, $k<m$ und

$$x \geqq E(x)+\frac{k}{m}, \quad x<E(x)+\frac{k+1}{m},$$

so ist der Wert der Reihe:

$$S=E\left(x+\frac{1}{m}\right)-E\left(x+\frac{2}{m}\right)+E\left(x+\frac{3}{m}\right)-\cdots\pm E\left(x+\frac{m-1}{m}\right)$$

gleich $E(x)$, -1, $E(x)+1$, 0, je nachdem die Zahlen m und k beide gerade, beide ungerade, m gerade und k ungerade oder m ungerade und k gerade ist. — Ausserdem lässt sich die Summe der positiven Glieder und die Summe der negativen Glieder von S durch $E(mx)$ und $E(x)$ ausdrücken. Wz.

N. J. Sonine. Ueber Zahlenidentitäten und ihre Anwendung auf die Lehre von den unendlichen Reihen. Warsch. Nachr. 1885. 1-28. (Russisch).

Aus der Identität

$$\sum_{m=a}^{m=b}\sum_{n=p}^{n=q}\Theta(m,n)=\sum_{n=p}^{n=q}\sum_{m=a}^{m=b}\Theta(m,n)$$

wird eine grosse Anzahl von Relationen zwischen endlichen Summen unter sich und ebenso zwischen unendlichen Reihen unter einander abgeleitet. Die meisten dieser Relationen schliessen die zahlentheoretische Function $[x]$ (die grösste in x enthaltene ganze Zahl) in sich. So findet z. B. der Verfasser die folgende wichtige Formel:

$$\sum_1^\infty[\varphi n]=\sum_1^\infty[\varphi n-n]+\sum_1^\infty[\psi n-n+1],$$

wo ψn und φn zwei abnehmende Functionen bezeichnen, von denen die eine die Umkehrung der anderen ist. Die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[t]\,df(t)=-\sum_{-\infty}^{\infty}f(k),$$

welche von dem Verfasser in der Abhandlung: „Ueber ein bestimmtes Integral, welches die zahlentheoretische Function $[x]$ enthält“ (Warsch. Nachr. 1885) bewiesen ist, wird dann benutzt, um aus den gefundenen Relationen andere Relationen mit der willkürlichen Function $f(x)$ herzuleiten. In dieser Weise kann man z. B. von den Identitäten, welche von Liouville im Jahre 1880 gegeben waren,

$$\left(\Sigma(-1)^m\left[\frac{t}{2m-1}\right] = \sum_0 [\sqrt{t-m^2}] \quad \text{u. s. w.}\right)$$

zu den Relationen fortschreiten, welche in der Theorie der elliptischen Functionen zwischen den Potenzen von q auftreten.

Wi.

F. J. Studnička. Ueber die einfachste Ableitung der Coefficienten einer Reihe, welche den reciproken Wert eines nach aufsteigenden Potenzen von x geordneten Polynoms n^{ten} Grades darstellt. Casop. XV. 170. (Böhm.)

Anknüpfend an den in diesem Jahrbuch XV. 1883. 326 gegebenen Bericht über die betreffende Abhandlung von Faà de Bruno, wo der Coefficient von x^p in der Entwickelung der Function

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}$$

nach aufsteigenden Potenzen von x in Determinantenform dargestellt erscheint, zeigt der Autor, dass man ohne Verwendung des Hilfssatzes von Bruno (Tortolini Ann. 1855) direct zum Ziele gelangt, indem die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten zunächst ein System von linearen Relationen zwischen den einzelnen gesuchten Grössen bietet, aus welchem durch Elimination der ersten p Unbekannten für den Coefficienten der Potenz x^p, nämlich für A_p die Formel

$$A_p = (-1)^p \frac{\Delta_p}{a_0^{p+1}}$$

erhalten wird, wobei zu gelten hat

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1} & a_{p-2} & a_{p-3} & \dots & a_0 \\ a_p & a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Hierauf wird in der ersten Anmerkung ein sehr einfacher Beweis geführt, dass diese Determinante 2^{p-1} Glieder zählt, während in der zweiten Anmerkung die Auswertung derselben gezeigt wird, wenn

$$a_k = 0 \quad \text{für} \quad k > 2,$$

indem in diesem speciellen Falle

$$\Delta_p = \sum_{k=0} (-1)^k (n-k)_k (a_0 a_2)^k a_1^{p-2k}.$$

In der dritten Anmerkung wird gezeigt, wie man diese Determinante verwendet, um die Summe der p^{ten} Potenzen der Wurzeln einer Gleichung

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

darzustellen. Nennt man sie D_p, so erhält man

$$D_p = \Delta_p - a_2 \Delta_{p-2};$$

nennt man also die beiden Wurzeln x_1 und x_2, so gilt

$$x_1^p + x_2^p = (-1)^p D_p.$$

In der vierten Anmerkung wird der specielle Fall

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 1$$

behandelt, wo also $x_1 = x_2 = 1$ ist und folglich

$$x_1^p + x_2^p = 2.$$

Unter Verwendung des für D_p früher gelieferten Wertes erhält man dann eine Reihe von interessanten Formeln, wie z. B.

$$1 = 2^{2k} - \frac{2k+1}{1} 2^{2k-2} + \frac{2k+1}{2} (2k-2)_1 2^{2k-4} - \frac{2k+1}{3} (2k-3)_2 2^{2k-6} + \dots + (-1)^k (2k+1),$$

$$1 = 2^{2k-1} - \frac{2k}{1} 2^{2k-3} + \frac{2k}{2} (2k-3)_1 2^{2k-5} - \frac{2k}{3} (2k-4)_2 2^{2k-7} + \dots + (-1)^k.$$

In der letzten Anmerkung wird angenommen

$$a_0 = 1, \quad a_2 > \tfrac{1}{4}a_1,$$

so dass die beiden Wurzeln der betreffenden quadratischen Gleichung complex werden. Sind dieselben

$$x = a_2^{\frac{1}{2}}(\cos\varrho \mp i\sin\varrho),$$

so erhält man

$$x_1^p + x_2^p = 2a_2^{\frac{p}{2}}\cos p\varrho,$$

wobei man unter Verwendung der vorangehenden Formeln entweder

$$\cos p\varrho = 2^{p-1}\cos^p\varrho + \sum_{k=1}(-1)^k \frac{p}{k}(p-k-1)_{k-1}2^{p-k-1}\cos^{p-2k}\varrho$$

oder in Determinantenform

$$\cos p\varrho = \begin{vmatrix} \cos\varrho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\varrho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varrho & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\varrho \end{vmatrix}$$

ableiten kann. (Vgl. auch S. 116.) Std.

A. Gutzmer. Remarques sur la théorie des séries. Teixeira J. VIII. 81-88.

Der Verfasser zeigt zuerst, dass die von Kirchhoff benutzte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{1-xz^n}$$

durch eine Transformation auf die Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-xyz^{2n}}{(1-xz^n)(1-yz^n)} x^n y^n z^{n^2}$$

gebracht werden kann und dass diese Transformation ein specieller Fall einer von Heine gegebenen allgemeinen Transformation einer Reihe ist. (Siehe Heine Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin 1878. t I. p. 98). Darauf betrachtet er die Reihe

$$\Sigma u_n = \Sigma \frac{xz^n}{1-xz^n},$$

welche er auf zwei verschiedenen Wegen mit der Kirchhoff'schen Reihe in Beziehung setzt. Hieraus ergeben sich zwei transformirte Formen für die betrachtete Reihe. Tx. (Hch.)

H. Simon. Die harmonische Reihe. Diss. Halle.

Zweck der Arbeit ist, die Eigenschaften der harmonischen Reihe:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+z}$$

ohne Benutzung der Infinitesimalrechnung ausschliesslich durch die Methoden der algebraischen Analysis in strenger Weise zu begründen; im besonderen handelt es sich dabei um die Grenze des Ausschnitts: $\lim S_n(z) - S_m(z)$ für $n = \infty$, $m = \infty$, um die Beziehungen der Reihe zum Logarithmus, der von Gauss (Disquisitiones generales circa seriem infinitam) eingeführten Function $\Psi(z)$ und der Euler'schen Constante $-\Psi(0)$, mit deren Hülfe sich eine angenäherte Summirung der endlichen Reihe ermöglichen lässt. Schliesslich wird in derselben Weise, d. h. ohne Benutzung bestimmter Integrale die Wertänderung der alternirenden harmonischen Reihe für den Fall ermittelt, dass man auf p positive immer q negative Glieder folgen lässt, und der von Herrn Schlömilch hierfür gegebene Satz (Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis II. Cap. V. § 23) für den Fall verallgemeinert, dass p und q veränderlich sind. Wz.

H. Simon. Zur Summation endlicher Reihen von der Form $\Sigma k u_k$. Hoppe Arch. (2) IV. 107-112.

Wendet man die Formel:

$$\sum_1^n k u_k = (n+1)\sum_1^n u_k - \sum_1^n (u_1 + u_2 + \cdots + u_k)$$

auf $u_k = \sin kx$, $\cos kx$ an, so erhält man:

$$\sum_1^n k \sin kx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\sum_1^n k \cos kx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Setzt man $u_k = k^p$, so kann man Σk, Σk^2, Σk^3, ... ohne Benutzung der arithmetischen Reihen höherer Ordnung berechnen.

Wz.

J. B. Pomey. Sur la limite de $\sum\limits_1^n \frac{1}{p} - \sum\limits_1^m \frac{1}{q}$, lorsque p et q parcourent toutes les valeurs entières positives jusqu'à n et m respectivement, et que n et m augmentent indéfiniment, tandis que leur rapport tend vers une limite déterminée. Nouv. Ann. (3) V. 348-352.

Durch Vergleichung der allgemeineren Reihe $\sum\limits_{i=1,2,\dots,\infty} \frac{1}{i^{1+\varrho}}$, wo ϱ positiv ist, mit dem Integral:

$$\int_i^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho i^\varrho}$$

ergiebt sich für $\varrho = 0$ der gesuchte Grenzwert gleich $\log \lim\left(\frac{n}{m}\right)$. Ein anderer Beweis beruht darauf, dass der gesuchte Grenzwert nur von $\frac{n}{m}$ abhängt und die für den Logarithmus charakteristische Eigenschaft $f(xy) = f(x) + f(y)$ hat.

Wz.

M. d'Ocagne. Sur une suite récurrente. S. M. F. Bull. XIV. 20-41.

Für die Fibonacci'sche Folge, deren $(p+1)^{\text{tes}}$ Glied u_p durch die Gleichungen:

$$u_p = u_{p-1} + u_{p-2}; \quad u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

definirt ist, werden zunächst einige Sätze abgeleitet. Bedeuten x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung: $x^2 - x - 1 = 0$, so können vermöge der Gleichungen $x_\lambda^p = x_\lambda u_p + u_{p-1}$ $(\lambda = 1, 2)$ die verschiedenen Potenzen von x_1 und x_2 mit Hülfe der Fibonacci'schen Folge leicht berechnet werden. Ferner ist:

$$u_p = \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1 - x_2},$$

$$\sum_{i=0}^{p} u_i = u_{p+2} - 1,$$

$$\lim_{p=\infty} \frac{u_p}{u_{p-i}} = x_1^i,$$

$$u_p u_i - u_{p+1} u_{i-1} = (-1)^{i+1} u_{p-i+1},$$

$$u_p u_{p-1} = u_p^2 - u_{p-1}^2 + (-1)^p.$$

Anknüpfend an diese Sätze löst der Herr Verfasser die Aufgabe: Es soll zwischen zwei gegebene Grössen a und b $(b > a)$ eine Folge anderer Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ eingeschaltet werden, so dass, wenn $a = \alpha_0$, $b = \alpha_{p+1}$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i-2} \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \ldots, p+1$$

befriedigt wird.

Nach einem früher bewiesenen Satze des Herrn Verfassers (Nouv. Ann. (3) III) ist $\alpha_i = \alpha_1 u_i + a u_{i-1}$, oder wenn man hieraus α_1 mit Hülfe der Gleichung $b = \alpha_1 u_{p+1} + a u_p$ eliminirt:

$$\alpha_i = \frac{b u_i + (-1)^i a u_{p+1-i}}{u_{p+1}}.$$

Sind a und b positiv, so sind demnach alle Glieder α_i, deren Index eine gerade Zahl ist, positiv, ebenso alle Glieder mit ungeradem Index, welche der zweiten Hälfte der Folge angehören. Negative Glieder können nur in der ersten Hälfte vorkommen, und zwar wird es ein Maximum negativer Glieder geben, wenn

$$\frac{u_{p-\omega+1}}{u_\omega} > \frac{b}{a}$$

ist; dies Maximum, für welches der Name „Fülle (plénitude) negativer Glieder" eingeführt wird, ist gleich $\frac{\omega+1}{2}$, wo ω die grösste ungerade ganze Zahl bedeutet, welche in $\frac{p}{2}$ enthalten ist.

Für $p = 4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ wird dies im einzelnen begründet und die Grenze von $\frac{b}{a}$ bestimmt; im allgemeinen ergiebt sich: Je nachdem $\frac{b}{a} < 1,5$ resp. $> 6,85403\ldots$ ist, giebt es für jeden Wert von p eine Fülle negativer Glieder oder nicht.

Die Summe S_p der Folge ist:

$$S_p = \sum_{i=0}^{p+1} \alpha_i = \frac{(b+a)u_{p+2} + (b-a)u_{p+1} - [b-(-1)^p a]}{u_{p+1}}.$$

Für $p = \infty$ besteht die Folge aus den beiden von a resp. b bis Null abnehmenden Folgen:

$$a, \frac{-a}{x_1}, \ldots, \frac{(-1)^i a}{x_1^i} \quad \text{und} \quad b, \frac{b}{x_1}, \ldots, \frac{b}{x_1^i};$$

ihre Summe ist gleich $(b+a)x_1 + (b-a)$. Wz.

A. Macfarlane, A. H. Curtis. Solution of question 8250. Ed. Times. XLV. 28-29.

Es ist:

$$\tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \cdots \text{in inf.} = 1,$$

$$\tfrac{1}{2} - \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \cdots \text{in inf.} = \left\{\frac{2^{\frac{1}{2}}-1}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Lp.

V. Mollame. Sur les sommes des produits k à k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) des nombres naturels. Nouv. Ann. (3) V. 364-370.

Bedeutet $\varphi(a)$ die Function:

$$1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a+k)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a+k)(a+2k)\ldots(a+[m-1]k)}{k!}x^m,$$

so ist $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(a+b)$. Durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x ergeben sich Gleichungen zwischen a, b und den Grössen $S_{k,n}$, wo $S_{k,n}$ die Summe aller Producte aus je k der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ bezeichnet. Entwickelt man diese Gleichungen nach Producten von Potenzen der a und b, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten Formeln zur recurrenten Berechnung der Grössen $S_{k,n}$. Wz.

Anglin. Sur le coefficient du terme général dans certains développements. Jordan J. (4) II. 139-150.

Bezeichnet man die Summe:

$$a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)+b^{n+2}(c^m+a^m)^r(c-a)$$
$$+c^{n+2}(a^m+b^m)^r(a-b)$$

durch $\Sigma a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)$, so ist:

$$\text{(I)} \qquad \Sigma a^{n+2}(b-c) = kh_n,$$

wo

$$h_n = \Sigma a^\lambda b^\mu c^\nu (\lambda+\mu+\nu=n); \quad k = \Sigma a^2(b-c)$$

ist. Der Beweis beruht darauf, dass das Product

$$\frac{1}{1-ax}\,\frac{1}{1-bx}\,\frac{1}{1-cx}$$

auf zwei verschiedene Arten nach steigenden Potenzen von x entwickelt wird und die Coefficienten von x^n einander gleichgesetzt werden.

Multiplicirt man nun die Gleichung (I) mit:

$$a^4+b^4+c^4 = s_4,$$

so erhält man:

$$\Sigma a^{n+2}(b^4+c^4)(b-c) = k(s_4 h_n - h_{n+4});$$

multiplicirt man diese Gleichung wieder mit $a^4+b^4+c^4 = s_4$, das Resultat wieder und so fort, so erhält man:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\Sigma a^{n+2}(b^4+c^4)^r(b-c)}{k}$$
$$= \begin{cases} s_4^r - r s_4^{r-1} h_{n+4} + \dfrac{r(r-1)}{1.2} s_4^{r-2} h_{n+8} \\ - \dfrac{r(r-1(r-2)}{1.2.3} s_4^{r-3} h_{n+12} + \cdots + (-1)^r h_{n+4r}. \end{cases}$$

Bedeuten nun $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die 4[ten] Wurzeln der Einheit, so ist $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n$ gleich 4 oder 0, je nachdem n durch 4 teilbar ist oder nicht. Entwickelt man nun sowohl das Product

$$\frac{1}{1-a\alpha x}\,\frac{1}{1-b\alpha x}\,\frac{1}{1-c\alpha x}$$

als auch diejenigen, welche sich hieraus ergeben, wenn α resp. durch β, γ, δ ersetzt wird, nach steigenden Potenzen von x, so ist der vierte Teil der Summe dieser vier Ausdrücke gleich der Reihe:

$$1+h_1 x+h_2 x^2+\cdots+h_n x^n+h_{n+4}x^{n+4}+\cdots+h_{n+4r}x^{n+4r}+\cdots;$$

andererseits zeigt sich jedoch, dass der vierte Teil dieser Summe gleich

$$B = \frac{1+B_4x^4+B_8x^8}{(1-a^4x^4)(1-b^4x^4)(1-c^4x^4)}$$

ist, wo $B_4 = s_4 - h_4$, $B_8 = h_8 - s_4 h_4$ gesetzt ist. Multiplicirt man die vorstehende Summe und den Quotienten B mit $(s_4 x^4 - 1)^r$, so ist unmittelbar ersichtlich, dass der Quotient (II) gleich dem Coefficienten von x^{n+4r} des Ausdrucks $B.(s_4 x^4 - 1)^r$ ist.

Der entsprechende Satz wird allgemein für den Ausdruck:

$$\frac{\Sigma a^{n+2}(b^m+c^m)^r(b-c)}{k}$$

bewiesen. Wz.

Ladrasch. Summation der Reihe, deren Glieder die Potenzen desselben Grades der natürlichen Zahlen mit positiven ganzzahligen Exponenten sind. Pr. Realgymn. Dortmund.

Es soll:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

durch n und k ausgedrückt werden. Zu diesem Zwecke wird zunächst die Formel:

$$(k+1)S_k = n(n+1)^k - \binom{k}{2}S_{k-1} - \binom{k}{3}S_{k-2} - \cdots - \binom{k}{k-1}S_2 - S_1$$

abgeleitet. Setzt man in derselben für k die Werte

$$k,\ k-1,\ k-2,\ \ldots,\ 2,\ 1,$$

so ergiebt sich durch Elimination von S_{k-1}, S_{k-2}, $\ldots$, S_2, S_1 mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten das Resultat:

$$(k+1)S_k = n(n+1)[(n+1)^{k-1} + a_1(n+1)^{k-2} + a_2(n+1)^{k-3} + \cdots + a_{k-2}(n+1) + a_{k-1}];$$

Bei der Berechnung der unbestimmten Grössen wird gezeigt, dass $a_{2\varepsilon+1} = a_{2\varepsilon}$ ist, wenn ε eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die gefundene Formel wird für $k = 2\varepsilon+1$, 2ε specialisirt.

Wz.

HUDSON, S. AIYAR. Solution of question 8247. Ed. Times. XLV. 64.

Man setze $S_r = 1^r+2^r+3^r+\cdots+n^r$, so ist:

$$\frac{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}-(n+1)+(-1)^r n}{(r+1)r}$$
$$= S_{r-1}+\frac{(r-1)(r-2)}{3.4}S_{r-2}+\frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{3.4.5.6}S_{r-5}+\cdots$$

Lp.

R. W. GENESE. On the sum of the nth powers of the terms of an arithmetical progression. Brit. Ass. Rep. 540.

Es sei $\varphi(t) = 1^n+2^n+3^n+\cdots+t^n$, so ist

$$(a+d)^n+(a+2d)^n+\cdots+(a+rd)^n = d^n\left\{\varphi\left(\frac{a}{d}+r\right)-\varphi\left(\frac{a}{d}\right)\right\}.$$

Gbs. (Lp.)

F. J. STUDNIČKA. Ueber eine neue independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen. Casop. XV. 97. (Böhm.)

Ausgehend von der n^{ten} Derivation der Function

$$u = \frac{x}{e^x-1},$$

gelangt man durch Elimination aus einem daraus gebildeten Systeme von linearen Relationen zur Determinante

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 6 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{m-1} \\ 1 & (m+1)_1 & (m+1)_2 & \cdots & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix},$$

wo m_k den k^{ten} Binomialcoefficienten bezeichnet. Mit Hülfe dieser Determinante lässt sich die k^{te} Bernoulli'sche Zahl in der Form

$$B_k = (-1)^{k+1}\frac{\Delta_{2k}}{(2k+1)!}$$

darstellen. Ausserdem geht aus der Zusammensetzung obiger Determinante hervor, dass

$$B_{2k+1} = 0, \quad (k > 0),$$

wie darin selbständig nachgewiesen wird. Std.

R. Lipschitz. Sur la représentation asymptotique de la valeur numérique ou de la partie entière des nombres de Bernoulli. Darb. Bull. (2) X. 135-144.

A. Stern. Sur une propriété des nombres de Bernoulli. Darb. Bull. (2) X. 280-282.

In der Clausen-v. Staudt'schen Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen

$$(-1)^m B_m = A_m + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \cdots + \frac{1}{\lambda},$$

worin A_m eine ganze Zahl und $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sämtliche Primzahlen bedeuten, welche, um eine Einheit vermindert, Teiler von $2m$ sind, besitzt die Zahl A_m die unmittelbar ersichtliche Eigenschaft, für die sechs ersten Werte von m gleich -1 und für alle ungeraden Zahlen $m > 6$ negativ zu sein. Dagegen hat A_m für jedes gerade $m > 6$ stets einen positiven Wert; der Beweis hierfür gelingt Herrn Lipschitz auf Grund einer asymptotischen Darstellung des numerischen Wertes von B_m, die an sich bemerkenswert ist. In der Euler'schen Gleichung:

$$B_m = 4m \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m) = 4me^{\log\left[\frac{\Gamma(2m)}{(2\pi)^{2m}}\right]} \zeta(2m),$$

wo

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

ist, lässt sich nämlich die Function $\log \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi)^{2m}}$ in die Reihe entwickeln

$$\left(-2m + \frac{1}{2}\right)\log 2\pi + \left(2m - \frac{1}{2}\right)\log\left(2m - \frac{1}{2}\right) - \left(2m - \frac{1}{2}\right)$$
$$-\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{2m - \frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{\left(2m - \frac{1}{2}\right)^3} \mp \cdots,$$

von der gezeigt wird, dass sie semiconvergent ist. Da ferner:

$$1+\frac{1}{2^{2m}}+\cdots+\frac{1}{a^{2m}}<\zeta(2m)<1+\frac{1}{2^{2m}}+\cdots+\frac{2m+a-1}{2m-1}\frac{1}{a^{2m}}$$

ist, so kann man den numerischen Wert von B_m für hinreichend grosse Werte von m in einander beliebig nahe Grenzen einschliessen.

Eine erste Annäherung ergiebt die Ungleichungen:

$$B_m<4m\left(\frac{2m-\frac{1}{2}}{2\pi e}\right)^{2m-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m+1}{2m-1}\frac{1}{2^{2m}}\right),$$

$$B_m>4m\left(\frac{2m-\frac{1}{2}}{2\pi e}\right)^{2m-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{24}\frac{1}{2m-\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{2^{2m}}\right),$$

von denen die zweite vermittelst einfacher Schlüsse zu dem Nachweise führt, dass A_m für jedes gerade m (>6) positiv ist.

Einen zweiten Beweis, der elementarerer Natur ist, erbringt Herr Stern. Aus der Euler'schen Gleichung und der von ihm Kronecker J. XCII. 349. (cf. F. d. M. 1882. XIV. 191f.) gemachten Bemerkung, dass $\frac{\zeta(2m+2)}{\zeta(2m)}>\frac{6}{\pi^2}$ ist, erhält er sofort $B_m>\frac{2m-1}{4}$ für $m>7$. Da nun

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots+\frac{1}{\lambda}<\frac{m+2}{3} \text{ und } \frac{2m-1}{4}>\frac{m+2}{3} \text{ (für } m\gtreqless 6)$$

ist, ergiebt sich der Satz, dass für $m>6$

$$B_m>\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\cdots+\frac{1}{\lambda}$$

ist, woraus der Satz des Herrn Lipschitz unmittelbar folgt.

T.

E. Cesaro. Sur un théorème de M. Lipschitz, et sur la partie fractionnaire des nombres de Bernoulli. Brioschi Ann. (2) XIV. 221-226.

Der Verfasser basirt seinen Beweis des Lipschitz'schen Satzes (s. das vorhergehende Referat) hauptsächlich auf die Stirling'sche Formel, welche auf die Euler'sche Gleichung angewandt

$$B_m>4\pi\sqrt{e}\left(\frac{m}{\pi e}\right)^{2m+\frac{1}{2}}$$

liefert. Auf demselben Wege erhält er

$$B_n = 4\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}\left(1+\frac{\varepsilon}{2^{2n-1}-1}\right)e^{\frac{\theta}{24n}},$$

wo θ ein echter Bruch und $0{,}5 < \varepsilon < 0{,}7$ ist; daher ist der asymptotische Wert der Bernoulli'schen Zahlen von der Form $cn^{2n+\frac{1}{2}}$. Dann giebt Herr Cesaro einige Formeln für den „gebrochenen Teil"

$$E_m = \frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\dots+\frac{1}{\lambda}$$

von $(-1)^m B_m$. Zunächst ist sein mittlerer Wert

$$\lim_{n=\infty}\sum_1^n{}_i\, E_i = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_p\frac{1}{p(p-1)},$$

wo p alle ungeraden Primzahlen durchläuft. Ferner besteht die interessante Formel

$$\sum_1^\infty{}_i\,\frac{E_i\psi(i)}{i^m} = \left\{\frac{1}{2}+\sum_p\frac{\psi\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\left(\frac{p-1}{2}\right)^m\cdot p}\right\}\cdot\sum_1^\infty{}_i\,\frac{\psi(i)}{i^m},$$

wenn die Function ψ der Functionalgleichung $\psi(x)\psi(y)=\psi(xy)$ für alle positiven ganzzahligen x, y genügt. Durch Specialisirung von ψ werden daraus die Summen mehrerer aus den Zahlen E_m zusammengesetzten Reihen, wie z. B.

$$E_1 - \tfrac{1}{3}E_3 + \tfrac{1}{5}E_5 - \tfrac{1}{7}E_7 + \tfrac{1}{9}E_9 \mp \dots$$

hergeleitet und die Euler'schen Zahlen durch diese gebrochenen Teile der Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückt. T.

E. Cesaro. Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. Nouv. Ann. (3) V. 305-327.

Für die Bernoulli'schen Zahlen B_n, die Euler'schen E_n, die ultra-Bernoulli'schen $\mathfrak{B}_n$ und die ultra-Euler'schen Zahlen $\mathfrak{E}_n$ bestehen die symbolischen Gleichungen:

$$f(x+B+1)-f(x+B)=f'(x+1),$$
$$f(x+E+1)-f(x+E-1)=2f(x),$$
$$f(x+\mathfrak{B}+1)-af(x+\mathfrak{B})=f'(x+1),$$
$$f(x+\mathfrak{E}+1)-af(x+\mathfrak{E}-1)=(1+a)f(x),$$

woraus die summatorischen Formeln folgen:

$$\sum_1^n {}_\nu f'(\nu) = f(n+B) - f(B),$$

$$\sum_1^n {}_\nu (-1)^{\nu-1} f(2\nu-1) = \tfrac{1}{2}[f(E) \pm f(E+2n)],$$

$$\sum_1^n {}_\nu z^\nu f'(\nu) = z^n f(n+\mathfrak{B}) - f(\mathfrak{B}),$$

$$\sum_1^n {}_\nu (-z)^{\nu-1} f(2\nu-1) = \frac{1}{1+z}[f(\mathfrak{E}) \pm z^n f(\mathfrak{E}+2n)],$$

wo

$$z = \frac{1}{a}$$

ist.

Hieraus werden verschiedene Folgerungen gezogen, welche sich auf den Zusammenhang dieser Zahlenklassen, auf die Transformation der Lambert'schen und allgemeinerer Reihen und auf die Darstellung dieser Zahlen durch bestimmte Integrale beziehen.

T.

de Presle. Détermination des nombres de Bernoulli. S. M. F. Bull. XIV. 100-103.

Durch Entwickelung von $\tan x$ in eine Potenzreihe findet der Verfasser für die Bernoulli'sche Zahl den Wert:

$$B_n = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2^{2n}-1)2^{2n}} \Big\{ 1 - \frac{2^2}{2n(2n+1)} S_{n,1}$$

$$+ \frac{2^4}{(2n-2)(2n-1)2n(2n+1)} S_{n-1,2} - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \Big\},$$

wo $S_{q,r}$ die Summe aller Potenzen und Producte r^{ten} Grades von den q Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, q^2$ bedeutet.

Ht.

A. Genocchi. Sur les nombres de Bernoulli. Kronecker J. IC. 315-316.

Infolge der Note von Herrn Kronecker: „Ueber die Bernoulli'schen Zahlen“ (Kronecker J. XCIV. 268 f.; cf. F. d. M. 1883. XV. 201 f.) sieht sich der Herr Verfasser veranlasst, auf seine ältere

Arbeit (Tortolini Annali 1852. III. p. 395) und die dort erhaltenen Resultate aufmerksam zu machen. T.

E. Cesaro. Transformations algébriques par le calcul des différences. Nouv. Ann. (3) V. 489-492.

Der Herr Verfasser stellt eine Function mittels der successiven Differenzen des ersten Gliedes einer willkürlichen Reihe in symbolischer Form dar und wendet dieselbe unter Voraussetzung der Reihe $0^r, 1^r, 2^r, \dots$ auf Functionen von der Form: $1^r x + 2^r x^2 + 3^r x^3 + \cdots$ an, wodurch sich auch Darstellungen der Bernoulli'schen Zahlen ergeben. Wz.

E. Cesaro. Sur la série de Lambert. Nouv. Ann. (3) V. 106-108.

E. Cesaro. Sur l'évaluation approchée de certaines séries. Nouv. Ann. (3) V. 449-456.

Aus der bekannten Reihe für $\log \frac{p+1}{p-1}$ ergiebt sich leicht die Formel:

$$(G) \qquad \sum_{p=1}^{n} (u_p + v_{u_p}) = \tfrac{1}{2} \log \frac{(u_1+1)(u_2+1)\cdots(u_n+1)}{(u_1-1)(u_2-1)\cdots(u_n-1)},$$

wo

$$v_p = \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5p^5} + \frac{1}{7p^7} + \cdots$$

ist. Setzt man

$$u_p = \frac{1+x}{1-x} \, \frac{1-\alpha x^p}{\alpha x^p},$$

so ist, wenn θ einen echten Bruch bezeichnet:

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\alpha x^p}{1-\alpha x^p} = \frac{1+x}{1-x} \log \sqrt{\frac{1+x-2\alpha x^{n+1}}{1+x-2\alpha x}} + \frac{\theta \alpha^2 x^{2n+1}}{6(1-\alpha x^n)} + \mathfrak{C}(x),$$

wo $\mathfrak{G}(x)$ von n unabhängig ist und bestimmt wird, indem man n unendlich werden lässt. Diese Formel giebt für $\alpha = 1$ die Summe der n ersten Glieder der Lambert'schen Reihe und kann für ein gegebenes x zur angenäherten Berechnung derselben benutzt werden.

Auch zur Berechnung anderer Reihen und Producte benutzt der Herr Verfasser die Formel (G). Wz.

Ph. Gilbert. Sur les produits composés d'un grand nombre de facteurs et sur le reste de la série de Binet. Brux. S. sc. X. B. 191-200.

J. de Tilly. Rapport. Brux. S. sc. X. A. 55-57.

Setzt man

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{2\pi\mu}\,\mu^{\mu-1}\,e^{-\mu+\pi(\mu)},$$

so ist nach der Binet'schen Formel:

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^1 x(x-\tfrac{1}{2})dx + \frac{1}{2\mu(\mu+1)}\int_0^1 x(1-x)(x-\tfrac{1}{2})\,dx + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n\mu(\mu+1)\cdots(\mu+n-1)}\int_0^1 x(1-x)\cdots(n-1-x)(x-\tfrac{1}{2})dx + R_n.$$

Der Verfasser findet, dass der absolute Wert von R_n unterhalb verschiedener mehr oder weniger leicht zu berechnender Ausdrücke liegt, unter welchen wir anführen wollen:

$$\frac{1}{64\mu}B(\mu,n),\quad \frac{1}{64\mu^2}\,\frac{1}{1+\mu C+\mu\log(n-1)},$$

$$\frac{1}{64(\mu-1)(n+1)[1+(\mu-1)C+(\mu-1)\log n]},$$

$$\frac{\Gamma(\mu)}{64\mu n^{\mu}}\,e^{\frac{1}{2n}\left(\mu+\frac{1}{6}\right)}.$$

Hierin bedeutet C die Euler'sche oder Mascheroni'sche Constante, $B(\mu,n)$ das erste Euler'sche Integral, μ eine positive Con-

stante (grösser als Eins im dritten Näherungswerte für den Rest). Mn. (Lp.)

M. MANDL. Ueber die Summirung einiger Reihen. Wien. Ber. XCIV. 947-955.

Das unendliche Product $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$ und die daraus durch logarithmische Differentiation abgeleitete unendliche Reihe haben den Wert $\frac{1}{1-x}$, convergiren für $\text{mod}\, x<1$, divergiren für $\text{mod}\, x>1$ (die Reihe divergirt auch für $x=1$). Differentiirt man das endliche Product $\prod_1^n(1+x^{2^{\nu-1}})$ logarithmisch und integrirt dann von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man durch Verallgemeinerung die Gleichung:

$$\sum_1^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{x}{2^\nu}}=\text{cotg}\,\frac{x}{2^n}-\text{cotg}\,x$$

und durch Integration:

$$\prod_{\nu=0,1,2,\dots n}\text{tg}^{2^\nu}\left(\frac{x}{2^\nu}\right)=\frac{\left(2\sin\frac{x}{2^n}\right)^{2^{n+1}}}{2\sin 2x}.$$

Im zweiten Teil leitet der Herr Verfasser für die unendliche Summe:

$$S_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

ausser der Euler'schen Recursionsformel eine andere ab:

$$\sigma_{2n}-\frac{\sigma_{2n-2}}{3!}+\frac{\sigma_{2n-4}}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_2}{(2n-1)!}$$
$$+(-1)^n\cdot\frac{n}{(2n+1)!}=0;$$

dabei ist $S_{2n}=\pi^{2n}\sigma_{2n}$; σ_{2n} bedeutet die n^{te} Potenzsumme der Wurzeln der Gleichung:

$$x^m-\frac{x^{m-1}}{3!}+\frac{x^{m-2}}{5!}-\cdots=0.$$

Wz.

E. Cesaro. Source d'identités. Mathesis VI. 126-131.

Man setze

$$\omega_i = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i),\ \lambda_{n,i} = \frac{\omega_n}{\omega_i\omega_{n-i}},$$
$$F_n(x) = (1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^nx),\quad F_n(x)G_n(x) = 1.$$

Dann ist:

$$F_n(x) = 1-\lambda_{n,1}\,qx+\lambda_{n,2}\,q^2x^2-\dots\pm\lambda_{n,n}\,q^{\frac{1}{2}n(n+1)}x^n,$$
$$G_n(x) = 1+\lambda_{n,1}\,qx+\lambda_{n+1,2}\,q^2x^2+\lambda_{n+2,3}\,q^3x^3+\cdots.$$

Zahlreiche Folgerungen in der Theorie der Reihen für die elliptischen Functionen. Mn. (Lp.)

A. R. Forsyth. Some doubly-infinite converging series. Quart. J. XXI. 261-280.

Bezeichnet man die Perioden einer doppelt periodischen Function durch $4K$, $4K'i$, setzt $2mK+2nK'i = \Omega$ und

$$\lim_{p=\infty, q=\infty} \sum_{m=-p}^{+p}\sum_{n=-q}^{+q}\frac{1}{\Omega^{2m}} = S_{2m},$$

so hat S_2 nur dann einen bestimmten Wert, wenn zwischen p und q eine Gleichung besteht $\left(\text{z. B. } \frac{p}{q} = 0\right)$. Dagegen sind die Reihen S_{2m} für $m > 1$ convergent, auch wenn p und q durch keine Gleichung verbunden sind, und können mittels der Summen mit kleineren Indices berechnet werden.

Setzt man

$$(2m+1)K+2niK' = \Omega_1,$$
$$(2m+1)K+(2n+1)iK' = \Omega_2,$$
$$2mK+(2n+1)iK' = \Omega_3,$$

und bezeichnet die Reihen, in welche S_{2m} übergeht, wenn Ω durch Ω_1, Ω_2, Ω_3 ersetzt wird, resp. durch P_{2m}, Q_{2m}, R_{2m}, so gelten auch für diese Ausdrücke ähnliche Recursionsformeln.

Wz.

PTASZITSKY. Sur quelques formules données dans le cours d'analyse de l'École Polytechnique de M. Hermite. Darb. Bull. (2) X. 30-32.

Es werden einige in dem genannten Buch S. 64 gegebene Reihenentwickelungen bewiesen und aus einer S. 301 aufgestellten Formel neue hergeleitet. Wz.

A. BERGER. Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries. Ups. N. Act.

Vgl. Abschnitt 2, Capitel 1, S. 67. M. L.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

F. Autenheimer. Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc. für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht. Dritte Auflage. Weimar. 1887. B. F. Voigt. VIII u. 522 S. gr. 8°.

Der ganze Inhalt ist auf vier Abschnitte verteilt. Im „ersten Teile der Differentialrechnung" werden die Differentiation der Functionen mit einer Variabeln und ihre Anwendungen auf die Bestimmung extremer Werte, auf die Construction von Tangenten und auf Reihenentwickelungen nach der Methode der unbestimmten Coefficienten gelehrt. Es folgt sofort der „erste Teil der Integralrechnung" mit den mannigfachsten Beispielen aus der Geometrie, Mechanik und Physik. Der „zweite Teil der Differentialrechnung", welcher nun erst zur Behandlung kommt, führt die höheren Differentialquotienten ein, behandelt die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe nebst den von diesen Entwickelungen abhängenden gewöhnlichsten Anwendungen auf die Algebra, Analysis und Geometrie. Der „zweite Teil der Integralrechnung" endlich bringt eine genauere Theorie der einfachen und mehrfachen bestimmten Integrale mit interessanten

Anwendungen auf die einzelnen Zweige der reinen und angewandten Mathematik. Die totalen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit zwei Variabeln nebst den verschiedenartigsten an sie sich anschliessenden Aufgaben, sowie die partiellen Differentialgleichungen der ersten und der zweiten Ordnung beschliessen das Ganze. Danach kann das klar und verständlich geschriebene Werk, wie in seinen früheren Auflagen so auch in der neuen erheblich vermehrten und verbesserten Ausgabe, zur Einführung nicht nur in die Infinitesimalrechnung, sondern auch in die Mechanik mit Vorteil benutzt werden.

Der Zweck und das Eigentümliche des mit Recht geschätzten und beliebten Werkes erhellt am besten aus folgenden Worten der Vorrede zur dritten Auflage:

„Der theoretische Teil ist nach methodischen Gesichtspunkten geordnet und auf das Notwendigste beschränkt. Dagegen ist das Gebiet der Anwendung sehr erweitert und dadurch der Beweis erbracht, dass mit wenigen Lehren nach den verschiedensten Seiten hin erspriessliche Resultate gewonnen werden können. Die Mehrzahl derer, welche mathematischen Studien obliegen, haben weder die Absicht, noch die Kraft, die Mathematik um ihrer selbst willen zu studiren. Sie betrachten diese Wissenschaft als Hülfsmittel, um die Vorträge in den Fachschulen verstehen zu können . . ."

Referent freut sich, in seinen Ansichten vollständig mit denen des Verfassers übereinzustimmen, indem er in demselben Sinne die Mathematik seit nunmehr vierzehn Jahren an der Kriegsakademie zu Berlin vorgetragen und, wie er glaubt, auch bei den Zuhörern Zustimmung erhalten hat. Besonders wenn die einzelnen Capitel der Mathematik nicht in besonderen Vorträgen von verschiedenen Lehrern während mehrerer Studienjahre vorgetragen werden, sondern ein einziger Lehrer für die gesamte mathematische Ausbildung zu sorgen hat, die sich aber auf einen geringen Umfang in knapp bemessenen Stunden beschränkt, wird der Erfolg der Vorträge gerade in der Infinitesimalrechnung von der Weise abhängen, wie die verschiedenen Partieen

der Mathematik bei jeder passenden Gelegenheit herangezogen und von dem Standpunkte der neu gewonnenen Erkenntnis aus beleuchtet werden, so wie dies vom Verfasser in seinem Buche geschehen ist. Lp.

M. STEGEMANN. Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. II. Teil: Integral-Rechnung. Mit besonderer Rücksicht auf das wissenschaftliche Bedürfnis technischer Hochschulen. Vierte Auflage. Hannover. Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. (Th. Mierzinsky). XII u. 446 S. gr. 8⁰.

Es ist eine Thatsache, dass die beliebteren deutschen Lehrbücher der höheren Mathematik von Lehrern der Polytechniken oder technischen Hochschulen verfasst sind. Wir brauchen in dieser Hinsicht nur auf die Bücher von Schlömilch, Fiedler, Ritter und auf das eben besprochene von Autenheimer hinzuweisen. Die Anforderung der Zeitigung von Früchten des mathematischen Unterrichts bei den Zöglingen nach mässiger Dauer desselben, sowie der engere Verkehr zwischen Lehrer und Schüler dürften vielleicht zur Erklärung der Erscheinung ausreichen.

Auch das vorliegende weit verbreitete Werk ist von einem einstigen Lehrer an dem Polytechnikum zu Hannover verfasst worden. In dem Buche selbst bleibt der jetzige Herausgeber zwar ungenannt, doch bekennt sich Herr Kiepert in dem 1887 erschienenen ersten Teile, der Differentialrechnung, zu seinem Werke, dessen er sich in der erneuten und verbesserten Gestalt auch durchaus nicht zu schämen braucht.

Das Stegemann'sche Lehrbuch berücksichtigt vor allem die didaktische Seite, ordnet den Stoff nach diesem Gesichtspunkte und hat gerade deswegen, trotz mancher bedenklichen Mängel in den früheren Ausgaben, auch nach dem Tode des Verfassers noch starken Absatz gefunden. Es beschränkt sich im Stoffe, bringt nur das Notwendigste aus den theoretischen Erörterungen in leicht fasslicher Weise zur Darstellung, verweilt dagegen mit

grosser Breite bei der Einübung des Mechanismus der Rechnungen und bespricht die dabei auftretenden Schwierigkeiten. Die vielen Uebungsbeispiele sind in aller Ausführlichkeit vorgerechnet, sodass es besonders zum Selbstunterricht geeignet erscheint. Herr Kiepert hat bei dem mühsamen Werke der Umarbeitung den wesentlichen Charakter des für Lernende leicht fasslichen Werkes treu gewahrt, aber viele Ungenauigkeiten und Druckfehler beseitigt, Erweiterungen hinzugefügt, zu breite Entwickelungen gekürzt. Hinzugekommen ist u. a. am Ende des Bandes eine umfängliche Tabelle der hergeleiteten Formeln. Lp.

J. Edwards. Differential calculus with applications and numerous examples. An elementary treatise. London. Macmillan and Co. XIV u. 439 S.

Das Buch giebt eine recht vollständige Darstellung der elementareren Teile der Differentialrechnung und ihrer Anwendungen auf die Curventheorie. Die Beweise aller grundlegenden Sätze zeigen grosse Sorgfalt sowohl inbetreff der Genauigkeit als auch der Klarheit, und das Buch bietet eine Fülle erläuternder Beispiele von sehr geeigneter Art. Eine bessere Einleitung in die leitenden Grundsätze und die Anwendungen der Differentialrechnung ist uns noch nicht begegnet. Druck und Papier sind ausgezeichnet. Gbs. (Lp.)

J. A. Serret. Cours de calcul différentiel et intégral. 3e éd. 2 vol. Paris. Gauthier-Villars.

Ph. Gilbert. Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars.

W. F. Schüler. Die allgemeine Derivation, ein neuer Grundbegriff der Functionenrechnung. Ansbach. C. Brügel u. Sohn.

Auf einer ebenen Curve, welche die Coordinaten eines Punktes auf ihr als Functionen von einander darstellt, variiren zwei Punkte unabhängig; die Mitte der Sehne zwischen beiden wird als primitiver Punkt (xy) betrachtet, und der Quotient der Projectionen der halben Sehne auf die Axen „allgemeine Derivation" genannt. Diese Projectionen h, k ergeben sich aus der Doppelgleichung

$$f(x \pm h, y \pm k) = 0.$$

Betrachtet man nun bei feststehender Curve den Punkt (x, y) als unabhängig variirend, so geht, wenn derselbe in die Curve fällt, die allgemeine Derivation in den Differentialquotienten über, und wenn er auf die andere Seite der Curve rückt, werden h, k rein imaginär. Man kann daher in obiger Gleichung für h, k auch ih, ik setzen, und die linke Seite in der Form $A+iB$ darstellen. Nach Berechnung der allgemeinen Derivationen der einfachen Functionen werden weiter behandelt: die Taylor'sche Reihe, das Bogenelement und der Krümmungskreis, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung, das bestimmte Integral und allgemeine Eigenschaften der Functionen bivariabler Argumente. Bei der Taylor'schen Reihe findet sich der Rest in einer „allgemeinen Derivation" ausgedrückt. H.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

L. Königsberger. Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function von Functionen. Klein Ann. XXVII. 473-477.

Das ϱ^{te} Differential von

$$t = f(x, y, z, \ldots),$$

wo x, y, z, ... Functionen einer Variabeln sind, wird symbolisch in der Form dargestellt:

$$d^\varrho t = \sum_{n_1, n_2, \ldots n_\varrho > 0} \frac{\varrho!\, P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_\varrho^{n_\varrho}}{n_1!\, n_2! \ldots n_\varrho!\, (1!)^{n_1} (2!)^{n_2} \ldots (\varrho!)^{n_\varrho}}$$

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + \varrho n_\varrho = \varrho,$$

wo

$$P_\nu = \left(\frac{\partial f}{\partial x} d^\nu x + \frac{\partial f}{\partial y} d^\nu y + \frac{\partial f}{\partial z} d^\nu z + \cdots\right)$$

und für $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ gesetzt werden soll $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc. Hieraus ergiebt sich für $t = 0$ eine Formel, welche den ϱ^{ten} Differentialquotienten der durch $f(x, y) = 0$ bestimmten Function y nach x auf y', y'', ..., $y^{(\varrho-1)}$ zurückführt. Als fernere Anwendung wird bewiesen, dass für jede durch die algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ definirte algebraische Function der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2\varrho-1} \frac{y^{(\varrho)}}{\varrho!}$$

eine ganzzahlige, in x, y und den Coefficienten der Gleichung ganze Function ist. Hierbei wird bemerkt, dass man den Eisenstein'schen Satz von der Eigenschaft der Potenzentwickelung algebraischer Functionen daraus leicht herleiten kann. H.

A. Cayley. Note sur le mémoire de M. Picard „Sur les intégrales de différentielles totales algébriques de première espèce“. Darb. Bull. (2) X. 75-78.

Es sei $f(x, y, z, t) = 0$ eine homogene Gleichung m^{ten} Grades und A, B, C, D homogene Functionen $(m-3)^{\text{ten}}$ Grades, die der Identität genügen

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} + D \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) f;$$

dann ist der Ausdruck

$$d\Omega = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu & \varrho \\ A & B & C & D \\ x & y & z & t \\ dx & dy & dz & dt \end{vmatrix} : \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} + \varrho \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

von λ, μ, ν, ϱ unabhängig und ein totales algebraisches Differential erster Gattung. (Vgl. Abschnitt VI, Cap. 5.) Hr.

G. Torelli. Contribuzione alla teoria delle equazioni algebrico-differenziali. Batt. G. XXIV. 280-289.

Herr Casorati hat bewiesen (vgl. F. d. M. 1876. 181, 1881. 236): Wenn man mit g die Discriminante der primitiven Gleichung zwischen den Variablen x, y

$$(1) \qquad f_0\omega^m + f_1\omega^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

in Beziehung auf die willkürliche Constante ω, und mit G die der Differentialgleichung bezeichnet, die durch Elimination von ω aus der Gleichung (1) und ihrem ersten Differential nach den Variabeln hervorgeht, wobei G in Beziehung auf $dy:dx$ zu bilden ist, so besteht die Gleichung

$$G = gk^2,$$

wo k eine ganze Function der partiellen Derivirten erster Ordnung von $f_0, f_1, \ldots, f_m$ nach den Variabeln bedeutet. Dabei ist jedoch die Bestimmung von k nur für $m=2$ ausgeführt, im übrigen nur angegeben, wie in den Fällen $m=3$ und $m=4$ der Ausdruck für k gebildet werden kann. Zweck dieser Note ist, einen Beweis obiger Formel zu geben, der zugleich die Bestimmung von k für jeden Grad der primitiven Gleichung in fertiger Form liefert (vgl. das Referat F. d. M. XVII. 1885. 245).

Hr.

M. Noether. Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke erster Gattung. Erlang. Ber. XVIII. 11-17.

M. Noether. Ueber die algebraischen Differentialausdrücke mit einer Variablen. Erlang. Ber. XVIII. 18-21.

(Vgl. Abschnitt IX, Cap. 3, B.)

Fr. Meyer. Ausdehnung eines Dirichlet'schen Verfahrens auf die Transformation von Differentialausdrücken, wie $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ in allgemeine krummlinige Coordinaten. Klein Ann. XXVI. 509-515.

Die von Dirichlet herrührende Methode (cf. Riemann, part. Differentialgleichungen § 71 oder Schwere, Elektricität und Magnetismus § 29; Ausführlicheres hierüber findet man auch in Heine's Handbuch der Kugelfunctionen I. § 71) zur Transformation des Ausdrucks

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

in orthogonale Coordinaten, deren Grundgedanke in der Anwendung der Green'schen Formel auf ein gewisses Raumelement besteht, lässt sich auch zur Transformation des allgemeineren Ausdrucks $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ in allgemeine krummlinige Coordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ benutzen. Das Endresultat, zu welchem der Herr Verfasser hierbei gelangt, hat die einfache Gestalt:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial \varrho_i},$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} X & \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} \\ Y & \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} \\ Z & \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

ist. Die bei dem eingeschlagenen Wege notwendige Berechnung der Grösse der Seitenflächen des betrachteten Raumelementes als Functionen der neuen Coordinaten gestaltet sich sehr einfach, indem sein Volumen auf doppelte Weise ausgedrückt wird. Schliesslich wird noch gezeigt, wie in dem von Dirichlet behandelten speciellen Falle der Green'sche Satz ganz entbehrt werden kann. T.

V. Volterra. Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 211-214.

Es mögen zwischen den $m+n$ Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_m$$

m algebraische Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0, \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

und ein Differentialausdruck

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{n} \theta_r \, dx_r$$

vorhanden sein, wo die θ_r Functionen von

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_m$$

sind. Es seien ferner

$$(3) \qquad \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m, u_1, u_2, \dots, u_k) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

n algebraische Gleichungen zwischen den $m+n+k$ Veränderlichen

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad y_1, y_2, \dots, y_m, \quad u_1, u_2, \dots, u_k,$$

und

$$(4) \qquad x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, \dots, x_n^{(h)}, \quad y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \dots, y_m^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \dots, p)$$

die p Lösungssysteme der Gleichungen (1), (3), wo $u_1, u_2, \dots, u_k$ als unabhängige Variabeln angesehen werden. Setzt man dann die Werte jedes der Systeme (4) in (2) ein, und addirt die p hieraus entstehenden Ausdrücke, so ergiebt sich ein Differentialausdruck

$$\sum_{t=1}^{k} \psi_t(u_1, u_2, \dots, u_k) du_t,$$

wo die ψ_t rationale Functionen von $u_1, u_2, \dots, u_k$ sind. Für $m = n = 1$, $k = 0$ erhält man hieraus den Abel'schen Satz.

Vi.

E. Cesaro. Intorno a taluni gruppi di operazioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 35-39.

Die Operationen φ, welche der Functionalgleichung

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$$

für alle ganzzahligen positiven Werte der Argumente genügen, bilden eine Gruppe Φ. Dasselbe findet allgemeiner für diejeni-

gen Operationen s statt, welche die Gleichung

$$\tau(s(x), s(y)) = s\tau(x, y)$$

erfüllen, wo τ eine willkürliche, aber feste Function zweier Veränderlichen ist. Bedeutet E die Gruppe der s, und sind μ, ν irgend zwei inverse Operationen (was in Kürze als ein „Operationenpaar“ bezeichnet werden möge), so heisst die Gruppe der Operationen $\nu s\mu$ die durch das Operationenpaar $\nu\mu$ transformirte Gruppe von E, und wird durch $\nu E\mu$ bezeichnet.

Die Gruppen Φ, E dienen zur Darstellung anderer, für die höhere Arithmetik wichtiger Gruppen.

Ist erstens die in der Theorie der Reihenumkehrung (vgl. die darauf bezüglichen Schriften des Verfassers: Sur l'inversion de certaines séries und Fonctions énumératrices in Brioschi Ann. (2) XIII. 338-351, XIV. 141-158) vorkommende Gruppe O_1, O_2, ... vorhanden, die der Gleichung

$$O_i O_j = O_j O_i = O_{ij}$$

genügt, so findet man allgemein:

$$O_n = U[\varphi(n).V],$$

wobei φ irgend eine Operation der Gruppe Φ und U, V ein beliebiges Operationenpaar bedeutet. Wenn umgekehrt die Form von O_n von vornherein bekannt ist: $O_n = F(x, n)$, so leitet man daraus die Operation U, V, φ durch die Formeln:

$$U = F(c, \psi), \quad UV = 1, \quad \varphi\psi = 1$$

ab, wo ψ eine Operation der Gruppe Φ, c eine willkürliche Constante ist.

Ist zweitens Ω_1, Ω_2, ... eine Gruppe, die der Relation

$$\Omega_i \Omega_j = \Omega_j \Omega_i = \Omega_{\tau(i,j)}$$

genügt, so findet man allgemein:

$$\Omega_n = U\tau[s(n), V],$$

wo U, V wie früher ein Operationenpaar, s aber eine Operation der durch die Function τ bestimmten Gruppe E bedeutet. Wenn τ die Form:

$$\tau(x, y) = \mu[\nu(x).\nu(y)]$$

hat (wo μ, ν ein Operationenpaar ist), dann reducirt sich die

Gruppe Ω auf die Gruppe O, denn man findet in diesem Falle:

$$\Omega_{\mu(n)} = U\mu[\varphi(n) . \nu V],$$

und $U\mu$, νV bilden offenbar ein Operationenpaar.

Was die Reihenumkehrung betrifft, führt der Verfasser den folgenden Satz an, der die bekannten Theoreme von Möbius (Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen, Crelle's J. IX. 105) und Tschebyscheff (Note sur différentes séries, Liouville's J. XVI) umfasst:

Ist

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) HO_n,$$

so ist

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) GO_n,$$

wo g, h conjugirte Functionen (in dem vom Verfasser in Batt. G. XXIII. 171 dargelegten Sinne) bedeuten. Vi.

Th. Muir. On the differential equation of a conic. Phil. Mag. (5) XXI. 143-145.

Eine einfache Ableitung der Gleichung

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{d^5y}{dx^5} - 45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0$$

nach einer Methode, welche auf Gleichungen höherer Grade anwendbar ist. Gbs.

P. Domenico-Marianini. Teorema generale per la ricerca dei valori limiti correspondenti a forme indeterminate, seguito da una dimostrazione del teorema di Taylor. Modena Mem. (2) IV. 379-423.

Der Verfasser entwickelt in sehr detaillirter Weise und auf alle Fälle sorgsam eingehend die Lehre von den Grenzwerten und infinitesimalen Eigenschaften erst im allgemeinen, dann die Schlüsse von den Eigenschaften von $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ auf $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für

$\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ und leitet zuletzt den Taylor'schen Satz nach Lagrange'schem Verfahren her. H.

P. S. FLOROW. Die Anwendung der Grundformeln der Theorie des Differentiirens zwischen bestimmten Grenzen auf die Summation der unendlichen Reihen. Chark. Ges. 3-14. (Russisch.)

Die Theorie des Differentiirens mit willkürlichem Index, welche von A. W. Letnikoff entwickelt war, wird hier auf die Summation dreier unendlicher Reihen angewandt, deren eine die Reihe:

$$\frac{1}{\Gamma(1)^n} + \frac{x}{\Gamma(2)^n} + \frac{x^2}{\Gamma(3)^n} + \cdots$$

ist; die zwei anderen werden durch die Differentialgleichungen

$$x^n \frac{d^n u}{dx^n} + \beta_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + \beta_k x^{n-k} \frac{d^{n-k} u}{dx^{n-k}} = x^n u,$$

$$x^k \frac{d^{n+k} u}{dx^{n+k}} = x^k \frac{d^k u}{dx^k} + \beta_1 x^{k-1} \frac{d^{k-1} u}{dx^{k-1}} + \cdots + \beta_{k-1} x \frac{du}{dx} + \beta_k u$$

definirt, wo die Coefficienten β Constanten sind. Wi.

L. SCHEEFFER. Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. Aus seinen hinterlassenen Papieren mitgeteilt von A. Mayer. Leipz. Ber. 102-143.

Der Verfasser war durch Untersuchungen über höhere Variationen bestimmter Integrale auf Beispiele gekommen, welche ihn zu der Erkenntnis führten, dass die in jener Theorie üblichen Ueberlegungen einen Fehlschluss enthalten; vgl. des Verfassers Note in Klein Ann. XXVI. p. 197ff. (cf. F. d. M. 1885. XVII. 358f.). Analoge Verhältnisse liegen aber auch, wie der Verfasser gefunden hat, in der weit einfacheren Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabeln vor. Um festzustellen, ob eine Function von zwei Veränderlichen $f(x, y)$ an einer bestimmten Stelle ein Maximum

oder Minimum besitzt, verfährt man gewöhnlich so, dass man — um geometrisch zu reden — das Verhalten der Function nur auf den unendlich vielen Geraden untersucht, welche sich durch jene Stelle legen lassen. Das reicht aber nicht hin; denn daraus, dass an derselben auf jeder einzelnen Geraden z. B. ein Minimum stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt; die Existenz eines solchen hängt vielmehr davon ab, ob sich um jenen Punkt als Centrum ein Kreis legen lässt, innerhalb dessen die Function überall durchaus grössere Werte aufweist, als in dem Punkte selbst; denn es kann sehr wohl auf jeder einzelnen Geraden ein Minimum stattfinden, ohne dass ein solcher Kreis existirt, wie dies am einfachsten das Beispiel

$$f(x, y) = (y - p^2x^2)(y - q^2x^2)$$

zeigt. Es liegt die Frage nahe, ob man nicht dadurch zur Entscheidung über das Maximum oder Minimum der Function gelangen kann, dass man an Stelle der Geraden sämtliche Curven, welche sich durch jenen Punkt legen lassen, in Betracht zieht. Aber auch gegen diesen Weg machen sich verschiedene Bedenken geltend, und der Verfasser schlägt daher einen ganz anderen ein, um zu völlig allgemeinen und gleichzeitig praktisch brauchbaren Kriterien für die Existenz eines Maximums oder Minimums zu gelangen. Zunächst wird hervorgehoben, dass auch schon bei einer Function $f(x)$ einer einzigen Variabeln die Anwendbarkeit der auf Potenzentwickelung gegründeten Kriterien des Maximums oder Minimums z. B. an der Stelle $x = 0$ dadurch durchaus bedingt ist, dass die Function $f(x)$ sich in der Umgebung der Stelle $x = 0$ schnell genug verändere, d. h. es muss eine Potenz ax^n mit der Eigenschaft existiren, dass zwischen gewissen Grenzen $-g < x < g$ der absolute Wert von $f(x) - f(0)$ beständig $> |ax^n|$ wird. Diese Bedingung ist für eine Function zweier Variabeln $f(x, y)$, deren Verhalten in der Umgebung einer Stelle z. B. des Nullpunktes hinreichend deutlich ausgeprägt sein soll, dahin zu verallgemeinern, dass eine Potenz ar^n mit der Eigenschaft existire, dass für jeden Wert r unterhalb einer gewissen Grenze g beide Extremwerte von $f(x, y)$ — d. h. der grösste und der kleinste Wert, den $f(x, y)$ auf der um den Nullpunkt als Cen-

trum mit dem Radius r gezogenen Kreislinie annimmt —, absolut genommen, grösser als ar^n werden. Ist diese Forderung nicht erfüllt, so kann man auf die Gewinnung sicherer Kennzeichen des Maximums oder Minimums durch Potenzentwickelungen irgend welcher Art keinenfalls rechnen. Existirt aber eine derartige Potenz ar^n, so ist dem Verfasser ein Verfahren, das ausführlich abgeleitet wird, zu finden gelungen, welches zur Entscheidung der gestellten Frage mit Sicherheit und vermittelst einer endlichen Anzahl principiell geordneter Einzeluntersuchungen führt. Durch einen Fundamentalsatz wird das Problem zunächst auf den Fall ganzer rationaler Functionen zurückgeführt; und dann erweisen sich von wesentlichem Nutzen die bei der Discussion der Singularitäten algebraischer Curven gebräuchlichen Methoden, wie die Newton-Cramer'sche Regel, vermittelst deren sich die Untersuchung auf die principiell einfache einer Reihe homogener Functionen reduciren lässt. Am Schlusse werden einige charakteristische Beispiele durchgeführt.

T.

K. H. Liersemann. Maxima und Minima, analytisch-geometrisch beleuchtet. Pr. R.-G. Rawitsch. Breslau.

Die Schrift lehrt an Beispielen, wie eine algebraische ebene Curve zu discutiren, ihre Tangenten, Wendepunkte, Doppelpunkte, Doppeltangenten, Asymptoten, Krümmungsradien, Krümmungsmittelpunkte u. s. w. aus ihrer Gleichung zu finden sind. Die Deduction stützt sich in Betreff der Grenzübergänge und des Unendlichen auf die als geläufig betrachtete gewöhnliche Anschauung und wird durch den in einer früheren Programmarbeit enthaltenen Versuch einer Theorie des Unendlichen, auf den der Verfasser im Vorwort verweist, nicht beeinflusst.

H.

A. Markoff. Sur une question de maximum et minimum proposée par M. Tschebyscheff. Acta Math. IX. 57-70.

Der Herr Verfasser hat sich schon mehrfach (vgl. nament-

lich seine Abhandlung: „Ueber einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche“ St. Petersburg 1884; cf. F. d. M. 1885. XVII. 168 ff.) mit einer Aufgabe beschäftigt, die von Herrn Tschebyscheff in seinem Aufsatz: „Sur les valeurs limites des intégrales“ (Liouv. Journ. (2) XIX. 151 ff.; cf. F. d. M. 1874 VI. 180 f.) aufgestellt worden ist. Diese Aufgabe kann dahin verallgemeinert werden: Es seien a und b zwei gegebene Zahlen und $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_{n+1}(z)$ und $\Omega(z)$ gegebene Functionen von z von der Beschaffenheit, dass $\Omega(z)$ und die Determinante

$$D_\varkappa = \Sigma \pm \lambda_1(z)\lambda_2'(z) \dots \lambda_\varkappa^{(\varkappa-1)}(z),$$

ebenso wie

$$\Delta_\varkappa = \Sigma \pm \lambda_1(z)\lambda_2'(z) \dots \lambda_\varkappa^{(\varkappa-1)}(z)\Omega^{(\varkappa)}(z)$$

$$(\varkappa = 1, 2, \dots, n+1)$$

für alle Werte von z zwischen a und b positiv bleiben: dann sollen die Anzahl ν und die Werte der positiven Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, sowie die Grössen $y_1, \dots, y_\nu$ zwischen a und b so bestimmt werden, dass die Summen

$$\sum_1^\nu {}_i m_i \lambda_1(y_i), \quad \dots, \quad \sum_1^\nu {}_i m_i \lambda_{n+1}(y_i)$$

gegebene Werte $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ besitzen und gleichzeitig die Summe

$$\sum_1^\nu {}_i m_i \Omega(y_i),$$

in welcher die y_i eine gewisse zwischen a und b gelegene Grösse v nicht überschreiten, ein Maximum oder Minimum sei. In der vorliegenden Abhandlung werden die Betrachtungen auseinandergesetzt, welche den Verfasser zu der Lösung dieser Aufgabe geführt haben. T.

A. Markoff. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 81-88.

Herr Markoff teilt die Resultate seiner Untersuchungen mit, zu denen er durch den Tschebyscheff'schen Aufsatz: Sur les valeurs etc. (vgl. das vorhergehende Referat) veranlasst worden ist, über die man des Verfassers Abhandlungen vergleiche: Klein Ann. XXIV. 172-180 (cf. F. d. M. 1884. XIV. 236 f.); über

einige Anwendungen der algebraischen Kettenbrüche, St. Petersburg 1884 (cf. F. d. M. 1885. XVII. 168ff.); Klein Ann. XXV. 427-432 (cf. F. d. M. 1885. XVII. 275); Acta Math. IX. 57-70 (cf. das vorhergehende Referat). T.

O. Bermann. Ein Minimumproblem. Schlömilch Z. XXXI. 49-53, 381-382.

Der folgende, für die Flächentheorie bemerkenswerte Satz wird im ersten Artikel für conische Flächen, im zweiten allgemein bewiesen. Das Tetraeder, welches die Berührungsebene einer Fläche mit drei beliebigen festen Ebenen bildet, ist ein Minimum, wenn der Berührungspunkt Schwerpunkt der berührenden Tetraederseite ist. H.

H. Hennessey. Note to a paper on the geometrical construction of the cell of the honey-bee (R. S. Proc. vol. 39, p. 253). Lond. R. S. Proc. XLI. 442-443.

Das in dem angezogenen Aufsatze (cf. F. d. M. XVII. 1885. 249) erlangte Resultat, nach welchem die Seite einer der die Zelle begrenzenden Rauten als das Dreifache der Differenz zwischen den beiden parallelen Kanten gefunden wurde, welche die Seiten eines der Trapeze des Prismas bilden, liefert eine einfache Methode zur Construction der Figur. Ausserdem wird bemerkt, dass die dreiseitige Endpyramide der Zelle einer Kugel einschreibbar ist, deren Durchmesser das Dreifache der Länge einer der Kanten des Prismas ist. Cly. (Lp.)

J. Wolstenholme, T. Galliers, R. Knowles. Solution of question 7963. Ed. Times. XLIV. 46.

Ist PQ eine Sehne einer Ellipse, zugleich in P Normale, O ihr Pol, so ist der grösste Wert des Winkels QOP gleich $\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$, wenn a, b die Halbaxen bedeuten. Lp.

Capitel 3.

Integralrechnung.

V. de STRÉKALOF. Note sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$.
Nouv. Ann. (3) V. 533-534.

Der Verfasser zeigt (bezugnehmend auf die Lösung derselben Aufgabe durch Herrn Pomey Nouv. Ann. (3) IV, F. d. M. XVII. 1885. 257), wie durch die Substitution von tang φ für z das Integral sich leicht ergiebt. Hch.

G. A. GIBSON. Notes on integration by parts and by successive reduction. Edinb. M. S. Proc. IV. 88-91.

Behandelt hauptsächlich das binomische Differential

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

das in abweichender Art durch Herrn Muir in Bd. III. 100 (F. d. M. XVII. 1885. 258) bearbeitet war. Gbs. (Lp.)

P. DU BOIS-REYMOND. Ueber die Integration der Reihen. Berl. Ber. 359-371.

Fasst man, was oft zweckmässig ist, die Reihe

$$U_n(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p(x)$$

als Function von x und n auf und setzt demgemäss $U_n(x) = \varphi(x, \varepsilon)$, wo $\varepsilon = n^{-1}$ ist, so lässt sich das Problem über die gliedweise Integration der Reihen, wenn man voraussetzt, dass in dem Intervall $a \dots b$, dem die Integrationsgrenzen angehören, $\lim_{\varepsilon=0} \varphi(x, \varepsilon)$ endlich und der Einfachheit halber gleich Null ist, so formuliren: Unter welchen Umständen ist die Function

$$Q(x) = -\lim_{\varepsilon=0} \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \varepsilon)\,dx$$

gleich Null, d. i. existirt sie nicht, und unter welchen Umstän-

den existirt sie in von Null verschiedener Weise, gleichviel ob bestimmt oder unbestimmt oder unendlich? Bleibt $\varphi(x, \varepsilon)$ bei Verkleinerung von ε nicht durchweg unter einer endlichen Schranke, so kann $Q(x)$ existiren. Bleibt dagegen $\varphi(x, \varepsilon)$ unter einer endlichen Schranke, so erhält der Verfasser als hinreichende Bedingung für die gliedweise Integrirbarkeit der Reihe — und es ist dies die geringste bis jetzt bekannte Forderung — die, dass $\varphi(x, \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ in einem System von in jedem kleinsten Intervall von x vorkommenden Punkten stetig ist. Die durch diesen Satz nahe gelegte Frage, ob Functionen existiren, die zwar für jeden besonderen Wert x mit ε verschwinden, aber in jedem kleinsten Intervall von x zugleich stetig und unstetig sein können, wird durch Aufstellung einer solchen Function in bejahendem Sinne entschieden. Eine unumgängliche (allerdings nicht ausreichende) Vorbedingung für die Existenz der Grösse $Q(x)$, wenn $\varphi(x, \varepsilon)$ endliche Schranken nicht überschreiten darf, ist die, dass im Integrationsintervall Strecken vorhanden seien, in deren beliebig kleinen Abschnitten die Function $\varphi(x, \varepsilon)$ bei Verkleinerung von ε über eine der ganzen Strecke gemeinsame Schranke sich erhebt. Dass sich diese Vorbedingung erfüllen lässt, gelingt dem Verfasser durch eine analytische Construction zu beweisen. T.

G. Giuliani. Dell' integrabilità di una serie di funzioni. Batt. G. XXIV. 44-45, 333.

Beweis eines von Herrn Arzelà angegebenen Theoremes und Aufstellung eines neuen Satzes. Beides wird in einem berichtigenden Nachtrage vom Verfasser selbst als fehlerhaft erkannt. Vi.

P. Tschebyscheff. Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux. Acta Math. IX. 35-56.

Die in Liouville J. (2) XIX. 151 behandelte Aufgabe (s. F.

d. M. VI. 180) wird wieder aufgenommen und die daselbst angedeutete Lösung vollständig ausgeführt. H.

DUARTE LEITE. Integração das differenciaes algebricas. Porto.

In diesem Werke beschäftigt sich der Verfasser mit den Integralen derjenigen algebraischen Functionen, welche man algebraisch oder mit Hülfe der logarithmischen Functionen aufstellen kann. Das erste Capitel ist den Integralen gewidmet, welche man algebraisch ausdrücken kann, nebst dem Abel'schen Theorem in Bezug auf diese Integrale; es folgt die Methode Liouville's, um sie zu berechnen, und einige neue Theoreme, welche die Bedingungen dafür angeben, dass die Functionen wirklich algebraisch integrirbar sind.

In dem zweiten Capitel, welches sich auf die logarithmisch ausdrückbaren Integrale bezieht, folgt das Abel'sche Theorem in seiner allgemeineren und einfacheren Form für algebraische Integrale und in Folge dessen die logarithmisch ausdrückbaren Integrale; darauf werden allgemein die Integrale von der Form $\int\frac{Pdx}{R^{\frac{1}{m}}}$ entwickelt, besonders wenn sie durch einen einzigen Logarithmus sich darstellen lassen. Den Schluss macht eine Anwendung auf den Fall, dass $m=2$ ist. Tx. (Hch.)

M. TICHOMANDRITZKY. Die Aussonderung des algebraischen Teiles der hyperelliptischen Integrale. Chark. Ges. 1885. II. 93-114. (Russisch.)

Die Abhandlung sucht das Verfahren, welches von Ostrogradsky angewandt wurde, um den algebraischen Teil der Integrale der rationalen Brüche auszusondern, auch auf die hyperelliptischen Integrale auszudehnen. Hierzu zeigt er, dass man immer ein Polynom $K(x)$, dessen Grad nicht höher als der Grad des Polynoms $f(x)$ ist, so bestimmen kann, dass

$$\int \frac{f(x)+K(x)}{2\sqrt{R(x)}}\,dx = X\sqrt{R(x)}+C,$$

wo X ein Polynom bleibt. Aehnlich kann man jedenfalls $K(x)$ so bestimmen, dass

$$\int \frac{\varphi(x)+K(x)}{\psi(x)}\,\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{X}{Y}\sqrt{R(x)}+C,$$

wo der Grad von X kleiner als der Grad von Y ist. Wi.

F. Brioschi. Sopra una formola di trasformazione di integrali multipli. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 111-117.

Es wird folgender Satz hergeleitet. Das n-fache Integral von

$$\frac{\varDelta\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n}{\sqrt{[f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n)]}},$$

wo

$$f(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2n})$$

und $\varDelta$ das Product der Differenzen je zweier der Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist, lässt sich in das n-fache Integral von

$$\frac{dy_1\, dy_2 \dots dy_n}{\sqrt{F(y_1, y_2, \dots, y_n)}}$$

transformiren, worin die Function $F(y_1, \dots)$ das Product von $2n+1$ linearen Functionen der y ist, indem man setzt:

$$y_1 = \frac{(a_{m_1}-x_1)(a_{m_1}-x_2)\dots(a_{m_1}-x_n)}{(a_{m_1}-a_{m_2})(a_{m_1}-a_{m_3})\dots(a_{m_1}-a_{m_n})}$$

und analog $y_2, \dots, y_n$, wo $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_n}$ beliebige n unter den Grössen $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sind.

Für $n=2$ ist dieser Satz von Rosenhain in Crelle J. XL. 329 bewiesen. H.

Capitel 4.
Bestimmte Integrale.

Weis. Integration eines bestimmten Integrals durch Reihenentwickelung. Pr. Gymn. Weilburg.

Die Beweisführung der Zulässigkeit der Reihenentwickelung unter dem Integralzeichen wird an einem Beispiele gezeigt.

H.

T. J. Stieltjes. Sur quelques intégrales définies. Amst. Versl. en Meded. (3) II. 210-216.

Die Formel von Legendre

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1} - \frac{1}{2m}$$

wird in dieser Arbeit als der einfachste Fall einer Reihe von Formeln betrachtet, welche einen besonderen arithmetischen Charakter besitzen. Durch einige Beispiele wird dieser Charakter näher erläutert, während das vollständige System später behandelt werden soll.

Die genannten Formeln sind

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \sin\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}}\,\frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}}$$
$$p \equiv 1 \pmod{4}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}} \cos\left(\frac{ptx}{2\pi}\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{p}}\,\frac{f(e^{-t})}{1-e^{-pt}}$$
$$p \equiv 3 \pmod{4},$$

während

$$f(x) = \sum_1^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) x^n.$$

Aus diesen Formeln werden einige Folgerungen gezogen.

G.

T. J. Stieltjes. Note sur le développement de l'intégrale $\int_0^a e^{x^2} dx$. Acta Math. IX. 167-176.

Es wird eine zur approximativen Berechnung der Function

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2} dx$$

taugliche Entwickelung gesucht. Sie geht von der Transformation in

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ Hauptwert} \int_0^\infty \frac{e^{a^2(1-x^2)}}{1-x^2} dx$$

aus, eine Gleichung deren Richtigkeit durch Differentiation erhellt. Unter dem Hauptwert wird nach Cauchy der Grenzwert des Integrals von 0 bis $1-\varepsilon$ und von $1+\varepsilon$ bis ∞ verstanden. Der Verfasser lässt es als vornehmlichen Zweck der vorliegenden Arbeit erscheinen zu zeigen, dass diese von Riemann und andern gemissbilligte Einführung in Fällen wie dem gegenwärtigen einzig zum Ziele führt. Durch wiederholte teilweise Integration wird der Ausdruck in die divergente Reihe

$$\varphi(a) = T_1 + T_2 + \cdots + T_n + R_n$$

entwickelt, wo

$$T_n = e^{a^2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n a^{2n-1}},$$

$$R_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \int_{a_n}^a x^{-2n} e^{x^2} dx.$$

Die Ermittelung von a_n erfordert neue Reihenentwickelungen. Die a_n wachsen beständig mit n. Man hat nun dasjenige n zu wählen, für welches $a_n < a < a_{n+1}$ ist, dann ist $\varphi(a)$ zwischen den Grenzen $T_1 + \cdots + T_n$ und $T_1 + \cdots + T_{n+1}$ enthalten. Die darüber geführten Untersuchungen sind zu mannigfaltig zum Bericht.

H.

E. Catalan. Sur quelques intégrales définies. Belg. Mém. XLVI. 24 S.

Untersuchung verschiedener, mit den Functionen X_n ver-

wandter Integrale, z. B. der folgenden:

$$\int_a^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^n \sqrt{x^2-a^2}}, \quad \int_a^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n-1}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha}}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^{2n-1}\omega\, d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n}, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2n-2}\omega\, d\omega}{(1-\mu\sin^2\omega)^n}.$$

Verschiedene Reihenentwickelungen. Mn. (Lp.)

C. LE PAIGE. Rapport sur un Mémoire intitulé: „Sur une suite de polynômes conjugués“, par M. Deruyts. Belg. Bull. (3) XII. 12-15.

Eine geistvolle Verallgemeinerung verschiedener Resultate Heine's und Didon's hinsichtlich der angenäherten Bestimmung der bestimmten Integrale

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \text{ unter der Form } \Sigma A\,\varphi(a)$$

und über die bei der Aufgabe vorkommenden Polynome. Mn. (Lp).

J. DERUYTS. Sur une classe de polynômes conjugués. Belg. Mém. S. É. XLVIII. 20 S.

Es ist dies die Abhandlung, über welche Herr le Paige den im vorangehenden Referate besprochenen Bericht erstattet hat. Mn.

G. A. GIBSON. Note on a class of definite integrals. Glasgow Phil. Soc. Proc. XVIII. 167-169.

Zu beweisen, dass

$$\int_0^\pi F\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) d\theta = \int_0^\pi F(\sin\theta)\, d\theta,$$

wo $r^2 = 1-2a\cos\theta+a^2$. Gbs.

Ch. Hermite, A. H. Curtis. Solution of questions 8164, 8196. Ed. Times. XLIV. 87.

Herr Hermite hatte die Formel zum Beweise gestellt, dass

$$\int_0^1 \frac{\sin\alpha\, dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \tfrac{1}{2}\alpha - n\pi,$$

wo n die grösste ganze Zahl bedeutet, die dem Bruche $\frac{\alpha}{2\pi}$ zunächst liegt (grösser oder kleiner als derselbe). Herr Curtis beweist, dass man allgemeiner hat:

$$\int_0^k \frac{\sin\alpha\, dx}{1+2x\cos\alpha+x^2} = \lambda(\alpha-2n\pi),$$

worin n dieselbe Zahl bedeutet, λ durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\frac{\sin\lambda\,(\alpha-2n\pi)}{\sin(1-\lambda)(\alpha-2n\pi)} = k.$$

Lp.

N. J. Sonine. Ueber ein bestimmtes Integral, welches die zahlentheoretische Function $[x]$ enthält. Warsch. Nachr. 1885. 2. 1-24. (Russisch).

Der Verfasser beweist zunächst, dass unter gewissen Bedingungen folgende allgemeine Formel besteht:

$$(1)\qquad \int_{-a}^{b} [t]\, df(t) = [b]\, f(b) + [a+1]\, f(-a) - \sum_{-[a]}^{[b]} f(k),$$

wo $[t]$ eine den Ungleichheiten $x-1 < [x] < x$ genügende ganze Zahl ist, k jedoch nur ganze Werte annimmt. Wenn bei $t=\pm\infty$ $\lim tf(t)=0$ ist, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [t]\, df(t) = -\sum_{-\infty}^{\infty} f(k).$$

Wenn man in dieser Formel die Function $[t]$ durch ihre trigonometrische Reihe ersetzt, so erhält man die Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt + 2\sum_{1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos 2\varkappa\pi t.dt = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)$$

und allgemeiner, wenn die Function $f(t)$ bei ganzen Werten des Argumentes endliche Sprünge macht:

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt + 2\sum_{1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos 2\varkappa\pi.dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f(k-0)+f(k+0)}{2}.$$

Diese Formel (2) ist ein specieller Fall derjenigen Formel, welche von Schlömilch gegeben ist (Comp. d. h. Analysis. Bd. II. S. 152, F. 49); doch lässt sich die Schlömilch'sche Formel aus der Formel (2) ableiten. Zum Schluss wird die allgemeine Formel (1) auch zur Ableitung der Maclaurin'schen Summationsformel angewandt. Wi.

S. P. Seiliger. Eine Seite aus der Analysis. Odessa Ges. VII. 145-153 (Russisch).

Enthält eine Verallgemeinerung des von Herrn Weierstrass gegebenen Satzes, welcher in der Abhandlung von Frau S. Kowalewsky: „Ueber die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln“ (Acta Math. VI. 249-304, F. d. M. XVII. 1885. 987 ff.) angeführt wurde. Wi.

M. L. Albeggiani. Sopra una formola del sig. Hermite. Palermo Rend. I. 59-63.

Mit kleinen Abänderungen versehene Wiederholung der von Herrn Hermite (Cours, II éd. p. 118) angegebenen Methode zur Bestimmung der Differenz der Werte einer Integralfunction zu beiden Seiten einer Unstetigkeitslinie (coupure). Vi.

M. Lerch. Ueber ein bestimmtes Integral. Prag. Ber. 588-604. (Böhmisch).

Im Anschluss an eine Abhandlung Riemann's (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse) betrachtet der Verfasser das Integral

$$\int_{0}^{\infty} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx, \quad \text{wobei} \quad \Phi(x|v) = e^{-n^2\pi x} \cos 2n\pi v\sqrt{x},$$

und findet nach einigen Convergenzbetrachtungen mit Hülfe der Cauchy-Poisson'schen Transformationsformel der elliptischen ϑ-Functionen:

$$\int_0^\infty \Phi(x|v)x^{\frac{1}{2}s-1}dx = -\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s}+\int_1^\infty [\Phi(x|v)x^{\frac{1}{2}s-1} + \Phi(x|vi)x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}]dx.$$

Man erhält andererseits

$$\int_0^\infty \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}dx = \zeta(s).2\int_0^\infty e^{-\pi z^2}z^{s-1}\cos 2\pi vz\,dz,$$

wobei mit Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

gesetzt wurde. Hieraus ergiebt sich nicht nur das Riemann'sche Resultat $f(s) = f(1-s)$, wobei $f(s) = \zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$, sondern auch eine Eigenschaft der Function

$$C(s|v) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(4\pi v^2)^n}{n!\binom{2n}{n}}\binom{-\frac{1}{2}s}{n} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}s}}{\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\int_0^\infty \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}dx,$$

welche sich durch die Formel

$$C(s|v) = C(1-s|vi)e^{-\pi v^2}$$

ausdrückt, und welche in einer Formel des Herrn Kummer (Crelle Journ. XVII. 228) als ein specieller Fall bereits enthalten ist.

Std.

S. Pincherle. Note sur une intégrale définie. Acta Math. VII. 381-386.

Sind $A(z)$ und $\varphi(z)$ Laurent'sche Reihensummen, d. h. von der Form

$$A(z) = a_0 + \sum_1^\infty\left(a_n z^n + \frac{a'_n}{z^n}\right),$$

die innerhalb eines Kreisrings convergiren, so ist auch

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int A\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\frac{dy}{y}$$

eine solche. Es wird nun bei festem $A(z)$ die Herleitung von J als ein auf $\varphi(z)$ ausgeübter Algorithmus aufgefasst und insbe-

sondere der Fall

$$a_0 = \tfrac{1}{2};\quad a_n = \frac{1}{1-p^{2n}};\quad a'_n = \frac{1}{1-p^{-2n}}$$

untersucht. Dieser führt für $J = f(x)$ zu der Differenzengleichung

$$\Delta f(x) = f(x) - f(p^2 x),$$

woraus man findet:

$$\Delta f(x) = \varphi(x) - c_0.$$

Hieran knüpfen sich viele Bemerkungen. H.

E. J. Routh. Some theorems in integration and their representation by the method of equivalent points. Quart. J. XXI. 281-287.

Ist V der Inhalt eines Polygons oder Polyeders, z die Abscisse des Elementes dV auf beliebiger Axe, so ist für vier Gestalten von V das über V ausgedehnte Integral $\int z^n dV$, wo n positive ganze Zahl, das Product von V und einer rationalen Function der Abscissen der Ecken und einiger anderen Punkte, also unabhängig von den beiden andern Coordinaten x, y. Dieser Satz gilt vom Dreieck, Viereck, Tetraeder und körperlichen Fünfeck, und zwar hat beziehungsweise $\int z^n dV$ die Werte:

$$\frac{1.2V}{(n+1)(n+2)}\left\{\frac{z_1^{n+2}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\cdots\right\},$$

$$\frac{1.2V}{(n+1)(n+2)}\left\{\frac{z_1^{n+2}(z_1-z')}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}+\cdots\right\},$$

$$\frac{1.2.3V}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left\{\frac{z_1^{n+3}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}+\cdots\right\},$$

$$\frac{1.2.3V}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left\{\frac{z_1^{n+4}(z_1-z'')}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_5)}+\cdots\right\},$$

wo z' die Abscisse des Diagonalenschnitts, z'' die des Schnitts der einzigen Diagonale und Diagonalebene, z_1, z_2, ... die der Ecken bezeichnen. Da die Lage der Axen der x, y, z willkürlich ist, so kann man $z+\lambda x+\mu y$ für z setzen und findet aus obigen Formeln durch Vergleichung der Coefficienten der Po-

tenzen von λ und μ die Werte von $\int x^k y^l z^m dV$ für beliebige ganze $k, l, m \gtreqless 0$. Aequivalente Punkte mit den Abscissen $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ heissen nun hier solche, für welche

$$\int z^n dV = V(p_1\zeta_1^n + p_2\zeta_2^n + \cdots)$$

ist, wenn $p_1, p_2, \dots$ rationale numerische Coefficienten bezeichnen. Es werden eine grosse Anzahl Systeme äquivalenter Punkte aus obigen Formeln hergeleitet. H.

A. Harnack. Bemerkung zur Theorie der Doppelintegrale. Klein Ann. XXVI. 566-568.

Der Artikel betrifft die Frage, unter welchen Bedingungen ein Integral über einen Flächenbezirk durch eine zweimalige Integration dargestellt werden könne. Der Verfasser rechtfertigt eine darauf bezügliche Bemerkung in seinen „Elementen der Differential- und Integralrechnung" gegen den von Herrn Stolz in l. c. p. 93 gemachten Vorwurf der Unrichtigkeit. H.

H. Poincaré. Sur les résidus des intégrales doubles. C. R. CII. 202-204.

Verallgemeinerung der Cauchy'schen Theorie der zwischen complexen Grenzen erstreckten Integrale für den Fall von Doppelintegralen. Ist die zu integrirende Function eine rationale, so besitzt das Integral Perioden von dreierlei Art. T.

P. Alexander. A symbolical proof of Fourier's double-integral theorem. Mess. XVI. 158-164.

Der Beweis beruht auf der Anwendung der symbolischen Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{D\cos bz}{b^2+D^2}\,db = \tfrac{1}{2}\pi e^{-zD}, \qquad \int_0^\infty \frac{b\sin bz}{b^2+D^2}\,db = \tfrac{1}{2}\pi e^{-zD},$$

wo D einen Differential-Operator bedeutet. Glr. (Lp.)

H. W. Watson. On a theorem in integration. Quart. J. XXI. 225-228.

Es wird dargethan, dass (wie auch ohnedies deutlich), wenn

$$r^2 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

und

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}$$

ist, man hat:

$$\nabla^2\iiint\frac{dxdydz}{r} = -4\pi;\quad \iiint\nabla^2\frac{1}{r}\cdot dxdydz = 0$$

für Integralgrenzen, welche den Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ umschliessen.

H.

G. A. Maggi. Riduzione di un integrale multiplo. Lomb. Ist. Rend. XIX. 689-692.

Durch die Substitution $\alpha\beta=\gamma$ und durch teilweise Integration erhält man zuerst die Reductionsformel:

$$\int_0^1\alpha^\mu d\alpha\int_0^1\beta^\nu F(\alpha\beta)d\beta = \frac{1}{\mu-\nu}\int_0^1(\alpha^\nu-\alpha^\mu)F(\alpha)d\alpha,$$

deren wiederholte Anwendung führt zu dem Resultate:

$$\int_0^1\alpha_1^{n-1}d\alpha_1\int_0^1\alpha_2^{n-2}d\alpha_2\int_0^1\dots\int_0^1\alpha_{n-1}d\alpha_{n-1}\int_0^1 f^{(n)}(a+h\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n)d\alpha_n$$

$$= \frac{1}{1.2\dots(n-1)}\int_0^1(1-\alpha)^{n-1}f^{(n)}(a+h\alpha)d\alpha.$$

H.

C. Andréief. Note sur une relation entre les intégrales définies des produits des fonctions. Bord. Mém. (3) II. 1-14.

Es werden zuerst zwei Relationen bewiesen: 1. Sind $f, f_1, \dots, f_n$ und $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ zwei Reihen von Functionen von x, so ist

$$\begin{vmatrix} \int f\varphi\,dx & \int f\varphi_1\,dx & \dots & \int f\varphi_n\,dx \\ \int f_1\varphi\,dx & \int f_1\varphi_1\,dx & \dots & \int f_1\varphi_n\,dx \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int f_n\varphi\,dx & \int f_n\varphi_1\,dx & \dots & \int f_n\varphi_n\,dx \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\int \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & \dots & f(v) \\ f_1(x) & f_1(y) & \dots & f_1(v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x) & f_n(y) & \dots & f_n(v) \end{vmatrix} \cdot$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi(x) & \varphi(y) & \dots & \varphi(v) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1(y) & \dots & \varphi_1(v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_n(x) & \varphi_n(y) & \dots & \varphi_n(v) \end{vmatrix} dx\,dy \dots dv,$$

alle Integrale zwischen denselben constanten Grenzen genommen.

2. Sind $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ und $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$ zwei Gruppen von Functionen von x, und liegen die Argumente derselben $x_0, y_0, \dots, v_0$ zwischen a und b, so giebt es zwischen a und b bei unverändertem x_0 Werte $y = y_1$, $z = z_2$, $\dots$, $v = v_n$, für welche

$$\frac{\begin{vmatrix} \mu_0(x_0) & \mu_0(y_0) & \dots & \mu_0(v_0) \\ \mu_1(x_0) & \mu_1(y_0) & \dots & \mu_1(v_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n(x_0) & \mu_n(y_0) & \dots & \mu_n(v_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \nu_0(x_0) & \nu_0(y_0) & \dots & \nu_0(v_0) \\ \nu_1(x_0) & \nu_1(y_0) & \dots & \nu_1(v_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_n(x_0) & \nu_n(y_0) & \dots & \nu_n(v_0) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \mu_0(x_0) & \mu'_0(y_1) & \dots & \mu_0^{(n)}(v_n) \\ \mu_1(x_0) & \mu'_1(y_1) & \dots & \mu_1^{(n)}(v_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n(x_0) & \mu'_n(y_1) & \dots & \mu_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \nu_0(x_0) & \nu'_0(y_1) & \dots & \nu_0^{(n)}(v_n) \\ \nu_1(x_0) & \nu'_1(y_1) & \dots & \nu_1^{(n)}(v_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_n(x_0) & \nu'_n(y_1) & \dots & \nu_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix}}$$

ist. Mit Hülfe beider Sätze wird dann die beabsichtigte Relation hergeleitet:

$$\Delta = \frac{1}{[(n!)!]^2} P_1 Q_1 \Delta_n,$$

wo

$$\Delta = \int^{(n+1)} \varphi(x)\varphi_1(y)\dots\varphi_n(v) \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & \dots & f(v) \\ f_1(x) & f_1(y) & \dots & f_1(v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x) & f_n(y) & \dots & f_n(v) \end{vmatrix} dx\,dy\dots dv,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \int \vartheta dx & \int x\vartheta dx & \dots & \int x^n \vartheta dx \\ \int x\vartheta dx & \int x^2 \vartheta dx & \dots & \int x^{n+1}\vartheta dx \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \int x^n \vartheta dx & \int x^{n+1}\vartheta dx & \dots & \int x^{2n}\vartheta dx \end{vmatrix},$$

$$P_1 = \begin{vmatrix} f(x_0) & f'(y_1) & \dots & f^{(n)}(v_n) \\ f_1(x_0) & f_1'(y_1) & \dots & f_1^{(n)}(v_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_0) & f_n'(y_1) & \dots & f_n^{(n)}(v_n) \end{vmatrix},$$

Q_1 dasselbe nach Setzung von φ statt f; ϑ eine beliebige Function, die ihr Vorzeichen nie wechselt, $x_0, y_1, \dots, v_n$ im Sinne von 2. zu nehmen. Hiermit ist Δ in drei Factoren zerlegt, deren einer nur von den f, einer nur von den φ, der dritte von keinen von beiden abhängt. Von diesem Resultat werden Anwendungen gemacht auf eine Entwickelung von

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\vartheta(x)\,dx$$

nebst Bestimmung des Restes, woraus Sätze von Posse und Tschebyscheff hervorgehen, ferner auf die Bestimmung der f und φ unter gegebenen Bedingungen, schliesslich die Formel durch Bedingungen specialisirt. H.

A. W. Wassilieff. Ueber die Formeln, welche von Jacobi gegeben sind, um die Lösungen des linearen Systems mit Hülfe der mehrfachen Integrale auszudrücken. Kazan Ges. IV. 39-47. (Russisch).

Jacobi hat in der Abhandlung: „Dato systemate etc." (Crelle

Journ. XIV.) die Lösungen des Systems linearer Gleichungen mit Hülfe der $(n-1)$-fachen Integrale ausgedrückt. Es wird nun gezeigt, dass die Jacobi'sche Grundformel, für den einfachen Fall $n=3$ aus dem Gauss'schen Satze über das Integral

$$\int \frac{\cos(nr)}{r^2}\,ds$$

mit Hülfe der Formeln von Herrn Kronecker („Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln". Berl. Monatsber. 1869) sich ableiten lässt. Wi.

P. Mansion. Détermination du reste, dans la formule de quadrature de Gauss. Belg. Bull. (3) XI. 293-307.

E. Catalan. Rapport. Belg. Bull. (3) XI. 270-273.

I. Die allgemeine Newton'sche Interpolationsformel kann man so schreiben:

$$F(x) = G(x) + (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)P(x),$$

wo $G(x)$ das ganze Polynom bedeutet:

$$A+B(x-x_1)+C(x-x_1)(x-x_2)+\cdots+L(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

so dass $F(x_1)=G(x_1),\ \dots,\ F(x_n)=G(x_n)$. Offenbar ist:

$$\int_{-1}^{+1}\{F(x)-G(x)\}\,dx = \int_{-1}^{+1}(x-x_1)\dots(x-x_n)P(x)\,dx.$$

Man setze $\varphi(x)=(x^2-1)^n$ und nehme statt $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ die n reellen und ungleichen Wurzeln von $\varphi^{(n)}(x)=0$. Dann ist:

$$\int_{-1}^{+1}\{F(x)-G(x)\}\,dx = \frac{1}{(n+1)\dots 2n}\int_{-1}^{+1}\varphi^{(n)}(x)P(x)\,dx,$$

und, wenn man rechts n Mal partiell integrirt:

$$\int_{-1}^{+1}\{F(x)-G(x)\}\,dx = \frac{1}{(n+1)\dots 2n}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx,$$

oder auch, wenn x_μ ein zwischen $+1$ und -1 liegender Wert ist:

$$\int_{-1}^{+1}\{F(x)-G(x)\}\,dx = \frac{P^{(n)}(x_\mu)}{(n+1)\dots 2n}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n\,dx.$$

Der Verfasser zeigt, dass die n^{te} Ableitung der „interpolirenden Function" $P(x)$ mit Hülfe der Ableitung $F^{(2n)}(x)$ der Function $F(x)$

darstellbar ist, so dass

$$(1)\qquad P^{(n)}(x_\mu) = \frac{F^{(2n)}(\xi)}{(n+1)(n+2)\dots 2n},$$

wo ξ zwischen -1 und $+1$ liegt. Demnach findet man leicht:

$$\int_{-1}^{+1}\{F(x)-G(x)\}\,dx = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots(2n-1)}\right)^2 \frac{F^{(2n)}(\xi)}{1.2.3\dots 2n};$$

dies ist, abgesehen von der Form, die Formel von Gauss mit einer endlichen Restformel.

II. Zur Aufstellung der grundlegenden Formel (1) schlägt der Verfasser folgendes Verfahren ein: Die n^{te} Ableitung der Function

$$\psi(x) = \frac{F(X)-F(x)}{X-x}$$

wird in der Form erhalten:

$$\psi^{(n)}(x) = \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}[x+t(X-x)]\,dt,$$

ohne dass auf die Ableitung der bestimmten Integrale unter dem Zeichen zurückgegriffen wird. Danach leitet man hieraus den Wert von $P^{(n)}(x)$ durch die Bemerkung ab, dass nach einer Ampère'schen Formel die interpolirende Function $P(x)$ gleich ist:

$$\frac{\left(\dfrac{F(x_1)-F(x)}{x_1-x}\right)}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}+\dots+\frac{\left(\dfrac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x}\right)}{(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Zuletzt führt die so erhaltene Ableitung $P^{(n)}(x)$ zur Formel (1) unter Hinzuziehung eines Cauchy'schen Satzes, welcher den Wert des Restes in der Newton'schen Interpolationsformel liefert, oder den einer interpolirenden Function mittels einer Ableitung.

Mn. (Lp.)

P. Mansion. **Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss.** C. R. CII. 412-415.

Die Interpolationsfunctionen für $f(x)$, recurrent definirt durch

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(x_1,\dots,x_{n-2},x_{n-1})-f(x_1,\dots,x_{n-2},x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

hat Peano (Torino Atti XVIII. 573, F. d. M. XVI. 1884. 197) in der Form dargestellt:

$$f(x, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-x_1)\ldots(z-x_n)},$$

wo der Integrationsweg die Punkte $x_1, \ldots, x_n$ umschliesst. Dieser Ausdruck wird differentiirt und x durch Näherungswerte $y_1, \ldots, y_n$ vertreten, so dass

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \text{ nahe } = \frac{n!}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)(z-y_1)\ldots(z-y_n)(z-x_1)\ldots(z-x_n)}$$

wird, und mit Hülfe eines Cauchy'schen Satzes auf

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \text{ nahe } = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$$

reducirt, wo ξ einem gewissen Mittelwerte zwischen den x und y beliebig nahe gebracht werden kann. Ausgehend von der Newton'schen Interpolationsformel in der Form

$$f(x) = G(x) + (x-x_1)\ldots(x-x_n)f(x, x_1, \ldots, x_n),$$

wo $G(x)$ ein Polynom vom Grade $n-1$, wird schliesslich der folgende Restausdruck der Gauss'schen Formel gefunden:

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-G(x)]\,dx = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots 2n-1}\right)^2 \frac{f^{(2n)}(X)}{(2n)!},$$

wo $f^{(2n)}(X)$ einen Mittelwert von $f^{(2n)}(x)$ bezeichnet. H.

J. Deruyts. Sur le calcul approché de certaines intégrales définies. Belg. Bull. (3) XI. 307-311.

C. Le Paige. Rapport. Belg. Bull. (3) XI. 279-280.

Es ist

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = A_1\varphi(\alpha_1) + A_2\varphi(\alpha_2) + \cdots + A_n\varphi(\alpha_n)$$

als Näherungswert für das Integral der linken Seite, wenn man nur die Potenzen von x vernachlässigt, deren Grad mindestens $2n$ ist; wo $f(x)$ eine Function bedeutet, welche zwischen a und b ihr Zeichen nicht wechselt; $\varphi(x)$ ein ganzes Polynom; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von $P_n = 0$, wenn P_n ein solches ganzes Polynom

vom Grade n in x ist, dass

$$\int_a^b f(x) P_m P_n \, dx = 0,$$

falls m von n verschieden ist. Der Verfasser giebt den expliciten Wert der Coefficienten A in drei ziemlich allgemeinen Fällen, nämlich in denen, wo es sich um die Integrale handelt:

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^m (1+x)^n \varphi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi(x) dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \varphi(x) dx.$$

(Vergl. den folgenden Bericht.) Mn. (Lp.)

J. Deruyts. Sur la valeur du reste des formules d'approximation pour le calcul des intégrales définies. S. M. F. Bull. XIV. 151-156.

Der Rest der Approximationsformel

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = c_n \sum \frac{\varphi(\alpha)}{P'(\alpha) P_{n-1}(\alpha)} + R$$

wird in der Form dargestellt:

$$R = \frac{\varphi^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b f(x) P_n^2(x) dx \qquad (a < \xi < b),$$

wo

$$P(x) = \Pi(x - \alpha_i)$$

und P_n der Nenner des n^{ten} Näherungswertes der Kettenbruchentwickelung von

$$\int_a^b \frac{f(z) dz}{x - z} = \int_a^b f(z) \sum \frac{z^k}{x^{k+1}} dz$$

ist. Dies giebt speciell die Gauss'sche Formel, ferner geht daraus das Resultat von Mansion hervor, auch lässt es sich anwenden auf eine Formel von Hermite und zur Verallgemeinerung der Formel von Cotes. (Vgl. den vorigen Bericht.) H.

A. Thiré. Sur la théorie du planimètre d'Amsler. Nouv. Ann. (3) V. 353-364.

Amsler's Planimeter dient bekanntlich zur Ausmessung von Flächen, die von beliebigen Curven begrenzt sind. Es besteht aus zwei Stäben, deren einer an dem einen Ende eine Rolle und an dem andern einen senkrechten Zeichenstift trägt, während der andere Stab am einen Ende durch ein Gliederwerk mit dem ersten Stabe verbunden ist und am andern Ende eine Nadel trägt, die in die Zeichenebene gesteckt wird. Umfährt man mit dem Zeichenstift die die Fläche umgebende Curve, so bewegt sich die Rolle, und ihre Bewegung steht in einer einfachen Beziehung zum Inhalt der von der Curve begrenzten Fläche. Dies wird in der vorliegenden Note nachgewiesen. M.

Br. Abdank-Abakanowicz. Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégrateurs mécaniques. Paris. Gauthier-Villars. 8°. 156 S.

Der Herr Verfasser hat den von ihm erdachten Integrator, dessen Princip F. d. M. XII. 217 angeführt ist, mehrfach verbessert und giebt im vorliegenden Buche nach ausführlicher Entwickelung des neuen kinematischen Princips der Integratoren und nach Beschreibung der verschiedenen älteren und neueren Modelle eine grosse Zahl von Anwendungen. Dahin gehören planimetrische Probleme mannigfacher Art, die Lösung numerischer Gleichungen, die Integration von Differentialgleichungen, Aufgaben über Momente, Schwerpunkt, Druck, die Theorie der elastischen Curve, der Gewölbe, nautische Anwendungen, auch Anwendungen auf Elektricität u. ä. M.

J. Bertrand, C. Jordan. Erreur de date. C. R. CII. 35.

Herr Mestre hat am 16. März 1885 (nicht 1875) ein Patent auf einen Integrator genommen, welcher dem von D. Napoli und und Abdank-Abakanowicz beschriebenen (F. d. M. XVII. 276) entspricht. Lp.

K. Skibinski. Der Integrator des Prof. Dr. Zmurko in seiner Wirkungsweise und praktischen Verwendung. Wien. Denkschr. LIII. Wien. C. Gerold's Sohn.

Der hier beschriebene und abgebildete Integrator, von Herrn Zmurko 1864 in seinem Werke über Mathematik veröffentlicht, unterscheidet sich von den gewöhnlichen durch seine Einrichtung für verschiedene Zwecke bei verschiedener Einstellung. Während ein Stift auf einer ebenen Curve $y=f(x)$ geführt wird, zeichnet ein anderer Stift des Apparats eine Curve, deren Ordinate (für x als Abscisse) bezw. proportional

$$\int f(x)dx^{*}), \quad \int x^{n}f'(x)dx, \quad \int x^{-n}f(x)dx$$

ist. Nach Beschreibung des Apparats und Erklärung seiner Wirkungsweise handelt die Schrift weiter von der Aufstellung des gewöhnlichen Integrators (für Darstellung von $\int ydx$), von den Eigenschaften der Integralcurve, dem Integrator als Parabolograph, als Planimeter, der Darstellung der statischen Momente, der Trägheitsmomente, von der Verwendung für die Querschnitte von Balken und der elastischen Linie. H.

R. H. Scott and R. H. Curtis. On the working of the harmonic analyser at the meteorological office. Lond. R. S. Proc. XL. 382-392.

Ein Modell einer Integrationsmaschine, die aus Scheiben-, Kugel- und Cylinder-Integratoren besteht, von Herrn James Thomson wird in den Lond. R. S. Proc. XXIV. 262, XXVII. 371 beschrieben. Der vorliegende Aufsatz enthält eine Beschreibung der Maschine nach ihrer Ausführung für das „Meteorological Office" im Auszuge aus dem Engineering vom 17. December 1880; derselbe erstreckt sich bis zur Bestimmung der Coefficienten in der Formel

$$a+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_2\cos 2\theta+b_2\sin 2\theta+a_3\cos 3\theta+b_3\sin 3\theta.$$

---

*) Corrigirt statt des offenbar verdruckten $\int x^n f(x)dx$.

Die Maschine wurde zuerst zur Bestimmung von Temperatur-Constanten benutzt, und nachdem Vergleichungen zwischen den hierdurch erzielten Ergebnissen und den durch wirkliche Messungen der Photographien und durch Zahlenrechnungen erhaltenen stattgefunden haben, erweist sich nach dem Aufsatze die Uebereinstimmung als eine so enge, dass der Nachweis der Zuverlässigkeit der Maschine damit erbracht ist; man kann sie unbedenklich zur Ausführung von Reductionen benutzen, die sich sonst nur durch das viel mühsamere Verfahren der Messung und der Rechnung erledigen liessen. Cly. (Lp.)

A. J. Fraser. Two mechanical integrators or planimeters. Edinb. M. S. Proc. IV. 29-30.

Zwei Instrumente werden beschrieben; das eine bedingt Rollen und Gleiten bei seinen Bewegungen, das andere Rollen ohne Gleiten. Sie wurden der Gesellschaft als nach ganz neuen Gedanken gearbeitet und von hervorragend mathematischem Interesse vorgelegt, obschon nicht für sie der Anspruch erhoben wurde, dass sie praktisch ebenso nützlich seien wie Amsler's Planimeter. Gbs. (Lp.)

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

E. A. Stenberg. Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen. Acta Math. VIII. 119-154.

Zweck der Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Lagrange'schen Satzes von der Beziehung zwischen einer linearen homogenen Differentialgleichung und ihrer adjungirten. Es werde mit

$$L_\nu = y^{(\nu)} + P_{\nu,1}\, y^{(\nu-1)} + \cdots + P_{\nu,\nu}\, y \qquad (\nu = \mu,\ \mu+1, \cdots, n)$$

eine Reihe von $n-\mu+1$ Differentialausdrücken bezeichnet und

mit $z_{\mu+1}, z_{\mu+2}, \ldots, z_n$ ein System von Grössen, welche bewirken, dass $z_\nu L_\nu = \frac{d}{dx}(z_\nu L_{\nu-1})$, dann giebt es ein System von $\nu-\mu$ von y unabhängigen Grössen: $U_{\nu-\mu,1}, U_{\nu-\mu,2}, \ldots, U_{\nu-\mu,\nu-\mu}$ von der Beschaffenheit, dass die Identität:

$$L_\nu \equiv L_\mu^{(\nu-\mu)} + U_{\nu-\mu,1} L_\mu^{(\nu-\mu-1)} + U_{\nu-\mu,2} L_\mu^{(\nu-\mu-2)} + \cdots + U_{\nu-\mu,\nu-\mu} L_\mu$$

stattfindet. Hierbei wird z_ν ein Integral der Gleichung

$$M_{\nu-\mu} \equiv y^{(\nu-\mu)} - \frac{d^{\nu-\mu-1}}{dx^{\nu-\mu-1}}(U_{\nu-\mu,1}y) + \frac{d^{\nu-\mu-2}}{dx^{\nu-\mu-2}}(U_{\nu-\mu,2}y) - \cdots$$
$$+ (-1)^{\nu-\mu} U_{\nu-\mu,\nu-\mu} y = 0.$$

Die Grössen $U_{\nu-\mu,1}, \ldots, U_{\nu-\mu,\nu-\mu}$ sind ausdrückbar als lineare Functionen von $P_{\nu,1}, \ldots, P_{\nu,\nu-\mu}$, in denen die Coefficienten ganze Functionen von $P_{\mu,1}, \ldots, P_{\mu,\mu}$ und ihren Abgeleiteten sind. Bezeichnet nun M_n den adjungirten Ausdruck von L_n, so giebt es ein System von μ Grössen $V_{\mu,1}, V_{\mu,2}, \ldots, V_{\mu,\mu}$ von der Beschaffenheit, dass identisch

$$M_n \equiv M_{n-\mu}^{(\mu)} + V_{\mu,1} M_{n-\mu}^{(\mu-1)} + V_{\mu,2} M_{n-\mu}^{(\mu-2)} + \cdots + V_{\mu,\mu} M_{n-\mu}.$$

Unter den weiteren Beziehungen, die zwischen L_n und M_n entwickelt werden, heben wir die folgende Eigenschaft hervor. Mit $|y_1\, y_2 \ldots y_\nu|$ werde die Determinante $\Sigma \pm y_1 y_2' \ldots y_\nu^{(\nu-1)}$ bezeichnet, worin $y_1, \ldots, y_n$ die Integrale der Gleichung $L_n = 0$ sind. Der Verfasser nennt die Differentialgleichung, der die $\binom{n}{\mu}$ Ausdrücke $|y_{i_1}\, y_{i_2} \ldots y_{i_\mu}| : |y_1\, y_2 \ldots y_n|$, worin über alle Combinationen $i_1 \ldots i_\mu$ zu je μ Elementen von den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ erstreckt, als Integrale genügen, die „$(n-\mu)$: reducirende der Gleichung $L_n = 0$“ und die Differentialgleichung, der die Zähler obiger Quotienten als Integrale genügen, die „transformirte $(n-\mu)$: reducirende der Gleichung $L_n = 0$“.

Es gilt nun der Satz: Die $(n-\mu)$: reducirende der Gleichung $L = 0$ ist die transformirte μ: reducirende der Gleichung $M_n = 0$, und die transformirte $(n-\mu)$: reducirende der Gleichung $L_n = 0$ ist die μ: reducirende der Gleichung $M_n = 0$. Für $\mu = 1$ giebt dieser Satz das Theorem von Lagrange: Eine lineare homogene Differentialgleichung ist die Adjungirte ihrer eigenen Adjungirten. Hr.

E. A. STENBERG. Einige Eigenschaften der linearen und homogenen Differentialgleichungen. Helsingfors. 1885. Dissertation.

Eine Bearbeitung dieser Abhandlung ist in Acta Mathematica VIII. 119-154 erschienen. (Siehe vorhergehendes Referat.)

M.-L.

H. POINCARÉ. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta Math. VIII. 295-344.

Zur Darstellung der in einem singulären Punkte, für welchen der Punkt $x = \infty$ genommen wird, irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung bedient sich der Verfasser gewisser divergenter Reihen in einem ähnlichen Sinne, wie die Stirling'sche Reihe zur Darstellung von $\log \Gamma(x+1)$ für $x = \infty$ gebraucht wird. Diese heisst bei ihm eine asymptotische, und er definirt allgemein eine divergente Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \cdots,$$

worin die Summe der $n+1$ ersten Glieder mit S_n bezeichnet sei, als „die asymptotische Darstellung" einer Function $J(x)$, wenn der Ausdruck $x^n(J-S_n)$ mit unendlich wachsendem x sich der Null nähert. Zwei asymptotische Reihen können miteinander multiplicirt werden, d. h. wenn

$$\lim_{x=\infty} x^n(J-S_n) = 0, \quad \lim_{x=\infty} x^n(J'-S'_n) = 0,$$

so besteht auch

$$\lim_{x=\infty} x^n(JJ' - \Sigma_n) = 0,$$

worin Σ_n die Summe der n ersten Glieder des Products $S_n S'_n$ bezeichnet. Ebenso lässt sich eine asymptotische Reihe integriren, aber im allgemeinen nicht differentiiren. Als wesentlich ist noch zu bemerken, dass, wenn x mit verschiedenen Argumenten in das Unendliche rückt, auch die dargestellten Functionen J im allgemeinen verschieden werden.

Es sei nun

$$(1) \quad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

die vorgelegte Differentialgleichung, worin die Coefficienten ganze Polynome in x sind. Es handelt sich um die Darstellung ihrer Integrale in der Umgebung von $x = \infty$. Wenn die Grade der Polynome $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_0$ eine abnehmende Reihe bilden, so giebt es nach dem Fundamentalsatze des Herrn Fuchs n der Gleichung (1) genügende für $x = \infty$ convergente Reihen von der Form

$$x^a\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$

zu denen auch noch Logarithmen hinzutreten können. Diese Integrale heissen regulär. Bilden die Grade der Polynome P nicht eine abnehmende Reihe, so giebt es, wenn man von gewissen Ausnahmefällen absieht, wie Herr Thomé gezeigt hat, n Reihen von der Gestalt

$$e^Q x^a\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$

die der Gleichung (1) formell genügen, aber im allgemeinen nicht convergent sind. Q ist ein ganzes Polynom in x. Eine solche Reihe heisst „Normalreihe“, und zwar von der p^{ten} Ordnung, wenn Q vom p^{ten} Grade ist. Auch hier können noch Logarithmen auftreten, man hat dann die „logarithmische Normalreihe“ p^{ter} Ordnung:

$$e^Q x^a(\psi_0 + \log x \cdot \psi_1 + \cdots + \log^q x \cdot \psi_q),$$

wo die ψ nach den Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten. Zwischen der Ordnung der Normalreihen und dem Grade der Polynome P besteht folgende Beziehung: Es sei M_i der Grad von P_i und $N_i = (M_i - M_n) : (n - i)$, h die grösste der Zahlen N_i, p die ganze Zahl, die gleich h ist oder unmittelbar auf h folgt, dann sind alle Normalreihen höchstens von der Ordnung p. h heisst der Rang der Gleichung (1). Zunächst wird der Fall untersucht, wo alle Normalreihen von der ersten Ordnung sind. Der Grad m von P_n wird in diesem Falle von keinem der P überschritten. Ist A_i der Coefficient von x^m in P_i, so bildet man die Gleichung

$$(2) \qquad A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \cdots + A_1 a + A_0 = 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien ihre Wurzeln, die verschieden vorausgesetzt

werden. Transformirt man nun die Gleichung (1) nach der Laplace'schen Methode mittels des bestimmten zwischen passenden Grenzen zu nehmenden Integrals $y = \int v e^{zx} dz$, so geht sie über in

$$(3) \qquad Q_m \frac{d^m v}{dz^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \cdots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0,$$

worin die Q Polynome von höchstens n^{tem} Grade in z sind und $Q_m = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$ ist. Die singulären Punkte der Gleichung (3) sind demnach $a_1, \ldots, a_n$, und die determinirende Gleichung bezüglich des Punktes a_i hat die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, m-2, \beta_i$. In der Umgebung von $z = a_i$ besitzt daher die Gleichung (3) $m-1$ holomorphe Integrale und, falls β_i keine ganze Zahl ist, ein m^{tes} Integral v_i von der Form

$$v_i = (z-a_i)^{\beta_i} + C_1 (z-a_i)^{\beta_i+1} + \cdots$$

Wie der Verfasser in einer früheren Arbeit (Am. J. VII, F. d. M. XVII. 1885. 290) nachgewiesen hat, ist alsdann ein Integral der Gleichung (1) durch das bestimmte Integral $J_i = \int v_i e^{zx} dz$ gegeben, welches über folgende Curve k_i zu erstrecken ist: Durch den Punkt a_i ziehe man eine zur reellen Axe parallele Gerade und verlängere sie nach der negativen Seite ins Unendliche, sie wird einen mit hinlänglich kleinem Radius um a_i beschriebenen Kreis in einem Punkte b_i schneiden. Die Curve k_i besteht dann aus der Geraden von $-\infty$ bis b_i, dem kleinen Kreise um a_i bis b_i zurück und der Geraden von b_i bis $-\infty$. Der Ausdruck J_i lässt sich nun asymptotisch durch eine Reihe von der Form $e^{a_i x} x^{-(\beta_i+1)} \varphi_i$ darstellen, wo φ_i eine nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe bedeutet. Setzt man $i = 1, 2, \ldots, n$, so erhält man auf diesem Wege sämtliche n Integrale der Gleichung (1) asymptotisch durch Normalreihen erster Ordnung dargestellt. Der Satz bleibt bestehen, falls β_i eine ganze Zahl ist und in der Darstellung von v_i Logarithmen auftreten. Fallen aber die logarithmischen Glieder fort, so ist an Stelle der Curve k_i die Gerade von a_i bis $-\infty$ als Integrationsweg zu nehmen. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn zwei der

Wurzeln a der Gleichung (2) einander gleich werden, dann kann die Gleichung (1) im allgemeinen nicht durch Normalreihen integrirt werden. Wenn eine Normalreihe convergent ist, so stellt sie stets ein Integral der Gleichung (1) dar. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass das Integral v_i in der Form $(z-a_i)^{\beta_i}\varphi(z)$ darstellbar ist, worin $\varphi(z)$ eine in der ganzen Ebene holomorphe Function bezeichnet.

Die im Vorhergehenden für den Fall, dass die Gleichung (1) vom Range 1 ist, erhaltenen Resultate lassen sich nun durch folgendes Verfahren auf den allgemeinen Fall, wo der Rang p sei, ausdehnen.

Man betrachte das Product

$$(4) \qquad u = f(x)f(\alpha x)f(\alpha^2 x)\ldots f(\alpha^{p-1}x),$$

wo $f(x)$ ein Integral der Gleichung (1) und α eine primitive p^{te} Wurzel der Einheit bedeutet. u genügt einer Differentialgleichung vom Range p und der Ordnung n^p. Durch die Substitution $x^p = t$ geht sie in eine Differentialgleichung derselben Ordnung vom Range 1 über. u kann also nach dem Vorhergehenden bestimmt werden. Durch (n^p-1)-maliges Differentiiren der Gleichung (4) und Reduction der höheren als $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von $f(\alpha^q x)$ auf die niederen mit Hülfe der Differentialgleichung (1) und der durch die Substitution $\alpha^q x$ für x aus ihr entstehenden ergeben sich für die n^p Producte

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta}\,\frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma}\cdots\frac{d^\lambda y_{p-1}}{dx^\lambda} \qquad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

wo y_q die Function $f(\alpha^q x)$ bezeichnet, ebenso viele Gleichungen, aus denen man, falls die Determinante des Systems derselben nicht verschwindet, durch Auflösung u. a. erhält:

$$y\,y_1\cdots y_{p-1} = \Sigma\,\varphi_q\frac{d^q u}{dx^q}, \qquad \frac{dy}{dx}y_1\cdots y_{p-1} = \Sigma\,\psi_q\frac{d^q u}{dx^q},$$

wo die φ und ψ rational in x sind, und hieraus $\frac{dy}{y\,dx}$ als rationale Function von x, u und den Ableitungen von u.

In dem Falle, dass die Determinante verschwindet, tritt die Modification ein, dass die logarithmische Derivirte von y nicht mehr eine rationale, sondern eine algebraische Function der ge-

nannten Grössen wird. In jedem Falle erhält man, wenn u bekannt ist, y durch blosse Quadratur. Zu bemerken ist, dass die auf dem genannten Wege erhaltene Function y nur dann ein Integral von (1) sein wird, wenn man für u gewisse particuläre Integrale der Gleichung in u auswählt, deren es übrige s n^p linear unabhängige giebt. Da jedoch das allgemeinste unter diesen asymptotisch durch eine Normalreihe darstellbar ist, so folgt aus den obigen Entwickelungen, dass das allgemeinste Integral der Gleichung (1) sich asymptotisch durch eine Normalreihe darstellen lässt.

Hr.

E. Goursat. Sur la théorie des équations linéaires. C. R. CII. 204-207.

Die Definition der Gauss'schen Functionen durch ihre Verzweigungspunkte und die zugehörigen Exponenten, wie sie Riemann eingeführt hat, lässt sich bekanntlich auf die Integrale einer beliebigen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit lauter regulären Integralen nicht ausdehnen, weil, wie Herr Fuchs gezeigt hat, die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche man erhält, wenn mit der Låge der singulären Punkte die Wurzeln der bezüglichen determinirenden Gleichungen vorgeschrieben sind, im allgemeinen kleiner ist als die Anzahl der Constanten, die in der Fuchs'schen Gleichung enthalten sind. Macht man aber die Voraussetzung, dass die Wurzeln der zu einem singulären Punkte

$$x = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

gehörigen determinirenden Gleichung λ_i Gruppen bilden, derart, dass die k^{te} Gruppe aus m_k^i Wurzeln besteht, die sich von einander bloss durch ganze von einander verschiedene Zahlen unterscheiden, und stellt ferner die Bedingung, dass alle Logarithmen im allgemeinen Integral verschwinden, so wird die Anzahl der so erhaltenen Gleichungen der Anzahl der Constanten der Differentialgleichung gleich, wenn

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \frac{m_k^i(m_k^i+1)}{2} - 1 = m\left[\frac{(m+1)(p-2)}{2} + 1\right];$$

dazu kommen die p evidenten Relationen

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} m_k^i = m \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

das System der Gleichungen (1) und (2) ist in ganzen Zahlen aufzulösen.

Die Differentialgleichungen, auf die man hierdurch geführt wird, haben, wie der Verfasser bemerkt, die Eigenschaft, dass die Coefficienten der Substitutionen, welche ein Fundamentalsystem von Integralen bei einem geschlossenen Umlauf der unabhängigen Variabeln erleidet, algebraische Functionen der Factoren sind, mit denen die zu einem singulären Punkt gehörigen Elemente eines Fundamentalsystems bei der Umkreisung dieses Punktes multiplicirt werden. H.

A. Cayley. On linear differential equations. Quart. J. XXI. 321-331.

Die Note enthält eine summarische Darstellung der bekannten Resultate bezüglich der Reihenentwickelungen der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte nach den Untersuchungen der Herren Fuchs, Thomé, Frobenius u. a. Betreffs der dabei vorkommenden Abweichungen von der üblichen Bezeichnungsweise ist zu bemerken, dass die von Herrn Frobenius eingeführte sogenannte „determinirende Function“ $P(x^\rho)$, wo $P(y) = 0$ die vorgelegte Differentialgleichung ist, hier „indicial function“ genannt wird; der Coefficient der niedrigsten Potenz von x in dieser Function heisst „the indicial“ und die Gleichung, die hervorgeht, wenn man den Coefficienten gleich Null setzt, „indicial equation“. Folgendes interessante Beispiel einer formalen, aber illusorischen Lösung einer Differentialgleichung in Gestalt einer nach positiven und negativen Potenzen von x ins Unendliche fortlaufenden Reihe sei hier wiedergegeben. Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} - y = 0$$

wird formal befriedigt durch die für alle Werte von x divergente Reihe

$$y = \cdots (\varrho-1)\varrho x^{\varrho-2} + \varrho x^{\varrho-1} + x^\varrho + \frac{x^{\varrho+1}}{\varrho+1} + \frac{x^{\varrho+2}}{(\varrho+1)(\varrho+2)} + \cdots,$$

worin ϱ unbestimmt bleibt. Hr.

A. Cayley. On linear differential equations. (The theory of decomposition). Quart. J. XXI. 331-335.

Es handelt sich um die Bestimmung der Grössen $k_1, \ldots, k_n$ in der symbolischen Zerlegung eines linearen Differentialausdrucks:

$$D^n y + p_{n-1} D^{n-1} y + \cdots + p_0 y = (D+k_1)(D+k_2)\ldots(D+k_n)y,$$

$p_0, \ldots, p_{n-1}$ als bekannt vorausgesetzt. Die Bestimmung wird erst in der inversen und dann in der directen Reihenfolge der Grössen ausgeführt. In beiden Verfahrungsarten ergeben sie sich durch successive Integrationen von Differentialgleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$, ..., 1ten Ordnung. Hr.

A. Cayley. Note on the theory of linear differential equations. Kronecker J. C. 286-295.

Die Note bezieht sich auf die nach Herrn Thomé sogenannten Normalintegrale einer linearen Differentialgleichung

$$(1) \qquad p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0,$$

worin $p_0, \ldots, p_m$ ganze Functionen von x sind, in der Umgebung eines singulären Punktes, für den $x = 0$ genommen wird. Der Verfasser führt

$$z = \frac{dy}{dx} : y$$

als abhängige Variable ein, und setzt in der aus (1) hervorgehenden nicht linearen Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für z zur Bestimmung der neuen Variabeln die absteigende Reihe

$$z = At^\alpha + A't^{\alpha-\alpha'} + A''t^{\alpha-\alpha'-\alpha''} + \cdots$$

an, wo zur Abkürzung $t = \frac{1}{x}$ gesetzt ist und die Anzahl der positiven Exponenten endlich angenommen wird. Soll der Exponent α des „leitenden Gliedes" At^α einen gegebenen Wert a

haben, der positiv und grösser als 1 ist, so müssen die Grade von $p_0, p_1, \ldots, p_n$, als ganze Functionen von t betrachtet, bezüglich ϑ, $\vartheta+a$, ..., $\vartheta+ma$ sein, wo ϑ eine beliebige positive ganze Zahl oder Null ist. Wenn dann

$$p_0 = L_0 t^{\vartheta}+\cdots, \quad p_1 = L_1 t^{\vartheta+a}+\cdots, \quad p_m = L_m t^{\vartheta+ma}+\cdots,$$

so erhält man für den Coefficienten A des leitenden Gliedes die Gleichung

$$L_0 A^m + L_1 A^{m-1} + \cdots + L_{m-1} A + L_m = 0,$$

und hiernach ergeben sich m Reihen für z. Ist eine solche

$$z = At^a + \cdots + Lt^2 + Mt + N + \frac{P}{t} + \cdots,$$

dann ist

$$(2) \qquad y = e^w x^M (1 + B'x + C'x^2 + \cdots)$$

ein Normalintegral von (1). (Der Verfasser schlägt dafür die Bezeichnung „subregular integral" vor.) Dem Werte $a = 1$ entspricht der Fall des regulären Integrals, dem Werte $a < 1$ der Fall, dass $x = 0$ kein singulärer Punkt ist. Zum Schluss wird das Beispiel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_2 y = 0$$

behandelt, wo p_2 eine ganze Function vierten oder dritten Grades von $\frac{1}{x}$ ist. Im letzteren Falle kommen in w und in der Reihe in Klammern (2) auch gebrochene Exponenten vor. Referent kann nicht umhin zu bemerken, dass, da die Convergenz der Reihe für z nicht in Betracht gezogen ist, die Resultate der Arbeit, auch was die Integrale der speciellen Gleichung betrifft, mit Vorsicht aufzunehmen sind. Hr.

L. Fuchs. Ueber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. Berl. Ber. 279-302.

Hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dz} = \Phi(z, y),$$

so giebt es bekanntlich eine Lösung derselben $y = u$ von der

Beschaffenheit, dass $y = y_0$ für $z = z_0$, und dass sie in der Umgebung von $z = z_0$ eindeutig und stetig ist — falls die Anfangswerte $(z_0 y_0)$ keine Singularität der Function $\Phi(z, y)$ darbieten. Briot und Bouquet stellen nun in ihren bekannten Untersuchungen (J. de l'Ec. Pol. cah. 36 p. 145) die weitere Behauptung auf, dass es ausser $y = u$ kein anderes Integral gebe, welches für $z = z_0$ den Wert $y = y_0$ annehmen könnte. Sie setzen nämlich $y = u + v$, wodurch sich für v die Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{dv}{dz} = \Phi(z, u + v) - \Phi(z, u) = v^m \psi(z, v)$$

ergiebt, und schliessen aus der Form der Gleichung (2), dass, falls $m > 1$, v als Function von z für keinen endlichen Wert z_0 von z den Wert $v = 0$ erreichen könne, und falls $m = 1$, v, um dies zu können, identisch Null sein müsse. Herr Fuchs macht nun darauf aufmerksam, dass dieser Schluss unzulässig ist, wenn in der Betrachtung von z als Function von v in der Gleichung (2) $v = 0$ ein „Punkt der Unbestimmtheit" ist, d. h. z jeden beliebigen Wert, also auch $z = z_0$ annehmen kann, wenn v auf geeigneten Wegen in $v = 0$ einrückt (wohl zu unterscheiden vom Verzweigungspunkt, der aber zugleich auch ein Punkt der Unbestimmtheit sein kann, und zwar mit „bestimmter" oder „unbestimmter" Verzweigung). In diesem Falle giebt es sogar unzählig viele Functionen v von z, welche für $z = z_0$ verschwinden und der Gleichung (2) genügen, also auch unzählig viele Functionen y, die für $z = z_0$ den Wert y_0 annehmen und der Gleichung (1) genügen. Den Gegenstand der vorliegenden Note bildet nun die Untersuchung des Verhaltens der Integrale einer Gleichung von der Form (2), worin z als Function von v betrachtet wird, in der Umgebung von $v = 0$, wodurch zugleich die Frage entschieden wird, ob $v = 0$ ein Punkt der Unbestimmtheit für die Integrale z von (2) ist. Es ergiebt sich, dass dies im allgemeinen der Fall ist, und es werden an einigen Beispielen die Bedingungen dafür abgeleitet, dass besondere Integrale oder auch das allgemeine Integral von (2) in $z = 0$ nicht unbestimmt werden. Hiernach giebt es also im allgemeinen unzählig viele Integrale von (1) mit vorgeschriebenen Anfangs-

bedingungen (y_0, z_0). Folgendes Beispiel sei hier mitgeteilt: Die Gleichung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{a(\alpha z + \beta y)^2 - \alpha(az + by)}{\beta(az + by) - b(\alpha z + \beta y)^2} \qquad (a\beta - b\alpha \lesseqgtr 0)$$

hat, wenn $z = z_0$, $y = -\frac{\alpha}{\beta} z_0$ als Anfangswerte, für welche die rechte Seite den bestimmten Wert $-\frac{\alpha}{\beta}$ annimmt, vorgeschrieben sind, ausser dem Integral $y = -\frac{\alpha}{\beta} z$ die unzählig vielen Integrale $y = -\frac{\alpha}{\beta} z + v$, wo v eine Lösung der Gleichung

$$(\alpha b - \beta a) z = b\beta v - \beta C e^{-\frac{1}{\beta v}}$$

(C eine willkürliche Constante) ist. Man hat nur v in vorstehender Gleichung so gegen Null convergiren zu lassen, dass z den Wert z_0 erhält. Hr.

L. Fuchs. Ueber eine Klasse linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Kronecker J. C. 189-200.

Es seien $f(s, z)$, $\varphi(s, z)$ Functionen des Orts in der durch die irreductible algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ festgelegten Riemann'schen Fläche, welche ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + G(s, z)\frac{dy}{dz} + H(s, z) y = 0$$

bilden. G und H bezeichnen rationale Functionen von s und z. Es handelt sich um die Feststellung, unter welchen Umständen die beiden Gleichungen

$$f(s_1, z_1) dz_1 \pm f(s_2, z_2) dz_2 = 0, \quad \varphi(s_1, z_1) dz_1 \pm \varphi(s_2, z_2) dz_2 = 0,$$

in denen sich die Vorzeichen entsprechen, gleichzeitig durch jedes Punktpaar befriedigt werden, welches durch die Gleichung

$$f(s_1, z_1)\varphi(s_2, z_2) - f(s_2, z_2)\varphi(s_1, z_1) = 0$$

zusammenhängt. Als hierfür notwendige und hinreichende Bedingungen ergeben sich: 1) Ist das Geschlecht p von $F(s, z) = 0$ grösser als Null, so muss die zugehörige Riemann'sche Fläche sich durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution auf

eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche abbilden lassen, so dass

$$z = \psi_1(u, \sqrt{S(u)}), \quad s = \psi_2(u, \sqrt{S(u)}); \quad u = \tilde{\omega}_1(s, z),$$
$$\sqrt{S(u)} = \tilde{\omega}_2(s, z),$$

und zwar muss u^2 eine eindeutige Function des Quotienten ζ zweier ein Fundamentalsystem bildenden Integrale derjenigen Differentialgleichung sein, die aus (1) durch die genannte Substitution hervorgeht. $S(u)$ ist eine ganze rationale Function von u; $\psi_1, \dots, \tilde{\omega}_2$ rationale Functionen ihrer Argumente. Ferner müssen noch von den Coefficienten der Differentialgleichung zwei hier nicht wiederzugebende Gleichungen identisch erfüllt werden, deren Form sich danach richtet, ob u eine einwertige oder zweiwertige Function von ζ ist. 2) Ist $p = 0$, dann muss die durch die rationale Substitution $z = \varepsilon_1(t)$, $s = \varepsilon_2(t)$ aus (1) hervorgehende Differentialgleichung mit in t rationalen Coefficienten die Eigenschaft haben, dass t^2 eine einwertige Function des Quotienten zweier ein Fundamentalsystem bildenden Integrale derselben sei. Ferner müssen, wenn

$$-\tfrac{1}{2}G(s, z)\frac{dz}{dt} = \Omega(t), \quad P(s, z) = \Pi(t), \quad \frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} = \varepsilon_1'(t)$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen erfüllt werden

$$\Omega(t) + \Omega(-t) = \frac{d\lg}{dt}\left(\frac{\varepsilon_1'(-t)}{\varepsilon_1'(t)}\right), \quad \frac{\Pi(-t)}{\Pi(t)} = \left(\frac{\varepsilon_1'(t)}{\varepsilon_1'(-t)}\right)^2.$$

Hr.

L. Sauvage. Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 391-404.

Die in der grundlegenden Abhandlung des Herrn Fuchs (Borchardt J. LXVI. 121 ff.) enthaltenen Principien der Theorie der linearen Differentialgleichungen bezüglich der Form und Existenz der regulären Integrale in der Umgebung singulärer Punkte werden auf das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$(x - x_0)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \dots + a_{in}y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

angewandt, worin die Coefficienten a holomorphe Functionen in

der Umgebung des Punktes x_0 sind. Es wird zunächst gezeigt, dass das System wenigstens eine Lösung hat, deren Elemente

$$(1) \qquad y_1 = (x-x_0)^r \varphi_1, \quad \ldots, \quad y_n = (x-x_0)^r \varphi_n$$

sind, wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende, in der Umgebung von x_0 convergente Reihen bezeichnen r ist eine der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0,$$

wo a_{ik}^0 den Wert von a_{ik} für $x = x_0$ bedeutet. Vermittelst der gewonnenen Lösung (1) wird das vorgelegte System auf ein solches von ähnlicher Gestalt mit $n-1$ unbekannten Functionen zurückgeführt, welches mithin wiederum eine Lösung obiger Beschaffenheit zulässt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens geht hervor, dass das gegebene System n reguläre Lösungen hat, die ein fundamentales System bilden, wobei zu bemerken ist, dass, wie bei den linearen Differentialgleichungen mit einer abhängigen Variabeln, nicht nur Functionen von der Form (1), sondern auch die durch ein- oder mehrfache Integration derselben entstehenden Functionen, in denen in der Regel auch Logarithmen auftreten, als reguläre Ausdrücke gelten. Hr.

É. West. Exposé des méthodes générales en mathématiques. Résolution et intégration des équations. Applications diverses, d'après Hoëné Wronski. Paris. Gauthier-Villars.

G. Peano. Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Torino Atti. XXI. 677-685.

Neuer Beweis für die Existenz der Integrale der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

unter der alleinigen Voraussetzung der Continuität der Function $f(x, y)$. Der Gang ist in den Hauptzügen folgender: Es wird

gezeigt, dass es 1) unendlich viele Functionen y_1 giebt, die für $x = a$ den Wert b annehmen und in dem Intervalle

$$a \dots A \text{ von } x \, (A > a)$$

der Ungleichung

$$\frac{dy_1}{dx} > f(x, y_1)$$

genügen, 2) unendlich viele Functionen y_2 mit demselben Anfangswerte, die in dem gleichen Intervalle $(a \dots A)$ von x der Ungleichung

$$\frac{dy_2}{dx} < f(x, y_2)$$

genügen. Diese Functionen y_1 und y_2 sind so beschaffen, dass für jeden Wert von x in dem Intervalle $(a \dots A)$ stets $y_1 > y_2$ ist. Es existirt daher eine untere Grenze Y_1 für die Werte von y_1 und eine obere Grenze Y_2 für die Werte von y_2, so dass $Y_1 \geqq Y_2$ sein wird. Diese beiden Functionen nun genügen der Differentialgleichung und nehmen für $x = a$ den Wert b an, und alle Functionen y, denen dieselbe Eigenschaft in dem Intervalle $(a \dots A)$ zukommt, sind in den Grenzen zwischen Y_1 und Y_2 enthalten, so dass $Y_1 \geqq y \geqq Y_2$. Weitere Consequenzen lassen sich aus der Continuität von $f(x, y)$ allein nicht ziehen. Nimmt man noch die Voraussetzung hinzu, dass für alle Werte von x zwischen a und A und für alle Werte von y zwischen Y_1 und Y_2 die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ einen angebbaren Wert M nicht übersteigt, dann schliesst man aus

$$\frac{d(Y_1 - Y_2)}{dx} \leqq (Y_1 - Y_2) M,$$

dass die Grösse $e^{-Mx}(Y_1 - Y_2)$ in dem Intervalle $(a \dots A)$ nicht wachsen kann, während sie für $x = a$ gleich Null ist, und da sie andererseits wegen $Y_1 \geqq Y_2$ nicht negativ werden kann, so müssen Y_1 und Y_2 und folglich alle zwischen ihnen enthaltenen Functionen y in dem Intervall $(a \dots A)$ zusammenfallen. Damit ist dann die Existenz eines einzigen Integrals mit dem vorgeschriebenen Anfangswerte bewiesen. Hr.

C. F. E. Björling. Ueber singuläre Punkte der gewöhnlichen algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades. Hoppe Arch. (2) IV. 358-384.

Die Singularitäten der durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung definirten ebenen Curven treten, wenn die Gleichungen vom ersten Grade sind, nur an einzelnen singulären Punkten auf. Die vollständige, mit vielen Beispielen illustrirte Erörterung der Theorie dieser Punkte bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Die Differentialgleichung

$$Xdx+Ydy=0 \quad \text{oder} \quad X+pY=0,$$

wo X und Y ganze Functionen von x und y sind, bestimmt für jeden Punkt (x, y) eine einzige Fortschreitungsrichtung. Eine Ausnahme bilden die Schnittpunkte von $X=0$, $Y=0$, die sogenannten singulären Punkte. Sei der Anfangspunkt $O(x=0, y=0)$ einer derselben, und die Glieder niedrigster Dimension der nach den Potenzen von x und y geordneten Polynome X und Y resp. $A(x, y)$ und $B(x, y)$, beide homogen und vom n^{ten} Grade, so bilde man die homogene Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $Ax+By=0$; als Gleichung für $y:x$ giebt sie $n+1$ Werte von p im Punkte $x=0$, $y=0$, d. h. $n+1$ besondere Ausgangsrichtungen der Integralcurven vom Punkte O aus. O ist also hier ein „$(n+1)$-facher Punkt" allerdings in einem andern als dem üblichen Sinne. Verschwindet $Ax+By$ identisch, dann ist p unbestimmbar und es gehen die Integralcurven in allen Richtungen von O aus. (Beispiel Basispunkt in einem Curvenbüschel.) Nennt man im allgemeinen Falle die $n+1$ Wurzeln obiger Gleichung, die zunächst alle untereinander verschieden angenommen werden, $\varrho_1, \dots, \varrho_{n+1}$, und ergiebt sich durch Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{B(1, z)}{A(1, z)+zB(1, z)} = \sum_1^{n+1} \frac{\beta_i}{z-\varrho_i},$$

so sind je nach den Vorzeichen der reellen Teile (β_i) von β_i zwei Fälle zu unterscheiden: 1) alle (β_i) sind positiv, dann geht nur eine einzige Integralcurve durch O und hat in diesem Punkte $n+1$ Tangenten. (Individueller singulärer Punkt.) 2) einige (β_i) sind negativ, dann geht eine unendliche Anzahl Integral-

curven durch O. (Genereller singulärer Punkt.) Sind $(\beta_1), \ldots, (\beta_m)$ positiv und $(\beta_{m+1}), \ldots, (\beta_{n+1})$ negativ, so berühren die Geraden $y - \varrho_i x = 0$ $(i = m+1, \ldots, n)$ in O alle Integralcurven mit Ausnahme einer einzigen, welche die übrigen Geraden

$$y - \varrho_i x = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

berührt. Die Geraden der ersteren Art werden „generelle", die der zweiten „individuelle Tangenten" genannt. Die Modification, welche eintritt, wenn einige Wurzeln ϱ einander gleich werden, ergiebt sich ohne Schwierigkeit. Eine besondere Behandlung erfordert der Fall, dass A und B einen gemeinsamen linearen Factor haben, welcher, gleich Null gesetzt, dann die gemeinsame Tangente der Curven $X = 0$, $Y = 0$ (Specialtangente) darstellt. Ist y dieser Factor, so erscheint $x = 0$ als eine wesentlich singuläre Stelle für y als Function von x. Die reellen Integralcurven berühren sämtlich die Specialtangente, aber immer nur an der einen Seite des singulären Punktes. Die angewandte Methode besteht darin, dass die gegebene Gleichung nach passender Substitution durch eine andere ersetzt wird, in der nur die Glieder niedrigster Dimension beibehalten werden, und die sich unmittelbar integriren lässt. Die im Vorhergehenden erhaltenen Resultate werden weiterhin graphisch veranschaulicht, indem die Vorzeichen von y' und y'' vermittelst gewisser Ausdrücke bestimmt und die Formen der Integralcurven in der Umgebung des singulären Punktes ermittelt werden. Zur Vergleichung mit den von Herrn Poincaré (Resal J. (3) VII. 386) angewandten Bezeichnungen wird bemerkt, dass dort nur der Fall $n = 1$ behandelt ist, die singulären Punkte also „Doppelpunkte" im oben erklärten Sinne sind. Die „noeuds" und „cols" des Herrn Poincaré sind Doppelpunkte mit reellen Tangenten, die ersteren sind generelle, die letzteren individuelle singuläre Punkte. Die „foyers" sind Doppelpunkte mit imaginären Tangenten, die „centres" ein specieller Fall davon. Hr.

R. Liouville. Sur certaines équations différentielles du premier ordre. C. R. CIII. 476-479.

Die Differentialgleichung

$$y' + a_1 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_3 y + a_4 = 0$$

lässt sich auf Quadraturen zurückführen, wenn die Coefficienten der Gleichung genügen

$$a_1 L' + KL^{\frac{5}{3}} - 3[a_1' + 3(a_2^2 - a_1 a_3)] L = 0,$$

worin

$$L = a_2 a_1' - a_1 a_2' + a_1(a_1 a_4 - a_2 a_3) + 2a_2(a_2^2 - a_1 a_3)$$

und K eine willkürliche Constante bedeutet. Setzt man

$$y = Y' \varphi(x),$$

nachdem man φ passend bestimmt hat, so giebt es für die Gleichung zweiter Ordnung in Y ein allgemeines Integral, worin die willkürlichen Constanten linear auftreten. Hierdurch ist dann y gegeben.

Hr.

R. Rawson. Solution of question 7902. Ed. Times. XLIV. 82-83.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(A_2)^{\frac{1}{2}}\left(1 + B_2 x^2 + \frac{B_2^2 A_4}{A_2^2} x^4\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dy}{dx} + (B_2)^{\frac{1}{2}}(1 + A_2 y^2 + A_4 y^4)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

ist

$$\{CA_2 + B_2 A_4 x^2\} y^2 + 2\{(A_2 B_2)^{\frac{1}{2}}(A_4 + C^2 - CA_2)^{\frac{1}{2}}\} xy + A_2 + CB_2 x^2 = 0.$$

Lp.

H. le Pont. Note de calcul intégral. Teixeira J. VIII. 37-42.

Integration eines Systems von n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit constanten Coefficienten.

Tx. (Hch.)

H. le Pont. Deuxième note de calcul intégral. Teixeira J. VIII. 65-71.

Integration zweier linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Coefficienten Functionen zweier unabhängiger Variabeln sind.

Tx. (Hch.)

J. SACHS. Integration einer Differentialgleichung. Hoppe Arch. (2) III. 330-335.

Die Gleichung

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)\left(x+yy'\right) = \text{Const.}$$

erscheint dem Verfasser besonders dazu geeignet, die mannigfaltigen Hülfsmittel der Integration einer Differentialgleichung zur Anwendung zu bringen. Das mittels fünf verschiedener Methoden erhaltene Integral der obigen Gleichung lautet, wenn die darin vorkommende Constante mit c^2 bezeichnet wird,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \quad (a \text{ die willk. Const.})$$

Hr.

W. HEYMANN. Berichtigung. Schlömilch Z. XXXI. 127-128.

In der auf die Differentialgleichung

$$x\varphi(y')+y\psi(y')+(xy'-y)^m\chi(y') = 0$$

bezüglichen Note in Schlömilch Z. XXIV. p. 254 (s. F. d. M. IX. 1879 p. 225) hat der Verfasser von der Gleichung

$$x+y-(xy'-y)^m$$

ein falsches Integral angegeben. Das richtige lautet

$$x^{\frac{1-m}{m}}\{(x+y)^{\frac{m-1}{m}}+1\} = \text{const.}$$

Das falsche Resultat ist dadurch entstanden, dass die Elimination von $y'=u$ in anderer Weise vollzogen ist, als im allgemeinen Falle bestimmt ist. Infolge dessen fallen auch die früheren Bemerkungen über die Auflösbarkeit des Integrals nach der Constanten, sowie über den integrirenden Factor fort.

Hr.

E. JAGGI. Sur les équations différentielles linéaires sans second membre. Nouv. Ann. (3) V. 83-85, 86-88.

Die erste Note enthält eine Ableitung der linearen Differentialgleichung, der das Product zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung genügt. In der zweiten wird

eine Methode gegeben zur Bildung der Gleichung, die zum Integrale

$$u = \frac{y_1 y_2 \cdots y_n}{y_{n+1} y_{n+2} \cdots y_{n+p}}$$

hat, wo $y_1, \dots, y_{n+p}$ Integrale der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung bedeuten. u genügt einer nicht linearen Differentialgleichung von der Ordnung

$$\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{1.2\dots n} + \frac{m(m+1)\dots(m+p-1)}{1.2\dots p} - 1.$$

Hr.

L. Heffter. Zur Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diss. Berlin. 42 S.

Vorliegende Arbeit hat zum Gegenstande, die Ausdehnung gewisser die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe auszeichnenden Eigenschaften auf jede beliebige zur Fuchs'schen Klasse (vgl. Borchardt J. LXVI. 146) gehörige Differentialgleichung zweiter Ordnung darzuthun. Insbesondere gelingt es dem Verfasser, durch Einführung von passenden Parametern an Stelle der in der Differentialgleichung auftretenden Constanten zu bewirken, dass aus einem Integral ein zweites durch einfache Veränderung jener Parameter hergestellt werden kann. Für den Fall von drei endlichen singulären Punkten hat bereits Herr Seifert in seiner Inauguraldissertation (Göttingen 1875, s. F. d. M. VII. 186) ein dahin zielendes Verfahren eingeschlagen, welches hier auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ϱ singulären Punkten $a_1, \dots, a_\varrho$ angewandt wird. Jede solche Differentialgleichung, sofern sie zur erwähnten Klasse gehört, lässt sich nach einer von Herrn Fuchs in seinen Vorlesungen angegebenen Transformation auf die einfachere Form bringen

$$\psi(z)\frac{d^2y}{dz^2} + A(z)\frac{dy}{dz} + B(z)y = 0,$$

$$\psi(z) = \Pi(z-a_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, \varrho),$$

wo A und B ganze Functionen von z sind, resp. vom Grade $\varrho-1$ und $\varrho-2$. Eine der beiden Wurzeln der zu irgend einem sin-

gulären Punkt $z = a_i$ gehörigen determinirenden Gleichung ist dann immer gleich 0, ein Integral des zugeordneten Fundamentalsystems hat daher die Form

$$(1) \qquad y = \sum_{k=0}^{k=\infty} c_k^i (z-a_i)^k.$$

Setzt man nun

$$\frac{\psi^{(\lambda)}(a_i)}{\lambda!} = p_{\lambda-1}^i \; (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho), \qquad \frac{A(a_i)}{\psi'(a_i)} = \frac{A(a_i)}{p_0} = \gamma^i,$$

so dass $1-\gamma^i$ die andere Wurzel der determinirenden Gleichung ist, dann kann die Recursionsformel zur Bestimmung der c_k^i auf die Form gebracht werden

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda^i (k+\alpha_\lambda^i)(k+\beta_\lambda^i) c_{k-\lambda+1}^i = 0,$$

wo die Grössen α_λ^i, β_λ^i durch die Gleichungen definirt sind:

$$\alpha_\lambda^i + \beta_\lambda^i = \frac{A^{(\lambda)}(a_i)}{p_\lambda^i \cdot \lambda!} - 2\lambda + 1,$$

$$\alpha_\lambda^i \beta_\lambda^i = \frac{1}{p_\lambda^i} \left\{ \frac{B^{(\lambda-1)}(a_i)}{(\lambda-1)!} - (\lambda-1) \frac{A^{(\lambda)}(a_i)}{\lambda!} \right\} + \lambda(\lambda-1);$$

hierbei ist eine der Grössen α_0, β_0 gleich 1, mithin die andere gleich γ^i zu setzen. In den neuen Parametern nimmt dann die Differentialgleichung, mit Weglassung des oberen Index i die Form an:

$$(2) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (z-a_i)^{\lambda+1} \frac{d^2y}{dz^2}$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (\alpha_\lambda + \beta_\lambda + 2\lambda - 1)(z-a_i)^\lambda \frac{dy}{dz}$$
$$+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varrho-1} p_\lambda (\alpha_\lambda + \lambda - 1)(\beta_\lambda + \lambda - 1)(z-a_i)^{\lambda-1} y = 0,$$

die für $\varrho = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ unmittelbar in die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe übergeht. Ist γ weder Null noch eine ganze Zahl, so stellt die Reihe (1) das zur Wurzel 0 gehörige Element dar und kann durch

$$y_{i1} = \Phi(p_0, \ldots, p_{\varrho-1}, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_{\varrho-1}, \beta_{\varrho-1}, \gamma;\; z-a_i)$$

bezeichnet werden. Um das andere, zu $1-\gamma$ gehörige, Element zu erhalten, substituirt man $y = (z-a_i)^{1-\gamma} u$, und da die Differentialgleichung für u dieselbe Form wie (2), nur mit veränder-

ten Parametern annimmt, erhält man unmittelbar

$$y_{i2} = (z-a_i)^{1-\gamma}\,\Phi(p_0,\ldots,p_{\varrho-1},\alpha_1+1-\gamma,\beta_1+1-\gamma,\ldots,\alpha_{\varrho-1}+1-\gamma,\\ \beta_{\varrho-1}+1-\gamma,2-\gamma;z-a_i).$$

Für die c_k ergiebt sich eine independente Darstellung in der Form eines Bruches,

$$c_{n+1} = \frac{\varDelta}{p_0^{n+1}(n+1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

dessen Zähler eine Determinante ist, die für $\varrho=3$ in die Kettenbruchdeterminante übergeht und für $\varrho>3$ zu denjenigen gehört, die Herrn Fürstenau zu einer Verallgemeinerung der Kettenbrüche geführt haben. (Pr. Wiesbaden 1874, s. F. d. M. VI. 133.) Die Modificationen, welche eintreten, wenn γ eine ganze Zahl oder Null ist, werden für alle in Betracht kommenden Fälle angegeben und für die entsprechenden Fundamentalsysteme, desgleichen für die in der Umgebung von $z=\infty$ gültigen, die fertigen Formeln aufgestellt. Es folgt die Entwickelung der homogenen linearen Relationen, welche die Elemente eines Fundamentalsystems mit denen eines anderen verknüpfen, unter Anwendung des von Herrn Fuchs im Bd. LXXV des Borchardt'schen Journals auseinandergesetzten Verfahrens. Der letzte Abschnitt (No. VI) beschäftigt sich mit bemerkenswerten, der Gauss'schen Reihe analogen Eigenschaften der Reihe $\Phi(\alpha_\lambda,\beta_\lambda)$, womit das obige Φ kurz bezeichnet werden möge. Als r^{te} contigue Function derselben wird die Reihe $\Phi_r(\alpha_\lambda+r,\beta_\lambda+r)$ bezeichnet. (r eine positive ganze Zahl.) Zwischen $\varrho+1$ derselben wird eine homogene Relation hergeleitet. Eine mit ihnen in nahem Zusammenhange stehende zweite Art contiguer Functionen führt zu einer zwischen diesen und ihren Ableitungen bestehenden Relation, die als eine Verallgemeinerung der für die hypergeometrischen Reihen geltenden Formel

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$

zu betrachten ist. Hierbei erscheint die vorgelegte Differentialgleichung zweiter Ordnung mit ϱ singulären Punkten als Specialfall einer solchen der ϱ^{ten} Ordnung mit denselben singulären Punkten und von demselben Charakter. Hr.

Th. Craig. On a linear differential equation of the second order. Newcomb Am. J. VIII. 180-195.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den singulären Punkten $x=0$, $x=1$, $x=-1$ und von der allgemeinen Form, die sie nach dem Fuchs'schen Theorem haben muss, damit ihre Integrale überall regulär sind, wird betreffs ihres Verhaltens in der Umgebung der singulären Punkte untersucht und die daselbst gültigen Reihen entwickelt. Die Methode enthält nichts Bemerkenswertes, da sie eine einfache Ausführung der Vorschriften des Herrn Fuchs ist, der übrigens mit keinem Wort citirt wird. Auch sei noch darauf hingewiesen, dass Herr Seifert in seiner Inauguraldissertation 1875 (s. F. d. M. VII. 186) denselben Gegenstand weit eindringender und, was die Mannigfaltigkeit der sich darbietenden Probleme betrifft, in abschliessender Vollständigkeit behandelt hat. Hr.

D. Besso. Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del second' ordine e sull' equazione del quinto grado. Rom. Acc. L. Rend. II_1. 593-597.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass die Gleichung

$$(x-\beta_1)^2(x-\beta_2)^2(x-\beta_3)^2y''+(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\cdot(ax^2+bx+c)y' \\ +(fx^4+gx^3+hx^2+kx+l)y=0,$$

wenn $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ungleich sind und die beiden Relationen

$$4f+2a-a^2=0,\quad 2g+2b-ab=0$$

bestehen, auf eine hypergeometrische Gleichung zurückgeführt werden kann. Nun genügen die Wurzeln der Gleichung

$$(1)\qquad y^5+y^2-x=0$$

einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Integrale nach geeigneter Transformation durch die Producte der Lösungen zweier linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung obiger Beschaffenheit dargestellt werden können. Die Auflösung der Gleichung (1), auf die bekanntlich die allgemeine Gleichung fünften Grades mittels Wurzelgrössen zurückgeführt werden kann, lässt sich demnach durch hypergeometrische Reihen bewerkstelligen. Hr.

P. SCHAFHEITLIN. Ueber eine gewisse Klasse linearer Differentialgleichungen. Diss. Halle a. S. 1885. 43 S.

Die betrachtete Klasse von Differentialgleichungen enthält eine interessante Verallgemeinerung der hypergeometrischen Differentialgleichung, welcher die Form

$$(x-k_1)(x-k_2)\frac{d^2y}{dx^2} + \{(\alpha+\beta+1)x-\gamma(k_1+k_2)\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y = 0$$

gegeben wird. Zwei wesentliche Eigenschaften dieser „Normalform" sind, 1) dass die Coefficienten von y' und y sich in zwei Gruppen (γ und α, β) derart sondern, dass die Elemente einer Gruppe miteinander vertauschbar sind, 2) dass $dy:dx$ eine Lösung derjenigen Differentialgleichung ist, die aus der obigen hervorgeht, indem an Stelle von α, β, γ resp. $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$ treten. Diese Eigenschaften dienen als Leitfaden zur Aufstellung einer ähnlichen Normalform für Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung. Der Coefficient von $y^{(n)}$ sei

$$(x-k_1)(x-k_2)\dots(x-k_n),$$

die in den anderen Coefficienten auftretenden Grössen zerfallen in der Normalform in n Gruppen von der Beschaffenheit, dass die ν^{te} Gruppe aus ν Elementen

$$\alpha_{\nu 1},\ \alpha_{\nu 2},\ \dots,\ \alpha_{\nu\nu}$$

besteht, die beliebig mit einander vertauscht werden können. Treten an Stelle der Elemente α die Elemente $\alpha+1$, so wird die neue Gleichung durch $\frac{dy}{dx}$ befriedigt. Da die Aufstellung dieser Gleichung für ein beliebiges n zum Verständnis der darin vorkommenden Bezeichnungen Erörterungen nötig machen würde, die den hier verstatteten Raum weit überschreiten würden, so begnügen wir uns hier mit der nachstehenden Wiedergabe der Gleichung für $n=3$:

$$(x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)y'''+\{(\mathfrak{A}_{3,1}+3)x^2-(\mathfrak{A}_{2,1}+1)\mathfrak{K}_1x+\mathfrak{A}_{1,1}\mathfrak{K}_2\}y'' + \{(\mathfrak{A}_{3,2}+\mathfrak{A}_{3,1}+1)x-\mathfrak{A}_{2,2}\mathfrak{K}_1\}y'+\mathfrak{A}_{3,3}y = 0.$$

$\mathfrak{K}_\mu$ bedeutet die elementare symmetrische Function μ^{ter} Dimension der Grössen k_1, k_2, k_3; $\mathfrak{A}_{\mu,\mu'}$ die elementare symmetrische

Function $(\mu')^{\text{ter}}$ Dimension der Elemente $\alpha_{\mu 1}, \ldots, \alpha_{\mu,\mu}$. Die Anzahl der letzteren ist hier 6, bestehend aus den drei Gruppen:

$$\alpha_{11};\quad \alpha_{21}, \alpha_{22};\quad \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}.$$

Sonach ist $\alpha_{11} = \mathfrak{A}_{1,1}$, α_{21} und α_{22} sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - \mathfrak{A}_{21} x + \mathfrak{A}_{22} = 0$$

und die Elemente der dritten Gruppe die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - \mathfrak{A}_{31} x^2 + \mathfrak{A}_{32} x - \mathfrak{A}_{33} = 0.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Elemente $\alpha_{\nu,\lambda}$ in der Normalform für die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, worin die Grössen $\alpha_{\nu,\lambda}$ auftreten, als Wurzeln einer Gleichung ν^{ten} Grades, deren Coefficienten die Grössen $(-1)^{\lambda}\mathfrak{A}_{\nu,\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, \nu)$ sind. Auch die anderen für die hypergeometrische Differentialgleichung charakteristischen Eigenschaften erscheinen in der Normalform für die Gleichungen n^{ter} Ordnung in einer verallgemeinerten Gestalt. So lautet die Recursionsformel für die Coefficienten der Lösung

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} a_{\lambda} x^{\lambda},$$

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^{\nu}(\lambda+\nu)(\lambda+\nu-1)\ldots(\lambda+1)(\alpha_{n-\nu,1}+\lambda)$$
$$\times(\alpha_{n-\nu,2}+\lambda)\ldots(\alpha_{n-\nu,n-\nu}+\lambda)\mathfrak{K}_{\nu} a_{\lambda+\nu} = 0,$$

woraus die Bedingungen für die Reduction auf eine Gleichung niederer Ordnung, ferner für die Unabhängigkeit der in Potenzreihen entwickelbaren Lösungen von einzelnen Elementen und endlich dafür, dass eine oder mehrere Lösungen ganze Functionen sind, sich unmittelbar ableiten lassen. Wichtig ist nun der Nachweis, dass jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung von der Beschaffenheit, dass der Coefficient der p^{ten} Ableitung eine ganze Function p^{ten} Grades ist, sich auf die Normalform zurückführen lässt, und zwar drücken sich die Grössen $\mathfrak{A}$ linear durch die Constanten der betrachteten Differentialgleichung aus. Die beiden letzten Abschnitte beschäftigen sich mit weiteren Untersuchungen über den Charakter der Integrale der behandelten Differentialgleichungen, unter specieller Berücksichtigung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Hr.

E. CATALAN. Sur une classe d'équations différentielles. Belg. Bull. XII. 17-25.

Die Differentialgleichung:

$$y''(1-x^2)x+(1-x^2)y'+xy = 0$$

besitzt das allgemeine Integral:

$$y = \left(\lambda\int\frac{dx}{x[E(x)]^2}+\mu\right)E(x);\quad E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man $y\sqrt{x} = z$, $\sqrt{x}\,.\,E(z) = X$, so wird sie:

$$z'':z = X'':X,$$

wovon $z = X$ unmittelbar ein Integral ist. Diese letztere Gleichung kann man daher leicht integriren. Ebenso verhält es sich mit der allgemeineren Gleichung:

$$X^2z''+kXX'z'-[XX''+kX'^2]z = 0.$$

Mn. (Lp.)

W. H. BLYTHE, R. RAWSON, A. R. FORSYTH. Solution of question 8417. Ed. Times XLV. 78-81.

Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dw}{dx}+\left(\frac{2}{x^2}-n^2\right)w = 0$$

nach Methoden, wie sie in Forsyth's „Differential equations" gelehrt werden, einem Werke, über das Sylvester's Ausspruch von Herrn Rawson angeführt wird: „Nach meiner Meinung das best geschriebene mathematische Buch, das in englischer Sprache vorhanden ist". Lp.

E. A. STENBERG. Den Hermite'ska differential-eqvationen af andra ordningen. Acta Soc. Fenn. XVI.

Diese Arbeit enthält eine vollständige Untersuchung sämtlicher Fälle der Hermite'schen Differentialgleichung mit Benutzung der von Weierstrass eingeführten doppeltperiodischen Functionen $\wp x$ und $\wp' x$. S.

W. WOOLSEY JOHNSON. On a point connected with symbolic methods of integration. Mess. XVI. 86-90.

Die Sache wird am leichtesten durch ein Beispiel erläutert. Man betrachte die Differentialgleichung $(D^2+1)y = x\sin x$. Die complementäre Function ist $A\cos x + B\sin x$. Um ein particuläres Integral zu erhalten, berücksichtige man:

$$y = \frac{1}{D^2+1}\,x\sin x = x\,\frac{1}{D^2+1}\sin x - \frac{2D}{(D^2+1)^2}\sin x.$$

Nun ist $-\frac{1}{2}x\cos x$ der einfachste Wert von $\frac{1}{D^2+1}\sin x$, und $-\frac{1}{8}x^2\sin x$ derjenige von $\frac{1}{(D^2+1)^2}\sin x$. Aber

$$y = -\tfrac{1}{2}x\cos x + \tfrac{1}{4}D(x^2\sin x) = -\tfrac{1}{4}x^2\cos x + \tfrac{1}{2}x\sin x$$

befriedigt die Differentialgleichung nicht. Die Erklärung liegt darin, dass bei der Gewinnung des Wertes von $\frac{1}{D^2+1}x\sin x$ vermittelst eines Verfahrens, welches den Nenner $(D^2+1)^2$ einführt, das so abgeleitete Resultat von dem wahren Werte abweichen kann um ein Glied in der complementären Function der Gleichung $(D^2+1)^2 y = X$, nämlich um Glieder von der Form $x\sin x$ oder $x\cos x$. Glr. (Lp.)

E. Kummer. De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis. Kronecker J. C. 1-9.

Dieser Aufsatz ist ein Abdruck aus dem Programm des Gymnasiums in Liegnitz vom Jahre 1834. Er enthält bereits die wesentlichen Grundlagen der berühmten Abhandlung des Verfassers über die hypergeometrische Reihe im 15[ten] Bande des Crelle'schen Journals. In Verallgemeinerung der von Jacobi aufgestellten Differentialgleichung dritter Ordnung, der alle Modulargleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen genügen, betrachtet der Verfasser die Gleichung

$$(1)\qquad 2\frac{d^3z}{dz\,dx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 - Z\frac{dz^2}{dx^2} + X = 0,$$

worin Z und X beliebige Functionen der Variabeln resp. z und x bezeichnen. Zunächst wird gezeigt, dass die Integration von (1) auf die zweier linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{d^2v}{dz^2} + P\frac{dv}{dz} + Qv = 0$$

zurückgeführt werden kann, wo p und P beliebige Functionen von resp. x und z sein können, q und Q aber durch die Gleichungen

$$q = \tfrac{1}{4}\left(2\frac{dp}{dx} + p^2 - X\right), \quad Q = \tfrac{1}{4}\left(2\frac{dP}{dz} + P^2 - Z\right)$$

bestimmt sind. Bezeichnen $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei particuläre Integrale von (2), $\psi(z)$ und $\psi_1(z)$ ebensolche von (3), so lautet das allgemeine Integral von (1)

$$\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = \frac{A\varphi(x) + B\varphi_1(x)}{C\varphi(x) + D\varphi_1(x)}.$$

Zugleich existirt die Beziehung

$$y = wv, \quad \text{wo} \quad w^2 = ce^{\int Pdz}e^{-\int pdx}\frac{dx}{dz}.$$

Es folgen zwei Anwendungen. In der ersten ist

$$X = -\left(\frac{(1+x)^2}{x(1-x^2)}\right)^2, \quad Z = -\left(\frac{1+z^2}{z(1-z^2)}\right)^2.$$

In diesem Falle sind $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung mit den resp. Moduln x und $\sqrt{1-x^2}$, und $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ dieselben Ausdrücke in den transformirten Moduln z, $\sqrt{1-z^2}$. w ist der Multiplicator der Transformation, und zwar findet sich

$$w^2 = c\,\frac{z(1-z^2)}{x(1-x^2)}\,\frac{dx}{dz}.$$

In der zweiten Anwendung ist

$$X = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2(1-x)^2}, \quad Z = \frac{A'z^2 + B'z + C'}{z^2(1-z)^2}.$$

Hier werden die Hülfsgleichungen (2) und (3) Differentialgleichungen, denen die hypergeometrischen Reihen genügen, und die Integration von (1) kann demnach mittels dieser Reihen bewerkstelligt werden. Zum Schluss werden specielle Fälle hiervon behandelt, in denen die Gleichung (1) unendlich viele algebraische Integrale hat. Hr.

E. Goursat. Sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer. C. R. CIII. 993-996.

Herr Papperitz hat in seiner Habilitationsschrift (Leipzig 1886) als Bedingung für die Existenz algebraischer Integrale der Kummer'schen Gleichung ein System arithmetischer Gleichungen aufgestellt, welches in dem besondern Falle rationaler Integrale mit dem System übereinstimmt, welches Herr Goursat in Klein Ann. XXIV. p. 445ff. (s. F. d. M. XVI. 1884. 269) angegeben hat. Es fragt sich nun, ob jedem Systeme von Lösungen der Gleichungen des Herrn Papperitz im allgemeinen ein algebraisches Integral der Kummer'schen Gleichung entspricht, wie dies im Falle rationaler Integrale statthat. Der Verfasser weist nach, dass dies nicht der Fall ist, und bemerkt, dass er in einer demnächst erscheinenden Abhandlung Mittel angeben werde, durch eine endliche Anzahl von Versuchen zu entscheiden, ob eine Lösung der erwähnten Gleichungen ein algebraisches Integral der Kummer'schen Gleichung liefert. Hr.

A. Cayley. On the invariants of a linear differential equation. Quart. J. XXI. 257-261.

Zusammenstellung der bekannten invarianten Functionen, die man aus den Coefficienten der linearen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung bilden kann. Es wird bemerkt, dass die „Differentialinvariante" des Herrn Halphen

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y'''}{y''}\right)'' - \frac{2}{3}\frac{y'''}{y''}\left(\frac{y'''}{y''}\right)' + \frac{4}{27}\left(\frac{y'''}{y''}\right)^3,$$

deren Verschwinden anzeigt, dass x, y die Coordinaten eines beliebigen Kegelschnitts sind, in engem Zusammenhang steht mit der Invariante

$$p'' - 3(q' - 2pp') + 2(r - 3pq + 2p^3)$$

der Differentialgleichung

$$y''' + 3py'' + 3qy' + r = 0,$$

indem aus ihr die Differentialinvariante hervorgeht, wenn

$$p = -\frac{1}{3}\frac{y'''}{y''}, \quad q = 0, \quad r = 0$$

gesetzt wird. Hr.

J. C. Fields. Symbolic finite solutions by definite integrals of the equation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$. Newcomb Am. J. VIII. 367-388.

Die Lösung vorstehender Gleichung in symbolischer Form wird zunächst für $n = 3$ in folgender Weise hergestellt. Die directe Entwickelung nach Potenzen von x giebt, wenn man

$$\alpha = m+3, \quad \nu_1 = -\frac{1}{\alpha}, \quad \nu_2 = -\frac{2}{\alpha}$$

setzt,

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{-3n} x^{n\alpha}}{n!(1+\nu_1)\cdots(n+\nu_1)(1+\nu_2)\cdots(n+\nu_2)}.$$

Führt man nun das Symbol ein

$$\Delta = \left(\frac{d}{dz}\right)^{-1}, \text{ so dass } \Delta^n z^m = \frac{z^{m+n}}{(1+m)\cdots(n+m)},$$

so erhält man, wenn noch $\alpha^{-3}x^\alpha = z$ gesetzt wird,

$$(1) \quad y = \sum \frac{z^{-\nu_2}\Delta^n z^{\nu_2}}{n!(1+\nu_1)\cdots(n+\nu_1)} = z^{-\nu_2}\Delta^{-\nu_1} \sum \frac{\left(\frac{d}{d\Delta}\right)^{-n}}{n!} \Delta^{\nu_1} z^{\nu_2}$$

$$= z^{-\nu_2}\Delta^{-\nu_1} e^{\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{-1}} \Delta^{\nu_1} z^{\nu_2},$$

wo das Symbol $\Delta^{-\nu_1} e^{\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{-1}} \Delta^{\nu_1}$ auf z^{ν_2} angewendet zu denken ist. Mit Hülfe der Eigenschaften dieses Symbols wird gezeigt, dass, wenn der Wert der rechten Seite von (1) für irgend welche gegebenen Werte von ν_1 und ν_2 bekannt und endlich ist, er es auch für alle Werte von ν_1 und ν_2 ist, die von den gegebenen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Sind z. B. die neuen Werte $\nu_1 - i$, $\nu_2 - k$, so hat man nur auf die bekannte den Werten ν_1, ν_2 entsprechende Function die Operation

$$z^{i-\nu_1}\left(\frac{d}{dz}\right)^i z^{\nu_1-\nu_2+k}\left(\frac{d}{dz}\right)^k z^{\nu_2}$$

anzuwenden, um die den neuen Werten entsprechende Function zu erhalten. Nun ist y bekannt für $m = 0$, also $\nu_1 = -\frac{1}{3}$, $\nu_2 = -\frac{2}{3}$ oder $\nu_1 = -\frac{2}{3}$, $\nu_2 = -\frac{1}{3}$. Im ersten Falle muss sein

$$-\tfrac{1}{3} - i = -\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{m+3}, \quad -\tfrac{2}{3} - k = -\frac{2}{\alpha};$$

hieraus ergiebt sich $m = \frac{-9i}{3i+1}$. Ebenso ergiebt sich im zweiten Falle $m = \frac{-3(3i+1)}{3i+2}$. Für diese beiden Werte von m, unter i eine beliebige ganze Zahl verstanden, ist also die vorgelegte Differentialgleichung für $n = 3$ in endlicher Form lösbar. Der obige Algorithmus wird nun auf jede beliebige Ordnung der Differentialgleichung ausgedehnt und führt mit Berücksichtigung des Umstandes, dass ihr Integral für $m = 0$ bekannt ist, zu dem Resultat, dass sie für alle Werte von

$$m = \frac{-n(ni+k-1)}{ni+k},$$

wo k eine ganze Zahl $< n$ und prim zu n, ferner i eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist, in endlicher Form integrirt werden kann. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung der vorgelegten Gleichung durch bestimmte Integrale. Die von den Herren Kummer (Crelle J. Bd. 19) und Spitzer (Borch. J. Bd. 57) gegebenen bestimmten Integrale werden unter eine andere Form gebracht. Ist nämlich $\psi(x)$ die allgemeine Lösung von $\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} = bx^{m-1}z$, so kann die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = ax^m \quad \text{durch} \quad y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{b}{a}\frac{u^{m+n}}{m+n}} \psi(xu)\,du$$

ausgedrückt werden, wobei zwischen den $n+1$ willkürlichen Constanten in $\psi(x)$ eine gewisse Relation besteht. Während bei der Kummer'schen Lösung m und $m+n$ positiv und bei der Spitzer'schen diese Grössen negativ sind, in beiden aber n positiv vorausgesetzt ist, ist bei der obigen Lösung nur Bedingung, dass $m+n$ und m von gleichem Vorzeichen sind und $\frac{b}{a}$ positiv oder negativ, je nachdem dieses Vorzeichen plus oder minus ist. $\frac{d^{-n}y}{dx^{-n}} = x^m y$ ist als $y = \frac{d^n(x^m y)}{dx^n}$ zu interpretiren. Ausgehend von Gleichungen der fraglichen Form, deren Lösung bekannt ist, erhält man Lösungen der Gleichung für jeden reellen Wert

von m, ausgedrückt durch bestimmte Integrale unter mannichfachen Formen. Hr.

P. S. Florow. Ueber die Gleichung $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m . u$. Chark. Ges. 1885. II. 131-154. (Russisch.)

Wenn es möglich ist, die Gleichung in der Form

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha+\frac{\alpha}{\beta}} u$$

darzustellen, wo α und β ganze Zahlen sind, so nennt der Verfasser die Zahl α die Ordnung und die Zahl β die Charakteristik der Gleichung und beweist, dass die gegebene Gleichung sich auf die Gleichung

$$\frac{d^\nu u}{d\xi^\nu} = \xi^{-\nu+1} u$$

reducirt, wo ν der grösste gemeinschaftliche Teiler von α und β ist. Am Schlusse sind die Integrale der Gleichung

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = x^{-\alpha+\frac{\alpha}{\beta}} u$$

durch unendliche Reihen und durch Derivirte mit willkürlichem Index zwischen bestimmten Grenzen ausgedrückt. Wi.

W. Heymann. Ueber die Integration der Differentialgleichung $\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + A_m \frac{d^m y}{d(lx)^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{d(lx)^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{dlx} + A_0 y = 0$ mit Anwendung auf die Theorie der trinomischen Gleichungen. Klein Ann. XXVI. 534-545.

Die Wurzeln der trinomischen Gleichung

$$y^n - ny - (n-1)x = 0$$

genügen einer linearen Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von der in der Ueberschrift gegebenen Form. Diese wird in der allgemeinen Gestalt durch bestimmte Integrale, die bereits Herr Spitzer im dritten Band der Klein'schen Annalen angegeben hat, integrirt, und der Nachweis geliefert, dass diese Integrale thatsächlich der Differentialgleichung genügen. In einem folgen-

den Abschnitt werden jene Integrale in Reihen entwickelt und diese auf ihre Convergenz untersucht. Durch passende Specialisirung der Constanten des allgemeinen Integrals wird dasselbe mit dem algebraischen Integral, das in der trinomischen Gleichung gegeben ist, zur Coincidenz gebracht und dadurch die Auflösung dieser Gleichung in transcendenter Form durch bestimmte Integrale oder durch Reihen gewonnen. Citirte Literatur: Harley „On the theory of the transcendental solution of algebraic equations" (Quart. J. V) und daran angefügte Bemerkungen von Cayley und Boole. Hr.

G. Eneström. Bevis för satsen, att den fullständiga integralen till en differenseqvation af n^{te} ordningen innehåller n arbiträra konstanter. Stockh. Öfv. XLIII. 247-251.

Boole hat in seinem „Treatise on the calculus of finite differences" einen Beweis gegeben für den Satz, dass das vollständige Integral einer Differenzengleichung n^{ten} Grades n willkürliche Constanten enthält. Das Integral u_x. wird von ihm durch eine Reihe dargestellt, deren Terme Functionen des Index x sind; diese Reihe wird von Boole als endlich angenommen, obgleich sie für alle negativen x, die numerisch grösser als n sind, unendlich wird. Da die Convergenz dieser unendlichen Reihe nicht im allgemeinen bewiesen werden kann, so muss hier eine andere Methode gewählt werden, deren Auseinandersetzung den Inhalt der Note bildet. Der Verfasser macht zuletzt darauf aufmerksam, dass der Beweis leichter ausgeführt werden kann, wenn man statt der von Boole angenommenen Form der Differenzengleichung:

$$\Delta^n u_x = f(x, u_x, \Delta u_x, \ldots, \Delta^{n-1} u_x)$$

die folgende:

$$F(x, u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+n}) = 0$$

wählt. E.

P. S. Florow. Notiz über die particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung. Chark. Ges. I. 31-52. (Russisch.)

Wenn man mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ die particulären Integrale der Gleichung

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \varphi(x^2)u$$

bezeichnet und

$$\omega(x) = |u_k^{(i)}| \quad \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, 2n \\ i = 0, 1, \ldots, 2n-1 \end{matrix}\right),$$

so ist auch $\omega(-x)$ ein particuläres Integral der betrachteten Gleichung. Wi.

G. Morera. Ueber die Integration der vollständigen Differentiale. Klein Ann. XXVII. 403-411.

Der von Herrn Mayer (Klein Ann. V. 448. Vgl. F. d. M. IV. 1872. 162) entwickelte Satz, dass die Integration eines unbeschränkt integrablen Systems von linearen totalen Differentialgleichungen auf die Integration eines Systems von ebensovielen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann, wird hier mittels Betrachtungen eines einfach zusammenhängenden n-dimensionalen Gebiets unter Anwendung des Riemann'schen Princips abgeleitet. Den Ausgangspunkt bildet folgende Integralformel. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ n reellwertige Functionen der unabhängigen reellen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, die in einem gewissen n-dimensionalen Gebiet (Monodromgebiet) eindeutig und stetig sind und erste Differentialquotienten besitzen. Im Monodromgebiet betrachte man ein zweidimensionales stetiges Grössengebiet (Flächenstück) Σ. In diesem können die x als eindeutige und stetige Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen p, q aufgestellt werden. Dann erhält man

$$\iint\limits_{\Sigma} \sum_i \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial p} & \frac{\partial x_i}{\partial q} \\ \frac{\partial x_k}{\partial x_p} & \frac{\partial x_k}{\partial x_q} \end{vmatrix} dp\,dq = -\int \sum_i X_i dx_i,$$

wo rechts das Integral über den ganzen Rand des Flächenstücks zu erstrecken ist. Ist nun $\sum_i X_i dx_i$ ein genaues Differential, so

sind die Bedingungen

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0$$

erfüllt, und die obige Gleichung sagt aus, dass der Wert des Integrals

$$\int_{x_i^{(0)}}^{x_i^{(1)}} \Sigma X_i \, dx_i ,$$

zwischen den beiden Wertsystemen $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ und $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ erstreckt, unabhängig von der Wertfolge (dem Integrationsweg) innerhalb des Monodromgebietes ist. Man kann daher einen beliebigen Weg wählen, also z. B. setzen

$$x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)})t$$

und hat dann nur nach dem einzigen Parameter t zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integriren. Es sei jetzt ein System

$$(1) \qquad dy_1 = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^{(1)} dx_i, \quad \ldots, \quad dy_m = \sum_{i=1}^{i=n} X_i^{(m)} dx_i$$

gegeben, wo die $X_i^{(k)}$ in einem $(n+m)$-dimensionalen Wertgebiet der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ eindeutig und stetig und die Ableitungen $\frac{\partial X_i^{(k)}}{\partial y_l}$ endlich sind, so wird, in der Voraussetzung, dass die Functionen $X_i^{(k)}$ den Integrabilitätsbedingungen genügen, das Problem der Integration des Systems aufgefasst als eine gleichzeitige Ausführung von m gewöhnlichen Integrationen

$$(2) \qquad \int_{x_i^{(0)}} \Sigma X_i^{(k)} dx_i \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

in denen man die unter dem Integralzeichen vorkommenden unbekannten Functionen y als durch das System (1) und die Anfangswerte $y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}$ bestimmt ansieht. Es bleibt hier noch festzustellen, dass unter den angegebenen Voraussetzungen ein n-dimensionales Gebiet der x existirt, in welchem die eben definirten Functionen y eindeutig und stetig bleiben. Dies geschieht mit Hülfe von Betrachtungen, die Herr Lipschitz für den Existenzbeweis der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt hat. Innerhalb dieses Monodromge-

bietes sind, da die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, auch hier die Werte der Integrale (2) vom Integrationsweg unabhängig. Wählt man nun einen solchen aus, dann sind die x_i Functionen eines einzigen Parameters, und das System (1) geht in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen über. Hr.

R. Liouville. Sur quelques équations différentielles non linéaires. C. R. CIII. 457-460.

Die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y''+y'^{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial y}-y'\frac{\partial\log\alpha}{\partial x}=0$$

lässt sich integriren, wenn die Functionen α, β dem System partieller Differentialgleichungen

$$3\alpha+\frac{\partial^2\log(\alpha^2\beta)}{\partial x\partial y}=0,\quad 3\beta+\frac{\partial^2\log(\alpha\beta^2)}{\partial x\partial y}=0$$

genügen. Die Lösung wird abhängig gemacht von der einer linearen Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integrale unmittelbar angegeben werden können. In das allgemeine Integral von (1) treten die willkürlichen Constanten linear ein.

Hr.

R. Liouville. Sur une classe d'équations différentielles non linéaires. C. R. CIII. 520-523.

Das vorstehende Resultat wird zu folgendem Satze verallgemeinert: Damit die Differentialgleichung zweiter Ordnung ein allgemeines Integral habe, worin die willkürlichen Constanten linear eingehen, ist es notwendig und hinreichend, dass sie von der Form ist

$$(1) \qquad y''+a_1y'^3+3a_2y'^2+3a_3y'+a_4=0,$$

worin $a_1, \dots$ Functionen von x und y sind, die den beiden Identitäten genügen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_4}{\partial y}+3a_2a_4\right)$$
$$+3a_3\left(2\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1a_4\right)+a_4\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+3a_1a_3\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-2\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1 a_4\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}-3a_1 a_3\right)$$
$$-3a_3\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-2\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1 a_4\right)+a_1\left(\frac{\partial a_4}{\partial y}+3a_3 a_4\right) = 0.$$

Es existirt alsdann eine allgemeine Lösung mit drei willkürlichen Constanten des folgenden simultanen Systems partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$t+a_1 p-a_2 q+z\left(\frac{\partial a_2}{\partial y}-\frac{\partial a_1}{\partial x}+2a_1 a_3-2a_2^2\right) = 0,$$
$$s+a_2 p-a_3 q+z\left(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial x}+a_1 a_4-a_2 a_3\right) = 0,$$
$$r+a_3 p-a_4 q+z\left(\frac{\partial a_4}{\partial y}-\frac{\partial a_3}{\partial x}+2a_2 a_4-2a_3^2\right) = 0.$$

Diese Lösung, gleich Null gesetzt, liefert das Integral der Gleichung (1). Ihre Auffindung hängt ab von einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Hr.

A. J. Stodolkiewicz. Ueber zwei Systeme von Differentialgleichungen mit vollständigen Differentialen. Krak. Denkschr. XII. (Polnisch)

Die von Herrn Appell in C. R. 1877 (Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires. S. F. d. M. IX. 1877. 326) zur Integration eines besonderen Systems von Differentialgleichungen gegebene Methode wendet der Verfasser auf die folgenden zwei Systeme an:

$$\begin{cases} dx_{n+1} = (x_{n+1}+x_1)dx_1+(x_{n+2}+x_2+1)dx_2+\cdots \\ \qquad +(x_{n+i}+x_i+1)dx_i+\cdots+(x_{2n}+x_n+1)dx_n, \\ dx_{n+2} = (x_{n+2}+x_2+1)dx_1+(x_{n+3}+x_3)dx_2+\cdots \\ \qquad +(x_{n+i+1}+x_{i+1}+1)dx_i+\cdots+(x_{n+1}+x_1+1)dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_{2n} = (x_{2n}+x_n+1)dx_1+\cdots+(x_{2n-1}+x_{n-1})dx_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_{n+1} = x_{n+1}dx_1+x_{n+2}dx_2+\cdots+x_{2n}dx_n, \\ dx_{n+2} = x_{n+2}dx_1+x_{n+3}dx_2+\cdots+x_{n+1}dx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ dx_{2n} = x_{2n}dx_1+x_{2n+1}dx_2+\cdots+x_{2n-1}dx_n. \end{cases}$$

Dn.

S. Pincherle. Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari alle differenze, e viceversa. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 559-562.

I. Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten

$$(1)\qquad \sum_{r=0}^{r=n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} a_{\lambda,r}\, y^{\lambda}\varphi^{(r)}(y) = 0$$

geht durch die Transformation

$$f(x) = \int_{(\varrho)} \varphi(y) y^{x-1}\,dy$$

bei passend gewählten Grenzen der Integrationslinie ϱ in die Differenzengleichung

$$(2)\quad \Sigma\Sigma(-1)^r a_{\lambda,r}(x+\lambda-1)(x+\lambda-2)\dots(x+\lambda-r)f(x+\lambda-r) = 0$$

über.

II. Die Differenzengleichung

$$\sum_{h=0}^{h=p}\sum_{k=0}^{k=m} c_{h,k}(y+h)(y+h+1)\ \dots\ (y+h+k-1)\varphi(y+h) = 0$$

geht durch die Transformation

$$f(x) = \int_{(\sigma)} \varphi(y) x^{-y}\,dy$$

bei passend gewählter Integrationslinie σ über in die Differentialgleichung

$$\Sigma\Sigma c_{h,k} x^{h-k} f^{(k)}(x) = 0.$$

III. Denkt man sich das Integral der Gleichung (1) nach ganzen positiven Potenzen von y^{-1} entwickelt, so ist die Recursionsformel für die Coefficienten c_ν der Reihe identisch mit der Differenzengleichung (2); man hat nur

$$x = \nu,\ f(x+\lambda-r) = c_{\nu+\lambda-r}$$

zu setzen. Hr.

Hj. Mellin. Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen. Acta Math. IX. 137-166.

Diese Arbeit knüpft unmittelbar an eine andere desselben Verfassers an „Zur Theorie der Gammafunctionen“, die in Abschn. VII Cap. 2 D. besprochen wird, indem der daselbst be-

hauptete Zusammenhang gewisser mit der Gammafunction verwandter Transcendenten mit den Integralen linearer Differentialgleichungen aufgedeckt wird. Es wird zuerst der wichtige Satz bewiesen: Wenn

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x).x^{z-1}dx$$

und $\varphi(x)$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(a_0 - b_0x)x^n y^{(n)} + (a_1 - b_1x)x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + (a_n - b_nx)y = 0$$

ist, so befriedigt die durch das Integral definirte Function $f(z)$ die lineare Differenzengleichung erster Ordnung

$$r_1(z)f(z+1) = r_0(z)f(z) - R(z),$$

wo $r_0(z)$, $r_1(z)$, $R(z)$ ganze rationale Functionen bezeichnen. Dann wird gezeigt, dass es unter den particulären Integralen der Differentialgleichung eines und zwar nur eines: η giebt, für welches die Gleichung

$$f(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx$$

dieser Differenzengleichung genügt, und dass diese Function $f(z)$ bis auf einen Factor identisch mit dem in der citirten Abhandlung untersuchten Quotienten ist, so dass die Gleichung besteht:

$$C.\int_0^a \eta x^{z-1}dx = a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')}.$$

Mit Hülfe dieser neuen Gleichung kann eine ganze Menge bestimmter Integrale auf die Γ-Function zurückgeführt werden; so kann man z. B. die Potenzen des Euler'schen Integrales erster Gattung in der Form eines bestimmten Integrales ausdrücken.

Nachdem noch das Integral $\int_a^\infty \eta x^{z-1}dx$ durch einen ähnlichen Quotienten von Γ-Functionen dargestellt worden, wird auf die Wichtigkeit dieser Functionen für Differentialgleichungen höherer Ordnung hingewiesen, indem gezeigt wird, wie man stets Functionen bilden kann, die der Differenzengleichung

$$r_0(z)f(z) + r_1(z)f(z+1) + \cdots + r_m(z)f(z+m) = R(z)$$

genügen. Die $r(z)$ sind hier bestimmte rationale ganze Functionen, während $R(z)$ eine unbestimmte ganze rationale oder

transcendente Function ist. Endlich wird noch ein Zusammenhang zwischen den Differenzengleichungen höherer Ordnung und den linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten nachgewiesen. Bm.

G. Fouret. Sur une interprétation géométrique de l'équation différentielle $L\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)-M\frac{dy}{dx}+N=0$. C. R. CII. 415-418.

In einer früheren Abhandlung (S. M. F. Bull. VII. 177, s. F. d. M. XI. 1879. 483) hat der Verfasser bewiesen, dass, wenn L, M und N ganze homogene Functionen von demselben Grade ν bezeichnen, ausser dem Punkte $O(x=0,\ y=0)$ $\nu+1$ Punkte $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ existiren, für welche $\frac{dy}{dx}$ unbestimmt ist; sie heissen Hauptpunkte des durch die Differentialgleichung definirten Curvenbüschels. O ist ein ν^2-facher Hauptpunkt, er hat die Eigenschaft, dass die Tangenten der Curven des Büschels in den Schnittpunkten mit irgend einer durch O gehenden Geraden OH in einem Punkt J zusammentreffen, dessen Lage allein von der Richtung der Geraden abhängt. In dieser Note wird nachgewiesen, dass der Punkt J der harmonische Mittelpunkt der einfachen Hauptpunkte $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ ist, die mit passend bestimmten Coefficienten behaftet zu denken sind, bezogen auf die Gerade OH. Der Ort der Punkte J ist die Enveloppe der Inflexionstangenten der Curven des Büschels. Die Integration der Differentialgleichung führt, da die Gleichung homogen ist, auf eine Quadratur. In zwei Fällen sind die Integrale algebraische und Kreisfunctionen: 1) wenn die zu den Hauptpunkten gehörigen Coefficienten ganze Zahlen sind, 2) wenn die Hauptpunkte auf einer Geraden Δ liegen. Im zweiten Falle sind je 2 Integralcurven homolog und zwar ist O der Mittelpunkt und Δ die Axe der Homologie. Hr.

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. C. R. CII. 250-253.

Der Verfasser teilt die Resultate seiner fortgesetzten Untersuchungen über die Integrale zweiter Gattung mit, worüber er eine erste Note in den C. R. CI. 734ff. (cf. F. d. M. XVII. 1885. 336) veröffentlicht hatte; eine ausführlichere Darstellung dieses Gegenstandes hat er seitdem in Jordan J. (4) II. 329ff. veröffentlicht, über die das folgende Referat handelt. — Ferner teilt er eine Bemerkung über die Perioden der „Doppelintegrale erster Gattung“ d. h. $\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z}$ mit, wo zwischen x, y und z die algebraische Gleichung m^{ten} Grades $f(x, y, z) = 0$ besteht und $Q = 0$ eine Fläche $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellt, welche durch die Doppelcurven der Fläche $f = 0$ geht; diese Perioden besitzen einen ganz anderen Charakter als die der Abel'schen Integrale. T.

E. Picard. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. Jordan J. (4) II. 329-372.

Ebenso wie er es früher (Jordan J. (4) I. 281-346; cf. F. d. M. XVII. 1885. 332ff.) für die Integrale erster Gattung gethan hat, giebt der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung eine ausführliche Darstellung seiner schon in kurzen Noten (C. R. C. 843ff., cf. F. d. M. XVII. 1885. 373; C. R. CI. 734ff., cf. F. d. M. ib. p. 336; C. R. CII. 250ff., cf. das vorhergehende Referat) veröffentlichten Untersuchungen über die Integrale zweiter Gattung, welche sich auf eine algebraische Fläche $f(x, y, z) = 0$ vom m^{ten} Grade beziehen; darunter versteht er die Integrale von der Form $\int (P dx + Q dy)$, wo P und Q rationale Functionen von x, y, z sind und der Ausdruck unter dem Integralzeichen (z als Function von x, y betrachtet) ein totales Differential ist, und welche die Eigenschaft besitzen, über jeden beliebigen, unendlich kleinen Cykel (d. h. eine geschlossene, stetige, einfach unendliche Folge von Werten x, y mit der Massgabe, dass die zugehörigen Anfangs- und Endwerte von z dieselben seien) erstreckt, gleich Null zu sein. Das erste Capitel der Ab-

handlung ist dem Nachweise gewidmet, dass es ausser den rationalen Functionen von x, y, z für eine allgemeine Fläche m^{ten} Grades ebenso wenig Integrale zweiter Gattung, als solche erster Gattung (d. h. überall endlich bleibende Integrale) giebt. Es entsteht dann sofort die Frage, wie man entscheiden kann, ob eine gegebene algebraische Fläche andere Integrale zweiter Gattung besitzt als die rationalen Functionen, und wie man diese Integrale erhalten kann, wenn sie existiren. Die Lösung dieser Aufgabe, welche bedeutend schwieriger ist, als die der analogen Aufgabe für die Integrale erster Gattung, bildet den Gegenstand des zweiten Capitels. Der Einfachheit halber wird die Betrachtung zunächst auf die Flächen beschränkt, deren Gleichungen von der Form $z^2 = f(x, y)$ sind, wo $f(x, y)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von x, y bedeutet (analog dem hyperelliptischen Falle bei den Abel'schen Integralen). Vor allem zeigt sich, dass dann jedes Integral zweiter Gattung, wenn man rationale Functionen von x, y, z unterdrückt, auf die Form

$$\int \frac{A(x, y)dx + B(x, y)dy}{\chi(y)\sqrt{f(x, y)}},$$

wo A, B, χ ganze Functionen ihrer Argumente bedeuten, und dann weiter auf die Form

$$\int \frac{Pdx + Qdy}{\sqrt{f(x, y)}}$$

reducirt werden kann, wo

$$P = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \cdots + a_{m-2},$$
$$Q = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}$$

und die a und b rationale Functionen von y sind. Die Integrabilitätsbedingung

$$P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x, y)\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

liefert dann durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x $2m-1$ Relationen für die $2m-1$ Functionen a, b von y. Nimmt man noch $m = 2p+1$ an, so gestatten die m ersten dieser Relationen $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}$ durch die a und ihre ersten Ableitungen auszudrücken, und hierdurch gehen dann die übrigen $m-1$ Relationen in ein System von $m-1$ homogenen linearen Gleichungen

erster Ordnung über, dem die $m-1$ rationalen Functionen a genügen müssen, und aus dem sich schliesslich eine lineare Gleichung E von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung für a_0 ergeben wird, deren Coefficienten ganze Functionen von y sind, und es ist nun zu untersuchen, ob man dieser Gleichung durch eine rationale Function a_0 von y genügen kann, was in bekannter Weise geschehen kann. Angenommen, man habe r rationale, linear unabhängige Functionen gefunden, die der Gleichung E genügen, so leitet man daraus entsprechende Werte für die a und b ab und hat dann r Integrale zweiter Gattung; keines von diesen und ebenso wenig eine lineare Combination von ihnen reducirt sich auf eine rationale Function von x, y, z; die Zahl r stellt die Zahl der „distincten" Integrale zweiter Gattung dar. Auf die Gleichung E wird man auch durch eine ganz andere Betrachtung geführt. Geht man nämlich von dem Integral

$$\int \frac{a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \cdots + a_{m-2}}{\sqrt{f(x,y)}} dx$$

aus, worin man y als einen Parameter betrachtet, und will die a als Functionen dieses Parameters y so bestimmen, dass die $2p$ Perioden, welche dieses Integral besitzt, von y unabhängig werden, so erhält man speciell für a_0 einen Ausdruck von der Form $\alpha_1 Q_{11} + \cdots \alpha_{2p} Q_{2p,1}$, wo die Q Functionen von y sind, welche man durch bestimmte Integrale darstellen kann; und die Gleichung E hat zum allgemeinen Integral diesen Ausdruck mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2p}$ als den willkürlichen Constanten. Dieser Umstand lässt auf den Zusammenhang schliessen, der zwischen der Anzahl der Perioden und der der distincten Integrale besteht. Die für den Fall einer Fläche $z^2 = f(x,y)$ gegebene Lösung wird dann auf den Fall einer allgemeinen Fläche $f(x,y,z) = 0$ übertragen. — Im dritten Capitel macht der Verfasser eine Anwendung von den erlangten Resultaten auf die von ihm schon mehrfach (Acta Math. und Journal de Math.) behandelten hyperfuchsschen und hyperabelschen Functionen. Ebenso wie alle Fuchs'schen Functionen, welche derselben Gruppe entsprechen, rational als Functionen zweier von ihnen x, y, zwischen denen eine algebraische Gleichung $f(x,y) = 0$ besteht, darstellbar sind,

lassen sich bekanntlich auch alle hyperfuchsschen Functionen derselben Gruppe mittels dreier von ihnen x, y, z rational darstellen, zwischen welchen ebenfalls eine algebraische Gleichung $f(x, y, z) = 0$ besteht. Poincaré hat das schöne Resultat erhalten, dass umgekehrt die Coordinaten einer beliebigen algebraischen Curve $f(x, y) = 0$ sich durch Fuchs'sche Functionen eines Parameters darstellen lassen; es liegt die Frage nahe, ob man in analoger Weise die Coordinaten einer beliebigen algebraischen Fläche $f(x, y, z) = 0$ darstellen kann als hyperfuchssche Functionen von zwei Parametern. Diese Frage ist der Verfasser zu entscheiden im Stande, und zwar in verneinendem Sinne; es zeigt sich nämlich, dass die Flächen $f(x, y, z) = 0$, welche hyperfuchsschen Functionen entsprechen, Integrale zweiter Gattung besitzen, eine Eigenschaft, welche nach den vorangehenden Untersuchungen nicht jeder algebraischen Fläche zukommt. Entsprechendes gilt für die hyperabelschen Functionen. T.

H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. Jordan J. (4) II. 151-211.

Es ist dies die Fortsetzung einer Reihe von Abhandlungen: Resal J. (3) VII. 375, VIII. 251, (4) I. 167; auch enthalten in C. R. XCIII. 951, XCVIII. 287, worüber F. d. M. XIII. 591, XIV. 666, XVI. 294, XVII. 680 berichtet ist. Das Gegenwärtige fügt folgende vier Capitel hinzu: Gleichungen höherer Ordnung, singuläre Punkte; Integration durch Reihen; Distribution der singulären Punkte; Untersuchung der geschlossenen Curven.

H.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

W. Killing. Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. (Anhang zum Vorlesungsverzeichnis des Lyceums.) Braunsberg Huye. 17 S.

In einer Abhandlung „Erweiterung des Raumbegriffs“ (Braunsberg 1884) hatte Herr Killing, wie er sich ausdrückt, „die Theorie der Raumformen auf ein geschlossenes System von continuirlichen Transformationen gegründet“ und war auf diese Weise selbständig zu einer Reihe von Ergebnissen gekommen, welche Lie schon seit 1874 in seinen Arbeiten über Transformationsgruppen entwickelt hatte. Herr Killing erkennt in der gegenwärtigen Abhandlung die Priorität Lie's in allen Hauptpunkten rückhaltlos an und teilt nunmehr einige neue Sätze mit, die er mittlerweile gefunden hat.

In § 1 finden sich einige Vorbemerkungen über die Möglichkeit r-gliedrige Gruppen von gegebener Zusammensetzung in Räumen von verschiedener Dimensionenzahl aufzustellen; wegen dieser Möglichkeit scheint es Herrn Killing das Naturgemässeste, zunächst auf die Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen hinzuarbeiten (so lassen sich die Betrachtungen des § 1 bei Anwendung der Lie'schen Redeweise ausdrücken).

In § 2 teilt Herr Killing die r-gliedrigen Gruppen $X_1 f, \ldots, X_r f$ ein nach der Anzahl der von einander unabhängigen unter den infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ $(i, k = 1, \ldots, r)$. Zugleich stellt er den folgenden neuen und schönen Satz auf: Sind T_1 und T_2 zwei beliebige Transformationen der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$, so gehört die Substitution $T_1^{-1} T_2^{-1} T_1 T_2$ der invarianten Untergruppe an, welche von den infinitesimalen Transformationen $(X_i X_k)$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ erzeugt wird. Dieser Satz, der sich übrigens noch ergänzen lässt und der auch in der Substitutionentheorie sein Analogon hat, ist sehr bemerkenswert; schade nur, dass Herr Killing den Beweis desselben unterdrückt.

In § 3 werden aus den Relationen, welche in den bekannten Gleichungen:

$$(X_i X_k) = \sum_{1}^{r} {}_s\, c_{iks} X_s f \qquad (i, k = 1, \ldots, r)$$

zwischen den c_{iks} bestehen, verschiedene neue abgeleitet.

Der § 4 giebt mehrere Sätze über invariante Untergruppen

einer r gliedrigen Gruppe, insbesondere einen Beweis des Lie'schen Satzes, dass jede viergliedrige Gruppe eine dreigliedrige invariante Untergruppe enthält.

In § 5 werden aus den Formeln des § 3 einige neue Sätze abgeleitet, die sich nicht mit wenigen Worten kennzeichnen lassen. Dieselben werden sodann auf eine gewisse von Lie eingeführte lineare homogene Gruppe angewandt, nämlich auf diejenige, welche zur adjungirten Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe dualistisch ist. Der Paragraph ist nicht frei von Fehlern, namentlich ist der auf S. 15 aufgestellte Satz nach Ansicht des Referenten nicht bloss sehr missverständlich formulirt, sondern geradezu unrichtig.

Der § 6 enthält verschiedene, specielle Sätze, unter denen übrigens der letzte eingeschränkt werden muss.

Zum Schlusse noch eine Bemerkung. Herr Killing redet immer von den Jacobi'schen Relationen. Die Jacobi'sche Identität trägt ihren Namen mit Recht; sollen denn aber alle Relationen, die aus dieser Identität folgen, als Jacobi'sche bezeichnet werden? El.

F. Engel. Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. Leipz. Ber. 83-94.

Sind $X_1 f, \ldots, X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe irgend eines Raumes, so bestehen, wie Lie gezeigt hat, Gleichungen von der Form:

$$X_i(X_k(f)) - X_k(X_i(f)) = (X_i X_k) = \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, welche den Gleichungen:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_{\nu=1}^{r} \{c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}\} = 0 \\ (i, k, j, s = 1 \ldots r) \end{cases}$$

genügen. Die c_{iks} bestimmen nach Lie die Zusammensetzung der Gruppe $X_1 f, \ldots, X_r f$, und umgekehrt stellt jedes System von

Constanten c_{iks}, welches (A) erfüllt, eine mögliche Zusammensetzung r-gliedriger Gruppen dar.

Das Problem, alle möglichen Zusammensetzungen r-gliedriger Gruppen zu bestimmen, kommt nach dem § 1 der vorliegenden Arbeit vom invariantentheoretischen Standpunkte darauf hinaus, das volle System der Invarianten und Covarianten einer gewissen trilinearen Form aufzustellen, nämlich der Form:

$$F = \sum_{iks}^{1\dots r} c_{iks} x_i y_k u_s,$$

allerdings nur für den Fall, dass zwei specielle Covarianten dieser Form identisch verschwinden. In § 2 wird die Form F interpretirt und unter anderem gezeigt, dass sie mit einer gewissen linearen homogenen Gruppe in engem Zusammenhange steht, mit derjenigen, welche Lie als die adjungirte Gruppe bezeichnet. In § 3 wird auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen in einfacher Weise gezeigt, dass jede continuirliche Gruppe mit mehr als zwei Parametern zweigliedrige Untergruppen enthält (zuerst von Lie bewiesen), und dass jede Gruppe mit mehr als drei Parametern vertauschbare infinitesimale Transformationen enthält (zuerst von Killing bemerkt). Auf Grund des letzteren Satzes wird nun mit Hülfe eines Lie'schen Verfahrens nachgewiesen, dass für $r > 4$ jede r-gliedrige Gruppe viergliedrige Untergruppen enthält. Dieses Ergebnis ist neu, da Lie bisher nur die Existenz dreigliedriger Untergruppen allgemein bewiesen hatte; aus demselben wird mit Benutzung Lie'scher Sätze geschlossen, dass es einfache Gruppen mit sieben Parametern nicht giebt. El.

F. Engel. Ueber die Definitionsgleichungen der continuirlichen Transformationsgruppen. Klein Ann. XXVII. 1-57.

Die Habilitationsschrift des Verfassers, über welche schon F. d. M. XVI. 1884. 277f. berichtet ist. El.

J. J. SYLVESTER. Note sur les invariants différentiels. C. R. CII. 31-34.

Der Herr Verfasser berichtigt eine frühere Notiz (C. R. CI. 1110) über die Beziehungen zwischen seinen „Reciprocanten"*) und den Halphen'schen „Differentialinvarianten". Er erklärt, dass die letzteren mit den von ihm sogenannten „projectiven Reciprocanten" identisch sind, nicht aber, wie a. a. O. gesagt war, mit den „reinen Reciprocanten", von welchen sie vielmehr nur ein specieller Fall sind. Er giebt hierfür einen eigenen Beweis und einen zweiten, den ihm Herr Halphen mitgeteilt hat. Es scheint übrigens Herrn Sylvester unbekannt zu sein, dass die Halphen'schen Differentialinvarianten ein sehr specieller Fall eines viel allgemeineren Begriffes sind, den Herr Lie schon vor Herrn Halphen aufgestellt hat, ein specieller Fall nämlich der Differentialinvarianten einer endlichen continuirlichen Gruppe. Auf Grund der Lie'schen Principien ist auch die Identität der „projectiven Reciprocanten" mit den Halphen'schen Differentialinvarianten sofort klar: Die projectiven Reciprocanten sind ja reine Reciprocanten, welche die Transformation:

$$x_1 = \frac{1}{x}, \quad y_1 = \frac{y}{x}$$

gestatten; nun sind die reinen Reciprocanten nichts anderes als Differentialinvarianten der affinen Gruppe der Ebene (in der Lie'schen Ausdrucksweise), folglich sind die „projectiven Reciprocanten" die Differentialinvarianten der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene, d. h. sie sind die von Halphen betrachteten Differentialinvarianten. El.

G. RICCI. Sui sistemi di integrali indipendenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 119-122, 190-194.

Es wird das folgende Problem, das eine Verallgemeinerung

*) Die Arbeiten über Reciprocanten sind S. 73-91 besprochen.

desjenigen der orthogonalen Flächensysteme ist, behandelt: Es sei eine Mannigfaltigkeit $(x_1, \dots, x_n)$ von n Dimensionen durch das Quadrat des Linienelements $ds^2 = \sum_{r,s} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ charakterisirt und eine homogene lineare partielle Differentialgleichung

$$\sum_r Y_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = 0$$

vorgelegt; es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt werden, dass dieselbe $n-1$ Integrale $\varrho_1, \dots, \varrho_{n-1}$ besitze, welche paarweise in der gegebenen Mannigfaltigkeit zu einander orthogonal sind, d. h. von denen je zwei, ϱ_h und ϱ_k, den Gleichungen genügen:

$$\sum_{r,s} c_{sr} \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_r} \frac{\partial \varrho_k}{\partial x_s} = 0, \quad \text{wo} \quad c_{rs} = \frac{\alpha_{rs}}{a},$$

$a = | a_{rs} |$ und α_{rs} die zu a_{rs} adjungirte Unterdeterminante von a ist; und wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so soll untersucht werden, ob und wie diese Integrale bestimmt sind, und in welcher Weise sie erhalten werden können. — Eine wesentliche Rolle bei der Behandlung dieses Problems spielt die „charakteristische algebraische Gleichung"

$$a \begin{vmatrix} 0 & Y_1 & \dots & Y_n \\ Y_1 & Y_{11} + \omega c_{11} & \dots & Y_{1n} + \omega c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_n & Y_{n1} + \omega c_{n1} & \dots & Y_{nn} + \omega c_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$Y_{rs} = \tfrac{1}{2} \sum_t \left(c_{st} \frac{\partial Y_r}{\partial x_t} + c_{rt} \frac{\partial Y_s}{\partial x_t} - \frac{\partial c_{rs}}{\partial x_t} Y_t \right)$$

ist. Im zweiten Teil der Abhandlung wird auf die Fälle, dass die Wurzeln dieser Gleichung entweder alle gleich oder sämtlich von einander verschieden sind, näher eingegangen.

T.

MOUTARD. Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. J. de l'Éc. Polyt. cah. LVI. 1-5.

Ein Wiederabdruck der 1870 in den C. R. LXX. 1068f. (cf. F. d. M. 1869/70. II. 321f.) veröffentlichten Einleitung zu einer Arbeit, über die Herr Bertrand l. c. p. 1068f. einen Bericht erstattet hat, und von der ausserdem nur der dritte Teil (Journ. de l'Éc. Polyt. cah. XLV. 1-12; cf. F. d. M. 1878. X. 263f.) erschienen ist. Der Wiederabdruck geschieht, weil in zwei folgenden Abhandlungen (cf. die nächsten Referate) der Herren R. Liouville und L. Lévy darauf Bezug genommen wird.

T.

R. Liouville. Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre. J. de l'Éc. Polyt. cah. LVI 7-62.

Der Verfasser giebt hier eine ausführliche Darlegung seiner Untersuchungen über eine Klasse von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, über die er schon in zwei Noten in den C. R. C. 168 bis 170 und 235-237 (cf. F. d. M. 1885. XVII. 344) ausführlich referirt hatte, auf welche daher nur verwiesen sein möge.

T.

L. Lévy. Sur quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. J. de l'Éc. Polyt. cah. LVI. 63-77.

Ueber den ersten Teil dieser Arbeit hat der Verfasser selbst in den C. R. C. 98-100, worüber man F. d. M. 1885. XVII. 345 vergleiche, ausführlich berichtet. Um die erhaltenen Resultate zu interpretiren, wird im zweiten Teil der Arbeit die Aufgabe behandelt: alle Oberflächen zu bestimmen, auf welche die Developpablen einer Congruenz von Geraden ein conjugirtes Netz ausschneiden. T.

L. Bianchi. Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2° ordine con due variabili. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 218-223, 237-241, 307-310.

Um zu entscheiden, ob zwei gegebene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln x, y und mit der unbekannten Function z

$$F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo p, q, r, s, t wie gewöhnlich die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y bedeuten, eine gemeinsame Lösung haben oder nicht, und um diese zu finden, werden die beiden Fälle gesondert betrachtet, je nachdem die beiden gegebenen Gleichungen nach r und t, oder nach s und t sich auflösen lassen (der Fall der Auflösbarkeit nach r und s ist von dem letzteren offenbar nicht wesentlich verschieden). In beiden Fällen aber kommt die Frage nach der Existenz gemeinsamer Lösungen darauf hinaus, ob eine gewisse Bedingungsgleichung, deren Bildung nur algebraische Processe und Differentiationen erfordert, identisch zu erfüllen ist; ist dies nicht der Fall, so reducirt sich die Aufgabe auf die entsprechende Aufgabe, entweder für ein System aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer Differentialgleichung erster Ordnung, oder für ein System von drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Behandlung der eigentlichen Aufgabe vorausgeschickt wird. Gewisse Ausnahmefälle, in denen die gegebenen Entwickelungen illusorisch werden, werden nachträglich ebenfalls erledigt. Die Auffindung der gemeinsamen Lösung selbst reducirt sich auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Die Methode, welche Herr Valyi (Kronecker J. XCV. 99ff., cf. F. d. M. 1883. XV. 301f.) für dieselbe Aufgabe gegeben hat, erscheint dem Verfasser nicht ausnahmslos anwendbar und überdies complicirter. Als Anwendung wird die Aufgabe behandelt, zu bestimmen, ob die Gleichung

$$s + Pp + Qq + Nz = M,$$

wo P, Q, N, M gegebene Functionen von x, y sind, mit einer anderen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung Integrale mit einer willkürlichen Function gemeinsam hat.

T.

R. Moon. On the integration of partial differential equations of the third and higher orders. Phil. Mag. (5) XXI. 63-69.

Es seien R, S, T, U, V bloss Functionen von x und y. Ein erstes Integral der Gleichung

$$R\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+S\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+T\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+U\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=V$$

wird in der Gestalt $f(x, y, r, s, t) = 0$ angenommen. Die Bedingungen dafür, dass die Gleichung ein erstes Integral zulasse, werden entwickelt, und es zeigt sich, dass die Methode einer Ausdehnung auf Gleichungen höherer Ordnungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen fähig ist. Gbs. (Lp.)

V. Sersawy. Ueber den Zusammenhang zwischen den vollständigen Integralen und der allgemeinen Lösung bei partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wien. Denkschr. LXII.

Der Verfasser entwickelt in der Absicht, die von Lagrange aufgestellten Formeln zu ergänzen, eine allgemeine Methode, aus einem bekannten vollständigen Integrale einer partiellen Differentialgleichung beliebiger Ordnung ihre allgemeine Lösung abzuleiten. Die Arbeit steht im engsten Zusammenhange mit der im XLIX. Bd. der Wien. Denkschriften veröffentlichten Abhandlung des Verfassers (cf. F. d. M. 1884. XVI. 301f. T.

B. Imschenetsky. Sur la transformation d'une équation différentielle de l'ordre pair à la forme d'une équation isopérimétrique. Pétersb. Bull. XXXI. 283-291, Mél. Math. VI. 539-552.

Von Jacobi ist gezeigt worden, dass eine isoperimetrische Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{\partial V}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial V}{\partial y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}=0,$$

wo V eine in Bezug auf $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ nicht lineare Function von $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ ist, immer in ein Gleichungssystem von der kanonischen Form

$$(2) \qquad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

übergeführt werden kann, wo H eine bekannte Function von $x, p_1, q_1, \dots, p_n, q_n$ und $i = 1, 2, \dots, n$ ist. (Jacobi, Vorles. üb. Dynamik, I. Ausg.). Herr Imschenetsky zeigt, welche Bedingungen notwendig und hinreichend sind zur Transformation einer Differentialgleichung gerader Ordnung:

$$(3) \qquad y^{(2n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(2n-1)})$$

in eine Gleichung von der isoperimetrischen Form (1) und demgemäss in ein Gleichungssystem von der kanonischen Form (2).

Lp.

B. W. Stankiewitsch. Ueber ein Theorem Boltzmann's.

Warsch. Univ. Mitt. 1886. 9.

Hr. Boltzmann hat in seiner Abhandlung: „Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolecülen (Wien. Abhandl. LXIII.) ein Theorem bewiesen, in welchem es sich um die Berechnung der Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_m}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial Q_n}{\partial q_n}$$

handelt. Hier genügen die Functionen $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ einem System simultaner Differentialgleichungen

$$\frac{dP_1}{dt} = \varrho_1, \quad \frac{dP_2}{dt} = \varrho_2, \quad \dots, \quad \frac{dP_{m+1}}{dt} = \varrho_{m+1};$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \sigma_1, \quad \frac{dQ_2}{dt} = \sigma_2, \quad \dots, \quad \frac{dQ_n}{dt} = \sigma_n,$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{m+1}$ Functionen von $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ und $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ Functionen von $P_1, P_2, \dots, P_{m+1}$ allein sind; $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}, q_1, q_2, \dots, q_n$ sind die willkürlichen Anfangswerte der Functionen P und Q und durch eine Gleichung:

$$f(p_1, p_2, \dots, p_{m+1}, \quad q_1, q_2, \dots, q_n) = b$$

verbunden. In der oben genannten Note giebt Herr Staukiewitsch einen neuen Beweis des Boltzmann'schen Theorems. Wi.

Capitel 7.
Variationsrechnung.

A. Mayer. Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen. Leipz. Ber. 343-355.

O. Rodrigues hat (Corresp. sur l'Éc. Polyt. III. 1814) die wichtige Bemerkung gemacht, dass man beim Princip der kleinsten Action in der Lagrange'schen Fassung notwendig auch die Zeit mit variiren müsse. In Verfolg dieses mit dem sonstigen Verfahren der Dynamik, das nur Variationen der Coordinaten zulässt, wenig in Einklang stehenden Gedankens gelingt es nun, den Sinn der Lagrange'schen ungenauen Formulirung des Princips völlig klar zu stellen, so dass evident wird, was schon von Herrn Sloudsky (Nouv. Ann. (2) XVIII. 193ff.; cf. F. d. M. 1879. XI. 642), jedoch ohne Beweis, hervorgehoben worden ist, dass die Jacobi'sche Behauptung (Dynamik p. 44), nach welcher man in dem Princip der kleinsten Action aus dem Actionsintegrale notwendig die Zeit mittels des Satzes der lebendigen Kraft eliminiren müsse, nicht zutreffend ist, dass vielmehr neben und mit der Jacobi'schen Form gleichzeitig noch eine zweite gleichberechtigte Form des Princips der kleinsten Action existirt, und dass es eben diese zweite Form ist, welche Lagrange dem Principe gegeben hat. Danach sind frühere Behauptungen des Verfassers (cf. seine Antritts-Vorlesung über die Geschichte des Princips der kleinsten Action, Leipzig 1877 und F. d. M. 1871. III. p. 174f.) zu berichtigen. Was dagegen das Wertverhältnis der beiden Formen des Princips betrifft, so hält Herr Mayer

seine frühere Behauptung vollständig aufrecht, dass nur die Jacobi'sche Form wirklichen Nutzen gewährt, wogegen die Lagrange'sche nur in beschränktem Masse das leistet, was das Hamilton'sche Princip weitaus klarer, einfacher und naturgemässer erreicht.

Der Verfasser hatte schon früher (Clebsch Ann. II. 143ff. cf. F. d. M. 1869 u. 1870. II. 143f.) einen allgemeinen Satz der Variationsrechnung angegeben, welcher die Jacobi'sche Form des Princips als speciellen Fall enthält. Auch für den vorliegenden Zweck ist er in der Lage, den Betrachtungen einen allgemeineren Fall der Variationsrechnung zu Grunde zu legen und zu zeigen, dass auch jener allgemeine Satz zweier verschiedenen Formen fähig ist, welche, auf die Dynamik angewandt, die beiden Formen des Princips der kleinsten Action liefern. T.

C. Posse. Quelques remarques sur une certaine question de minimum. Klein Ann XXVI. 593-596.

Eine von Markoff in seinem Werke „Sur quelques applications des fractions continues algébriques". St. Petersburg 1884 (s. F. d. M. XVII. 168) gelöste Aufgabe wird durch teilweise Integration und einige Substitutionen in folgende übergeführt, deren Lösung sich mithin auf jene reducirt. Von der unbekannten Function $f(x)$, welche, wenn x von 0 bis 1 wächst, beständig abnimmt, sind die Werte

$$f(1),\quad \int_0^1 x^2 f(x)dx,\quad \int_0^1 x^4 f(x)dx,\quad \dots \quad \int_0^1 x^{2n} f(x)dx = a_{2n}$$

gegeben, man soll die genaue untere Grenze von $f(0)$ finden. Es wird schliesslich erhalten:

$$f(0) \geqq f(1) + \sqrt{\frac{[3a_2-f(1)]^5}{[3a_4-f(1)]^3}}$$

übereinstimmend mit einem Resultat von Stieltjes. H.

R. A. Roberts. On a theorem in the calculus of variations. Mess. XV. 148-152.

Die behandelte Aufgabe ist die, alle Beziehungen zu finden, welche daraus folgen, dass $\int du$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, wo

$$du^2 = f'(X_1)dx_1^2 + f'(X_2)dx_2^2 + \cdots + f'(X_n)dx_n^2,$$
$$f(X) = (X-X_1)(X-X_2)\dots(X-X_n).$$

Die gesuchten Relationen sind, wie gezeigt wird:

$$\Sigma'_n \frac{dx_i}{\sqrt{\varphi(x_i)}} = 0, \quad \Sigma'_n \frac{X_i dx_i}{\sqrt{\varphi(x_i)}} = 0, \quad \dots, \quad \Sigma'_n \frac{X_i^{n-1} dx_i}{\sqrt{\varphi(x_i)}} = 0,$$
$$\varphi(x_i) = (X_i + c_1)(X_i + c_2)\dots(X_i + c_{n-1}),$$

wo $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ $n-1$ willkürliche, durch die Integration eingeführte Constanten bedeuten. Glr. (Lp.)

E. P. Culverwell. On the discrimination of maxima and minima solutions in the calculus of variations. Lond. R. S. Proc. XL. 476-477.

Auszug aus einer Abhandlung in den Transactions. Cly.

A. P. Starkoff. Ueber die Auflösung der geometrischen Probleme der Variationsrechnung. Kas. Ges. IV.

S. F. d. Math. 1885. XVII. 359.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

K. Weierstrass. Abhandlungen aus der Functionenlehre. Berlin. J. Springer. IV u. 262 S. gr. 8°.

Folgende sieben Abhandlungen sind im vorliegenden Bande vereinigt: 1) Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (Berl. Abh. 1876). 2) Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler (Berl. Mon. Ber. Aug. 1880). 3) Zur Functionenlehre (ibid.). 4) Nachtrag zu der vorstehenden Abhandlung (Berl. Mon. Ber. Febr. 1881). 5) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. 6) Neuer Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen (Berl. Mon. Ber. Novbr. 1876). 7) Ueber die Theorie der analytischen Facultäten (Crelle J. LI. 1—60). Die vier ersten sind ohne wesentliche Veränderungen abgedruckt worden. Die fünfte Abhandlung, welche eine Reihe von Sätzen über die eindeutigen Functionen mehrerer Argumente enthält, von denen der Herr Verfasser in seinen Vorlesungen über die Abel'schen Transcendenten Gebrauch macht, ist im Jahre 1879 für die Zuhörer des Herrn Weierstrass lithographirt worden, aber nicht in den Buchhandel gekommen. Die Abhandlung No. 6

hat beim Neudrucke verschiedene redactionelle Aenderungen erfahren. Die letzte Abhandlung endlich ist im ganzen so geblieben, wie sie im Jahre 1854 erschienen ist. Obwohl die Theorie der analytischen Facultäten in den Augen des Herrn Verfassers durchaus nicht die Wichtigkeit hat, die ihr in früherer Zeit viele Mathematiker beimassen, so hat er die Abhandlung doch wieder abdrucken lassen, weil sie manches enthält, was auch gegenwärtig noch, wie er glaubt, angehenden Mathematikern von Nutzen sein kann. Wesentliche Aenderungen sind nicht vorgenommen. Nur die Einleitung ist neu bearbeitet worden, weil es zweckmässig erschien, auf den Inhalt der kritisirten, heute nicht jedermann mehr zugänglichen Schriften etwas ausführlicher einzugehen, als es früher für nötig gehalten war. Während des Druckes sind dann auch noch an vielen anderen Stellen Berichtigungen und Verbesserungen angebracht.

Möchten diesem Bande der gesammelten Abhandlungen recht bald sich noch andere anreihen, die in gleicher Weise ältere Arbeiten des verehrten Herrn Verfassers in neuer Gestalt bringen, unvollendet gebliebene Veröffentlichungen zum Abschlusse führen, gar nicht ans Licht getretene Gedankenreihen den kommenden Geschlechtern zur Verarbeitung überliefern! Lp.

H. M. de Figueiredo. Superficies de Riemann. Coimbra 1887.

Dieses Buch enthält eine Darstellung der Riemann'schen Methoden für die Untersuchung der mehrdeutigen Functionen. In dem ersten Capitel setzt der Verfasser die allgemeinen Principien der Theorie der mehrdeutigen Functionen auseinander. Im zweiten beschäftigt er sich mit der Theorie der Flächen, die Riemann zur Darstellung jener Functionen verwendet hat. Schliesslich werden im dritten und vierten Capitel die Integrale der Functionen mit complexen Variabeln und im besonderen die elliptischen Integrale untersucht. Tx. (Hch.)

J. Tannery. Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Darb. Bull. (2) X. 69-71.

Das hier abgedruckte Vorwort zu dem gleich betitelten Werke des Herrn Tannery enthält die Angabe der Gesichtspunkte, welche bei der Abfassung des Werkes massgebend waren, sowie eine eingehende Besprechung des Inhalts und der einschlägigen Literatur. Hz.

P. Mansion. Principes d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire. Mathesis, supplém. II. 40 S.

Aus dem Brux. S. sc. IX. B. 1885 (F. d. M. XVII. 1885. 361). Mn.

O. Hölder. Bemerkung zu der Mitteilung des Herrn Weierstrass: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. Nachr. 241-244.

Im Anschluss an die Mitteilung des Herrn Weierstrass in Gött. Nachr. 1884, 395—419 (s. F. d. M. XVI. 330) werden die fünf Eigenschaften der Teilgebiete $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, ..., $\mathfrak{G}_r$, auf denen eine wesentliche Vereinfachung der Rechnungsregeln beruht, formulirt, und wird dann die Frage erörtert, ob jedes System irgendwie bestimmter Gebiete, welches die fünf genannten Eigenschaften besitzt, mit dem von Herrn Weierstrass angegebenen Systeme der Teilgebiete übereinstimmen muss. Es ergiebt sich das Resultat, dass ein System von Gebieten durch die fünf Eigenschaften eindeutig definirt ist. M.

R. Lipschitz. Sur la théorie des diversités. C. R. CII. 602-604.

Summirt man die Anzahlen der Ecken, Kanten und Seitenflächen eines Parallelepipeds, so ergiebt sich der Wert

$$8 + 12 + 6 = 3^3 - 1.$$

Dieses Resultat verallgemeinert Herr Lipschitz auf m-dimensionale Parallelepipede. Man betrachte nämlich alle Wertsysteme

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, welche den Bedingungen

$$-s_1 \leqq \xi_1 \leqq s_1, \quad -s_2 \leqq \xi_2 \leqq s_2, \quad \ldots \quad -s_m \leqq \xi_m \leqq s_m$$

genügen, unter $s_1, s_2, \ldots, s_m$ positive Grössen verstanden. Diese Wertsysteme bilden eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit, die von anderen Mannigfaltigkeiten von weniger als m Dimensionen begrenzt wird. Bezeichnet nun ε_k die Anzahl der begrenzenden Mannigfaltigkeiten k^{ter} Dimension, so ist

$$\varepsilon_k = \binom{m}{k} 2^{m-k},$$

und hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{m-1} = 3^m - 1.$$

Eine weitere Relation zwischen den Zahlen ε ist die folgende:

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + - \cdots = 1 - (-1)^m.$$

Hz.

M. Lerch. Contributions à la théorie des fonctions. Prag. Ber. 571-582.

Herr P. du Bois-Reymond hat (Borchardt J. LXXIX. 29, s. F. d. M. VI. 1874. 241) eine ihm von Herrn Weierstrass mitgeteilte Function erwähnt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{b^n \cos(a^n x)\pi\},$$

welche an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten hat. Herr Lerch untersucht im Vorliegenden zwei einfache Functionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi x}{2^n}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n! \pi x}{n!},$$

welche die Eigenschaft haben, dass sie keine bestimmte Ableitung haben für gewisse Werte der Variabeln, die in jedem Intervall in unendlicher Zahl auftreten. Daraus folgt, dass die analytischen Functionen

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

nur für reelle oder imaginäre Werte von z, wofür $[z] < 1$ ist, existiren. Functionen derselben Natur treten in der Theorie der elliptischen Fnnctionen auf. M.

KÖPCKE. Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Functionen. Hamb. Mitt. 128-131.

Der Verfasser hat seine hier im Auszug mitgeteilten Untersuchungen inzwischen in Klein Ann. XXIX. ausführlich dargelegt. Ein Referat wird im Jahrgang 1887 der F. d. M. erscheinen. Hz.

P. DU BOIS-REYMOND. Ueber den Convergenzgrad der variabeln Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente. Kronecker J. C. 331-358.

Betrachtet man eine unendliche Reihe, deren einzelne Glieder Functionen von x sind:

$$U(x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_p(x),$$

so ist ihr Wert der Grenzwert, welchen die von x und n abhängige Grösse

$$U_n(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p(x)$$

für $n = \infty$ annimmt. Setzt man $n = \frac{1}{\varepsilon}$ und $U_n(x) = \varphi(x, \varepsilon)$, so kann man sagen, dass die Untersuchung der Reihe $U(x)$ auf die Untersuchung der von zwei Argumenten x und ε abhängenden Function $\varphi(x, \varepsilon)$ hinauskommt. Dabei kann das zunächst unstetig veränderliche Argument $\varepsilon = \frac{1}{n}$ auch als stetig veränderlich gedacht werden, indem man für die zwischen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ liegenden Werte von ε dem Zeichen $\varphi(x, \varepsilon)$ eine geeignete Bedeutung unterlegt. Es empfiehlt sich diese Bedeutung durch die Gleichung

$$\varphi(x, \varepsilon) = U_n(x) + \left(\frac{1}{\varepsilon} - n\right)[U_{n+1}(x) - U_n(x)], \left(\frac{1}{n} > \varepsilon > \frac{1}{n+1}\right)$$

festzusetzen. Es ist dann allgemein

$$\varphi(x, \varepsilon) = \int_0^y \psi(y)dy \quad \left(y = \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

wo $\psi(y)$ die Function bezeichnet, welche für $n < y < n+1$ gleich u_{n+1} ist. Mit Hülfe des Laplace'schen Integrals werden die Functionen $\psi(y)$ und $\varphi(x, \varepsilon)$ auch in expliciter Form dargestellt. Ferner ist zu bemerken, dass man, von der Function $\varphi(x, \varepsilon)$ ausgehend, durch die folgenden Formeln zu der unendlichen Reihe übergeht:

$$u_1 = \varphi(x, 1), \quad u_p = \varphi\left(x, \frac{1}{p}\right) - \varphi\left(x, \frac{1}{p-1}\right),$$

$$\varphi\left(x, \frac{1}{n}\right) = U_n(x), \quad \varphi(x, 0) - \varphi\left(x, \frac{1}{n}\right) = R_n(x);$$

dabei bezeichnet $R_n(x)$ den Rest $\sum_{p=n+1}^{\infty} u_p(x)$ der Reihe. Ebenso wie die unendliche Reihe kann übrigens auch das Integral

$$\int_0^{\infty} f(x, y)\,dy$$

auf eine Function zweier Argumente, nämlich auf

$$\varphi(x, \varepsilon) = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x, y)\,dy,$$

bezogen werden.

Es handelt sich nun darum, die Begriffe und Sätze über Functionen zweier Variabeln auf die Reihen zu übertragen. Die Function $\varphi(x, \varepsilon)$ sei für das Gebiet $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, $a \leqq x \leqq b$ definirt und werde darüber hinaus nach Massgabe der Gleichungen

$$\varphi(x, -\varepsilon) = \varphi(x, \varepsilon), \quad \varphi(x, \varepsilon) = \varphi(a, \varepsilon) \text{ für } x < a,$$
$$\text{und } \varphi(x, \varepsilon) = \varphi(b, \varepsilon) \text{ für } x > b$$

fortgesetzt. Um den Begriff der Stetigkeit zu übertragen, wird derselbe in folgende Form gebracht, deren Uebereinstimmung mit der üblichen Definition nachgewiesen wird: „Die Function $\varphi(x, \varepsilon)$ ist in dem Punkte x, ε stetig, wenn der Unterschied $\varphi(x_1, \varepsilon_1) - \varphi(x, \varepsilon)$ mit gegen Null abnehmenden $x_1 - x$, $\varepsilon_1 - \varepsilon$ bedingungslos unter jede Grenze sinkt, d. i. wie auch $x_1 - x$, $\varepsilon_1 - \varepsilon$ gleichzeitig oder nach einander der Null sich nähern mögen." Die Uebertragung auf die Reihen lautet:

Definition: Eine Reihe $\sum_1^{\infty} u_p(x)$ heisse in einem Punkte x stetig convergent, in welchem der Rest $R_n(x_1)$ mit $x_1 - x$ und

n^{-1} bedingungslos verschwindet." Hieran knüpft sich der folgende Satz: „Wenn für jeden Punkt x eines Intervalls $a \leqq x \leqq b$ eine Reihe $\sum_1^\infty u_p(x)$ stetig convergirt, so giebt es eine von x unabhängige, monoton mit n^{-1} gegen Null abnehmende Function $\varrho(n)$ der Art, dass $R_n(x) = \varrho(n).w_n(x)$, wo $w_n(x)$ für $a \leqq x \leqq b$ unter einer endlichen Schranke bleibt".

Die Gleichung $R_n(x) = \varrho(n)w_n(x)$ drückt die sogenannte „gleichmässige Convergenz" der Reihe aus. Statt dieser unzutreffenden Bezeichnung schlägt der Verfasser die andere „stetige Convergenz in Intervallen" vor; (ebenso wird statt „gleichmässiger Stetigkeit" die treffendere Bezeichnung „Streckenstetigkeit" oder „lineare Stetigkeit" eingeführt). Ferner empfehlen sich die folgenden Benennungen: „Convergenzpunkt, Divergenzpunkt, Stetigkeitspunkt der Convergenz, Unstetigkeitspunkt der Convergenz", Benennungen, deren Bedeutung aus dem Vorhergehenden klar ist.

Aus dem oben genannten Satze ergiebt sich weiter der folgende: „Wenn $U_n(x)$, ohne dass die Reihe $U(x)$ zu convergiren braucht, unter einer endlichen Schranke bleibt und die Reihe

$$\sum_1^\infty \int_{x_0}^x u_p(x)\,dx$$

convergirt, so ist sie stetig convergent". Die Voraussetzung dieses Satzes kann noch dahin eingeschränkt werden, dass die Convergenz der Reihe

$$\sum_1^\infty \int_{x_0}^x u_p(x)\,dx$$

nur in einer Pantachie von Punkten x festzustehen braucht.

Es handelt sich nun weiter darum, ein Mass für die Stärke der Convergenz einer Reihe zu finden. Zu diesem Zwecke wird zunächst der Stetigkeitsgrad einer Function definirt. Man setze

$$\Delta\varphi(x, \varepsilon) = \varphi(x, 0) - \varphi(x, \varepsilon)$$

und verstehe unter dem Stetigkeitsgrad diejenige positive Grösse $\varrho(x, \varepsilon)$, welche für jeden Wert ε gleich dem absolut grössten in dem Intervall zwischen ε incl. und 0 vorkommenden Wert von

$\Delta\varphi(x, \varepsilon)$ ist. Man hat dann die Gleichung

$$\varphi(x, 0) - \varphi(x, \varepsilon) = [\varrho(x, \varepsilon)]\, \Phi(x, \varepsilon),$$

wo $|\Phi(x, \varepsilon)| \leqq 1$ ist und bei Abnahme von ε nie aufhört $\leqq 1$ zu werden. Diese Definition wird indessen noch so modificirt, dass $\varrho(x, \varepsilon)$ mit ε stetig abnimmt und dass $|\Phi(x, \varepsilon)|$ entweder den Limes ($\varepsilon = 0$) Eins, oder die obere Unbestimmtheitsgrenze Eins haben soll, jedoch mit der Einschränkung, dass $|\Phi(x, \varepsilon)|$ in dem ganzen betrachteten Intervall von x für ein hinreichend kleines ε von 1 um eine beliebig kleine Grösse δ verschieden sei und bleibe, oder unaufhörlich wiederkehrend Werte annehme, die von 1 um δ oder weniger verschieden sind. Diese Festsetzung wird an einem Beispiel erläutert. Wenn der Stetigkeitsgrad einer Function ein Product von Functionen von ε und von x allein ist, so heisst die Function in gleichem Grade oder gleichmässig convergent. Von den hieran anknüpfenden Bemerkungen sei die auf den Fall $\varphi(x, \varepsilon) = \varphi(x+\varepsilon)$ bezügliche hervorgehoben. Sei

$$\varphi(x) - \varphi(x+\varepsilon) = \varrho(x, \varepsilon)\, \Phi(x, \varepsilon) \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon=0} \Phi(x, \varepsilon) = 1,$$

so kann die Function $\varphi(x+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ nur dann in gleichem Grade stetig sein, wenn $\varrho(x, \varepsilon) = \varepsilon\varrho_1(x)$ ist.

Die für die Functionen gegebenen Erklärungen übertragen sich nun ohne weiteres auf die Reihen. Der Convergenzgrad $\varrho(x, n)$ einer Reihe wird durch die Gleichung

$$R_n(x) = [\varrho(x, n)]\, \Phi(x, n)$$

erklärt, wo für $\varrho(x, n)$ und $\Phi(x, n)$ die Bestimmungen gelten, welche den oben für $\varrho(x, \varepsilon)$, $\Phi(x, \varepsilon)$ angegebenen entsprechen. Die Reihe heisst in einem Intervalle in gleichem Grade convergent, wenn $\varrho(x, n) = \varrho(n)\varrho_1(x)$ und $\varrho_1(x)$ in dem Intervalle unter einer endlichen Schranke bleibt. Es knüpfen sich hieran einige (an Beispielen erörterte) Betrachtungen über die Aenderung der Convergenz einer Reihe, wenn die Variable x variirt wird.

Der Rest der Fourier'schen Reihe wird nun nach den aufgestellten Gesichtspunkten untersucht. Dabei ergeben sich folgende Sätze: „Wenn $f(x)$ in dem Intervall $-\pi \cdots +\pi$ endlich

und abteilungsweise monoton ist, wenn weiter $\frac{f(x)-f(x+\beta)}{\beta}$ in einem hinreichend kleinen Intervall $-\beta_0 \cdots +\beta_0$ von β ebenfalls endlich und nach β abteilungsweise monoton ist, so wird das Product von n in den Rest $R_n(x)$ der Fourier'schen Reihe nicht unendlich". „Wenn $f(x)$ im Intervall $-\pi \cdots +\pi$ endlich und abteilungsweise monoton ist und $f'(x)$ in einer beliebig kleinen Strecke dieses Intervalls ebenfalls endlich und abteilungsweise monoton ist, so wird $nR_n(x)$ für keinen inneren Punkt dieser Strecke mit n unendlich."

Mit diesen Untersuchungen sind eine Reihe interessanter Bemerkungen über neuere Forschungen auf dem Gebiete der Fourier'schen Reihen verbunden.

Der Schlussparagraph der inhaltsreichen Arbeit beschäftigt sich mit der Stetigkeit der Reihensumme. Aus den früheren Betrachtungen folgt zunächst der Satz:

„Die Function $\sum_1^\infty u_p(x) = \varphi(x, 0)$ ist für einen Punkt x des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ einschliesslich der Endpunkte a und b stetig, wenn die Reihe im Punkt x stetig convergent ist." Und hieraus specieller: „Es ist, $a \leqq x \leqq b$ gedacht,

$$\lim_{x=a} \sum_1^\infty u_p(x) = \sum_1^\infty u_p(a),$$

wenn beide Reihen convergent sind, und $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$ mit $x-a$ und n^{-1} bedingungslos verschwindet."

Ein Beispiel zu diesem Satze bildet der bekannte Abel'sche Satz:

$$\lim_{x=1} \sum_1^\infty a_p x^p = \sum_1^\infty a_p,$$

wenn die Reihen convergiren, und $a_1, a_2, \ldots$ von x nicht abhängen. Dem Abel'schen Satz kann der Satz

$$\lim_{x=0} \int_0^\infty d\alpha\, e^{-x\alpha} \varphi(\alpha) = \int_a^\infty d\alpha\, \varphi(\alpha)$$

an die Seite gestellt werden, und ebenso den von Herrn Hölder gegebenen Verallgemeinerungen des Abel'schen Satzes eine Reihe allgemeinerer Formeln aus der Theorie der bestimmten Integrale. Weitere Anwendungen der Auffassung einer Reihe als Func-

tion zweier Variabeln auf die gliedweise Integration der Reihen hat der Verfasser teils in den Berichten der Berl. Akademie veröffentlicht, teils sollen dieselben bei späterer Gelegenheit mitgeteilt werden. Hz.

C. Arzela. Sui prodotti infiniti. Bologna Rend. 92-100.

Beweis des folgenden Satzes:

Sind v_n $(n = 1, 2, \ldots)$ Functionen der complexen Veränderlichen z in einem Bereiche A und ist in diesem Bereiche überall $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| < L$, wo L eine endliche Grösse ist, so convergirt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$ in A stets und nur dann gleichmässig, wenn dasselbe für $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ stattfindet.

Es gilt auch der Satz: Ist in A $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n| < L$ und bezeichnet u_n eine Function von z, deren absoluter Betrag für $\lim n = \infty$ gegen eine endliche, nicht verschwindende Grenze gleichmässig convergirt, so convergirt $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ stets und nur dann gleichmässig, wenn dasselbe für $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ stattfindet.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich, wenn in A $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n'| < L$ ist und $\sum_{n=1}^{\infty} v_n'$ gleichmässig convergirt:

$$\frac{d}{dz}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n'}{1+v_n}.$$

Vi.

G. Borenius. Om den Cauchyska uppgiften att framställa en bruten rationel funktion, som antager färeskrifna värden för gifna värden af argumentet. Helsingfors. 59 S. 4°.

Diese Inauguraldissertation ist einer Darstellung der verschiedenen Methoden gewidmet, eine gebrochene rationale Func-

tion herzustellen, welche eine Reihe gegebener Werte annehmen soll. Ausser den diesen Gegenstand betreffenden, in den Berl. Ber. veröffentlichten Abhandlungen des Herrn Kronecker hat der Verfasser auch die Gelegenheit gehabt, desselben Geometers algebraische Vorlesungen zu benutzen. In Capitel I werden weiterhin zu benutzende Sätze aus der Theorie der Kettenbrüche entwickelt. Die zwei folgenden Capitel enthalten eine Darstellung jener Methoden, die sich auf Kettenbruchentwickelungen gründen, nebst einer Discussion derselben. In Capitel IV entwickelt der Verfasser in ähnlicher Weise, wie es Herr Kronecker im Monatsb. 1878 S. 101—102 gethan hat, die Cauchy'sche Form der verlangten gebrochenen Function. In Capitel V löst der Verfasser, nach einer von Herrn Kronecker (Monatsber. 1881. 546) angedeuteten Methode, die Cauchy'sche Aufgabe mit Hülfe gewisser Determinantengleichungen. M-n.

F. Krieg v. Hochfelden. Ueber die durch den Integralausdruck

$$\Phi(t) = \int_S \frac{R_1(z, \mathfrak{w})}{R_2(z, \mathfrak{w}) - t}\, dz$$

dargestellten Functionen, wobei $R_1(z, \mathfrak{w})$ und $R_2(z, \mathfrak{w})$ algebraische Functionen einer und derselben Riemann'schen Fläche sind. Wien. Ber. XCIV. 1-23.

Es wird der genannte Integralausdruck, in welchem z und $\mathfrak{w}$ durch irgend eine algebraische Relation von beliebigem Geschlechte mit einander verbunden sind, und S eine geschlossene Integrationscurve darstellt, die eine Elementarfläche der Riemann'schen z-Fläche eingrenzt, in Bezug der Functionen, die derselbe definirt, discutirt. Als Anwendung werden drei Beispiele ausgeführt, bei welchen teilweise die Curvenintegrale in Linienintegrale umgewandelt werden, insbesondere die Grenzen derjenigen Gebiete der Ebene bestimmt, in welchen verschiedene Functionen durch einen Integralausdruck definirt werden.

H.

G. Ascoli. Un teorema sulle funzioni di cui ciascun termine è una funzione di $z\ (= x + iy)$. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 173-175.

Sind $\varphi_s(z)$ Functionen von z in einem einblättrigen, endlichen, zusammenhängenden Bereiche T und convergirt die Reihe $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(k)$ auf der Begrenzung C gleichmässig (wo k die Punkte von C bezeichnet), so stellt $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(z)$ eine Function von z in jedem innerhalb T liegenden Bereiche dar, welche gegen $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(k)$ gleichmässig convergirt, wenn der Punkt z sich der Begrenzung unbeschränkt nähert. Vi.

G. Morera. Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 304-307.

Dieser Satz, der als die Umkehrung des Cauchy'schen Satzes angesehen werden kann, ist folgender:

Wenn die complexe Veränderliche u von der complexen Veränderlichen z in der Weise abhängt, dass sie in einem Stücke T der z-Ebene stetig, endlich und eindeutig und das Integral $\int u dz$, ausgedehnt auf die ganze Begrenzung jedes Bestandteiles von T, gleich Null ist, so ist u notwendig eine Function von z (im Riemann'schen Sinne).

Aus diesem Satze folgt leicht, dass, wenn $f_i(z)$ einwertige, stetige und endliche Functionen von z in T sind und $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ $\left(\text{bezw. } \prod_{i=1}^{\infty}[1+f_i(z)]\right)$ in T gleichmässig convergirt, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$ $\left(\text{bezw. } \prod_{i=1}^{\infty}[1+f_i(z)]\right)$ eine einwertige, stetige und endliche Function von z in T bildet. Vi.

G. Morera. Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite. Torino Atti. XXI. 892-899.

Durch die vom Verfasser selbst bewiesene (Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 304-307; vergleiche das vorhergehende Referat) Umkehrung des Cauchy'schen Satzes werden einige allgemeine Sätze über die Functionen einer complexen Veränderlichen aufgestellt.

Bedeuten n_1, n_2, ... veränderliche Parameter, die jeden positiven ganzzahligen Wert annehmen dürfen, so sagt man, der analytische Ausdruck $\varphi(n_1, n_2, \dots; z)$ convergire im Bereiche T gleichmässig, wenn man nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse σ solche ganzen positiven Zahlen N_1, N_2, ... angeben kann, dass in jedem Punkte von T

$$|\varphi(N_1+p_1+q_1, N_2+p_2+q_2, \dots, z) - \varphi(N_1+p_1, N_2+p_2, \dots, z)|$$

für beliebige positive ganzzahlige Werte von $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$ kleiner als σ ist. Man kann die gleichmässige Convergenz auf einer Curve analog definiren. Dann gelten folgende zwei Sätze:

Ist $\varphi(n_1, n_2, \dots; z)$ in einem Bereiche T, wenigstens von gewissen endlichen Werten von n_1, n_2, ... an, einwertig, endlich und stetig und convergirt daselbst gleichmässig, so stellt

$$w = \lim_{n_1, n_2, \dots = \infty} \varphi(n_1, n_2, \dots; z)$$

im Inneren von T eine einwertige, endliche und stetige Function von z dar.

Ist $\varphi(n_1, n_2, \dots, z)$ in T, wenigstens von gewissen Werten von n_1, n_2, ... an, einwertig, endlich und stetig und convergirt auf der Begrenzung gleichmässig, so stellt

$$w = \lim_{n_1, n_2, \dots = \infty} \varphi(n_1, n_2, \dots; z)$$

im Inneren von T eine einwertige, endliche und stetige Function von z dar. Der Ausdruck $\varphi(n_1, n_2, \dots; z)$ und alle seine Derivirten convergiren in T gleichmässig.

Hieraus kann man zahlreiche Sätze über unendliche Reihen und Producte, sowie über Kettenbrüche ableiten.

Der zweite Hauptsatz besteht selbst dann, wenn die gleich-

mässige Convergenz auf der ganzen Begrenzung mit Ausnahme einer Punktmenge erster Gattung („specie“ nach Dini) stattfindet.

Ist $\varphi(n_1, n_2, \ldots; z)$ in mehreren getrennten Bereichen gleichmässig convergent, so stellt w in jedem dieser Bereiche eine analytische Function dar; solche Functionen sind aber im allgemeinen von einander verschieden. Vi.

N. W. Bugaieff. Die Grundlagen der Rechnung $E\varphi(x)$ bei einer unabhängigen Veränderlichen. Mosk. Math. Samml. XIX. (Russisch.)

Mit dem Zeichen $E\varphi(x)$ bezeichnet der Verfasser (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 367) denjenigen Teil der Function $\varphi(x)$, welcher so bestimmt ist, dass die Differenz $\varphi(x)-E\varphi(x)$ bei $x=\infty$ Null wird. Die Function $E\varphi(x)$ wird dann der ganze Teil der Function $\varphi(x)$ genannt; die Differenz

$$\varphi(x)-E\varphi(x) = O\varphi(x)$$

ferner der Bruchteil der Function $\varphi(x)$. Die Rechnung $E\varphi(x)$ ist, wie der Verfasser selbst sie definirt, eine systematische Entwickelung der Methoden, welche zum Studium der Eigenschaften des Symbols E führen, und die Anwendung dieser Eigenschaften auf die Auflösung verschiedener Fragen der Mathematik.

Die umfangreiche Arbeit ist in vier Abschnitte geteilt. Im ersten Abschnitte werden die Grundsätze der Rechnung $E\varphi(x)$ aufgestellt und die Grundeigenschaften der Symbole $E\varphi(x)$ und $O\varphi(x)$ hergeleitet. Die Eigenschaften dieser Symbole werden dann angewandt auf die Berechnung der Symbole

$$E\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\mu},\quad O\frac{\varphi(x)}{(x-a)^\mu},\quad E\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)},$$
$$E\frac{\varphi(x)}{x^2-ax-b},\quad E\frac{\varphi(x)^n}{(x-a)(x-b)}\quad \text{u. s. w.}$$

Der zweite Abschnitt ist den einfachsten Anwendungen der Rechnung $E\varphi(x)$ gewidmet. Diese Anwendungen bestehen in der Ableitung der Formeln für $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$, in der Zer-

legung der rationalen Functionen in Partialbrüche und in der Berechnung der Residuen. Hiernach wird eine allgemeine Formel der Rechnung $E\varphi(x)$ abgeleitet. Die Formel giebt, wenn

$$V = \frac{f(1)}{x} + \frac{f(2)}{x^2} + \cdots + \frac{f(n)}{x^n} + \cdots$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$Q = \left|{}^{x=0}E[(\psi(1).V + \psi(2).V^2 + \cdots + \psi(n).V^n + \cdots)x^i];\right.$$

es wird nämlich

$$Q = \mathrm{S}\frac{\psi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_i)\Pi(\lambda_1 + \cdots + \lambda_i)}{\Pi(\lambda_1)\ldots\Pi(\lambda_i)} f(1)^{\lambda_1}.f(2)^{\lambda_2}\ldots f(i)^{\lambda_i},$$

wo die Summe auf alle positiven Werte von λ (Null eingerechnet) ausgedehnt ist, welche der Gleichung

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + i\lambda_i = i$$

genügen. Diese allgemeine Formel wird dann zur Auflösung der verschiedenen Aufgaben der Theorie der symmetrischen Functionen verwandt und zur Herleitung des Ausdrucks der n^{ten} Derivirten der zusammengesetzten Functionen.

Im dritten Abschnitte wird gezeigt, dass die Taylor'sche Reihe eine Folge der Rechnung $E\varphi(x)$ ist, und es werden folgende Relationen bewiesen:

$$\left|{}^{\omega=x}E\frac{\varphi(x)}{x-\omega} = \varphi'(x),\right. \quad \left|{}^{\omega=x}E\frac{\varphi(x)}{(x-\omega)^2} = \frac{\varphi''(x)}{1.2},\right. \quad \ldots,$$

$$\left|{}^{\omega=x}E\frac{\varphi(x)}{(x-\omega)^m} = \frac{\varphi^{(m)}(x)}{1.2\ldots m}.\right.$$

Nach der Einführung des Symbols $\left|{}^{\omega=x}E = J\right.$ nehmen diese Relationen die folgende Form an:

$$J\frac{\varphi(x)}{x-\omega} = \varphi'(x), \quad \ldots, \quad J\frac{\varphi(x)}{(x-\omega)^m} = \frac{\varphi^{(m)}(x)}{1.2\ldots m}.$$

Die Eigenschaften des Symbols J gestatten dann die Herleitung verschiedener Differential-Beziehungen und -Ausdrücke für

$$\frac{d^n\varphi^\mu}{dx^n}, \quad \frac{d^n\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)}{dx^n}, \quad \frac{d^n(e^\varphi)}{dx^n}, \quad \frac{d^n f(\varphi(x))}{dx^n} \quad \text{u. s. w.}$$

Dann folgen die Anwendungen der Rechnung $E\varphi(x)$ auf die

Theorie der Reihen, die Ableitung der Bernoulli'schen Reihe:

$$\varphi(0) = \varphi(x) - xD\varphi + \frac{x^2}{1.2}D^2\varphi - \cdots$$

und der Reihen für

$$E\frac{\varphi x}{x^2+1}, \quad E\frac{\varphi x}{x^2-ax-b}, \quad E\frac{\varphi x}{\psi x} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Anwendung der Rechnung $E\varphi(x)$ auf die Theorie der Reihen steht im nächsten Zusammenhange mit dem Calcul der Derivationen, einer von Arbogast entwickelten Methode für die Ermittelung der Coefficienten der Zerlegung des Ausdruckes

$$F\left(\psi_1, \frac{d\psi_1}{dx}, \ldots, \frac{d^\mu\psi_1}{dx^\mu}, \psi_2(x), \frac{d\psi_2}{dx}, \ldots \frac{d^\nu\psi_2}{dx^\nu}, \ldots\right),$$

vorausgesetzt, dass die Zerlegungen der Functionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ bekannt sind; die Bezeichnungen der vorliegenden Arbeit weichen jedoch von den Arbogast'schen ab. Am Ende des Abschnittes wird der Calcul der Derivationen auf die Theorie der symmetrischen Functionen angewandt, und es wird gezeigt, wie man von jeder Formel der Theorie der symmetrischen Functionen zu den entsprechenden des Calculs der Derivationen und des Differentialcalculs und umgekehrt übergehen kann.

Im vierten Abschnitte wird die Taylor'sche Formel mittels des Symbols $J = |^{\delta=x-\omega=0}E$ in folgender Form ausgedrückt:

$$\varphi(x+h) = J\frac{x-\omega}{x-\omega-h}\varphi = J\frac{\delta}{\delta-h}\varphi$$

Folglich ist

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x) = J\frac{\varphi(x)}{\delta-1}$$

und allgemeiner

$$\frac{\Delta^n\varphi(x)}{1.2\ldots n} = J\frac{\varphi}{(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\delta-n)}.$$

Die letzte Formel ist angewandt auf die Bestimmung der Coefficienten Σ_i der Zerlegung:

$$\frac{\Delta^n\varphi}{1.2\ldots n} = E\frac{\varphi}{x^n} + \Sigma_1 E\frac{\varphi}{x^{n+1}} + \Sigma_2 E\frac{\varphi}{x^{n+2}} + \cdots;$$

Σ_μ ist nämlich die Summe aller symmetrischen Functionen der Ord-

nung μ der n Elemente $x+1$, $x+2$, ..., $x+n$. Die Rechnung $E\varphi(x)$ giebt andererseits auch die Formel:

$$\Delta^n \varphi = \Delta^n 0^n E \frac{\varphi}{x^n} + \Delta^n 0 (0+x)^n E \frac{\varphi}{x^{n+1}}$$

$$+ \Delta^n 0 (0+x)^{n+1} E \frac{\varphi}{x^{n+2}} + \cdots;$$

in dieser Formel ist $\Delta^n 0(0+x)^{n+k}$ symbolischer Ausdruck für ein Polynom, dessen Coefficienten die Brinkley'schen Zahlen $\Delta^n 0^i$ sind. Die Zusammenstellung zweier Formeln zeigt, dass $\Sigma_\mu = 1.2\ldots n\ \Delta^n 0(0+x)^{n+\mu-1}$ ist.

Nimmt man jetzt die bekannte Relation:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta u}{1} - \frac{\Delta^2 u}{2} + \frac{\Delta^3 u}{3} - \cdots$$

und ersetzt dort die Symbole Δ und $\frac{d}{dx}$ durch das Symbol J nach den Formeln

$$\frac{\Delta^n u}{1.2\ldots n} = J \frac{u}{(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\delta-n)}, \quad \frac{du}{dx} = J \frac{u}{\delta},$$

so erhält man die Zerlegung der Function $\frac{1}{x}$ nach den Factoriellen negativer Ordnung. Sodann giebt der Verfasser die allgemeine Formel der Zerlegung der Function $\frac{1}{x^\mu}$ nach den negativen Factoriellen, welche selbstverständlich auch zur ähnlichen Zerlegung einer willkürlichen Function $\varphi(x)$ führt.

Schliesslich wird ein Theorem bewiesen, welches den Zusammenhang zwischen der Rechnung $E\varphi(x)$ und dem Calcul der Residuen führt. Diesem Theorem zufolge hat man für jede rationale Function die Relation:

$$E\varphi(z) = \mathbf{E} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{u(1-uz)},$$

wo $\mathbf{E}$ das Cauchy'sche Zeichen für den Residuencalcul ersetzt. Das Theorem wird zur Ableitung einiger Formeln der Rechnung $E\varphi(x)$ verwandt. Mit diesen Anwendungen ist die interessante

Arbeit Bugaieff's geschlossen, welche dem Andenken von Leibniz gewidmet ist. Wi.

K. WEIERSTRASS. Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle. Jordan J. (4) II. 105-138.

Uebersetzt aus den Berl. Ber. 1885. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 384-388.) Lp.

C. RUNGE. Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen. Acta Math. VII. 387-392.

In der vorliegenden Notiz löst der Verfasser in sehr einfacher Weise die Aufgabe, eine willkürlich gegebene stetige Function einer reellen Veränderlichen durch eine gleichmässig convergirende Summe von rationalen Functionen darzustellen. Setzt man

$$f_n = \frac{1}{1+\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right)^{2n}},$$

so ist $\lim_{n=\infty} f_n$ gleich 0 oder 1, je nachdem x dem Intervalle $a_1 \dots a_2$ oder dem Intervalle $a_2 \dots \infty$ angehört. Hieraus folgt, unter y_1 und y_2 willkürliche Functionen von x verstanden, dass $y_2+f_n(y_1-y_2)$ für unendlich anwachsendes n die Function y_2 oder y_1 zur Grenze hat, je nachdem x in dem ersten oder zweiten der genannten Intervalle liegt. Seien nun die Functionen y_1 und y_2 schon durch Summen rationaler Functionen dargestellt, und mit $R_n^{(1)}(x)$ und $R_n^{(2)}(x)$ die Summe der ersten n Glieder dieser Ausdrücke für y_1 und y_2 bezeichnet. Dann wird, je nach dem Intervall, welchem x angehört, die rationale Function

$$R_n(x) = R_n^{(2)}(x)+f_n[R_n^{(1)}(x)-R_n^{(2)}(x)]$$

für unendlich anwachsende Werte von n die Function y_1 oder y_2 zur Grenze haben. Diese Grenze kann offenbar auch durch

die Reihe

$$R_1(x)+[R_2(x)-R_1(x)]+[R_3(x)-R_2(x)]+\cdots$$

dargestellt werden. Durch wiederholte Anwendung dieser Betrachtung kann man eine Function, welche durch Aneinandersetzung verschiedener Functionen gebildet wird, in der gewünschten Weise darstellen, wenn solche Darstellungen für die einzelnen zusammensetzenden Functionen schon bekannt sind. Insbesondere kann offenbar die Aufgabe für jede Function, deren geometrisches Bild ein gebrochener geradliniger Linienzug ist, gelöst werden. Folglich auch für jede stetige Function: denn man kann jeder Curve, welche das Bild einer stetigen Function ist, einen gebrochenen Linienzug einzeichnen, welcher sich der Curve beliebig genau anschliesst.

Der Verfasser giebt schliesslich eine bemerkenswerte Anwendung der gefundenen Darstellung willkürlicher Functionen auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

und zwar für den Fall, dass u sich für $\eta=0$ auf eine gegebene stetige Function von ξ reduciren und für positive Werte von η stetig sein soll. Hz.

M. Lerch. Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions distinctes. Darb. Bull. (2) X. 45-49.

Der periodische Kettenbruch

$$\alpha=x_1+x_2-\cfrac{x_1x_2}{x_1+x_2-\cfrac{x_1x_2}{x_1+x_2-\cdots}}$$

convergirt, wenn die absoluten Beträge von x_1 und x_2 ungleich sind, und zwar ist sein Wert gleich derjenigen der beiden Grössen x_1, x_2, welche den grösseren absoluten Betrag besitzt.

Herr Lerch beweist diesen Satz auf sehr einfache Weise und macht von demselben mehrere Anwendungen, indem er für

x_1 und x_2 rationale Functionen einer complexen Variabeln z einsetzt. Zum Beispiel: Für $x_1 = a$, $x_2 = z$, unter a eine Constante verstanden, stellt der Kettenbruch einen Ausdruck vor, welcher im Innern des Kreises mit dem Mittelpunkt $z = 0$ und dem Radius $|a|$ beständig den Wert a, dagegen ausserhalb jenes Kreises den Wert z besitzt.

Ferner ergiebt sich, wenn man $x_1 = x - 1$, $x_2 = x + 1$ setzt, wo x eine reelle Grösse bezeichnet, das Resultat, dass der Kettenbruch

$$x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cfrac{x^2-1}{2x - \cdots}}$$

stets das Vorzeichen von x darstellt, d. h. gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem x positiv oder negativ ist. Hz.

P. Painlevé. Sur le développement en série de polynômes d'une fonction holomorphe dans une aire quelconque. C. R. CII. 672-675.

Die im Titel der Note genannte Entwickelung gewinnt der Verfasser auf folgendem Wege: Es sei S ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in welchem einschliesslich der Begrenzung s die Function $F(x)$ eindeutig und stetig ist. Die Curve s möge mit jeder ihrer Tangenten nur eine einfache Berührung eingehen. Dann kann man in jedem Punkte z der Curve s einen sie berührenden Kreis construiren, welcher das Gebiet S ganz in sich aufnimmt, und man darf annehmen, dass der Mittelpunkt a dieses Kreises sich continuirlich mit z verändert, abgesehen von den etwaigen Ecken, welche die Curve s besitzen kann. Indem man nun in der Gleichung von Cauchy

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

für $\frac{1}{z-x}$ die Reihe $\sum_0^\infty {}_n \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ einsetzt, erhält man unmittel-

bar durch gliedweise Integration die Darstellung von $F(x)$ in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$, wo $P_n(x)$ eine ganze Function n^{ten} Grades von x bedeutet. Die weiteren Betrachtungen der Note beziehen sich auf den Fall, wo $F(x)$ im Innern, nicht aber auf der Begrenzung von S stetig ist, sowie auf die Begründung der erhaltenen Resultate mit Hülfe der Reihe von Lagrange. Endlich bemerkt der Verfasser, dass entsprechende Entwickelungen für die der Gleichung $\Delta V = 0$ genügenden Functionen dreier Variabeln gelten. Hz.

J. B. Pomey. Sur une fonction qui a une ligne d'infinis. Nouv. Ann. (3) V. 530-533.

Bedeutet α eine positive Zahl, setzt man für x und y alle positiven und negativen ganzen Zahlen, so ist die Doppelreihe $\sum \frac{1}{(x+\omega y)^{2+\alpha}}$ eine Function von ω, welche für imaginäre Werte von ω convergirt, aber für eine unendlich grosse Anzahl reeller Werte von ω unendlich gross wird. Wz.

M. Lerch. Ein functionentheoretischer Satz. Prag. Ber. 1885. 351-353. (Böhm.)

Verhält sich eine Function im Innern und auf der Grenze eines endlichen Gebietes $\mathfrak{A}$ regulär, und erhält sie in einem inneren Punkte einen kleineren absoluten Betrag als in den übrigen Stellen der Begrenzung von $\mathfrak{A}$, so erhält sie innerhalb $\mathfrak{A}$ jeden Wert c, dessen absoluter Betrag unter die absoluten Beträge der Functionswerte längs der Begrenzung von $\mathfrak{A}$ herabsinkt und zwar gleich oft. Hieran schliesst sich eine Anwendung auf den reellen Teil einer analytischen Function und die Verallgemeinerung eines in den Vorlesungen des Herrn Weierstrass durch elementare Hülfsmittel abgeleiteten Satzes. Std.

M. Lerch. Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions. Prag. Ber. 1885. 404-414.

Ist $z = x$ ein gewöhnlicher Punkt der analytischen Function $f(z)$, so kommt es häufig vor, dass der Quotient

$$[(z-x).f^{(\nu+1)}(x)]:[(\nu+1)f^{(\nu)}(x)]$$

mit wachsendem ν sich einer Grenze nähert, und dann giebt die Grenze von $V_\nu = (\nu+1)f^{(\nu)}(x):f^{(\nu+1)}(x)$ den Convergenzradius für die Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z-x)$. Im Falle, dass dieser Ausdruck eine analytische Function ist, wird er $e^{\varphi i}(x-a)$, wenn a der nächste kritische Punkt ist. Es werden einige einfache Beispiele behandelt, bei denen dieser Umstand eintritt, so z. B.

$$f(z) = \sum_1^n \frac{m_\nu}{z-a_\nu}; \quad f(z) = \frac{1}{a+bz+cz^2}.$$

Hierbei wird V_ν als Kettenbruch dargestellt, dessen Convergenzbedingungen sich ergeben, u. s. f. Hieran schliessen sich Betrachtungen über die Convergenz gewisser Kettenbrüche, die bei der Auflösung von Gleichungen auftreten. No.

A. Voss. Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen. Klein Ann. XXVII. 527-536.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der zuerst von Herrn Nöther vollständig untersuchten Frage, wann zwischen drei ganzen rationalen Functionen F, f, φ von zwei Variabeln x, y eine Gleichung der Form $F = af+b\varphi$ besteht, unter a, b ebenfalls ganze rationale Functionen von x, y verstanden. Man kann, ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beeinträchtigen, annehmen, dass f und φ, deren Grade in y der m^{te} und n^{te} seien, die Glieder y^m und y^n mit nicht verschwindenden Constanten multiplicirt enthalten, und dass F höchstens vom Grade $m+n-1$ ist. Es besteht dann die Relation $F.R = Af+B\varphi$, wo R die in Bezug auf y gebildete Resultante von f und φ bezeichnet, welche in bekannter Weise als Determinante dargestellt werden

kann; A und B bezeichnen ganze rationale Functionen von x und y. Wenn nun $F = af + b\varphi$ sein soll, so müssen die Factoren von R sich aus der vorhergehenden Gleichung fortheben lassen. Eine nähere Ueberlegung zeigt, dass hieraus der Satz folgt:

„Zur Darstellung von F in der Form $af + b\varphi$ ist notwendig und hinreichend, dass diejenige Form, welche aus der Sylvester'schen Resultante von f und φ entsteht, wenn sie horizontal mit den Coefficienten von F, vertical mit beliebigen Coefficienten gerändert wird, durch jeden Factor der Resultante teilbar bleibt."

Hieraus wird weiter gefolgert: „Zur Darstellbarkeit von F in der gewünschten Form ist es notwendig und hinreichend, dass in der Nähe jedes gemeinsamen Punktes von $f = 0$ und $\varphi = 0$ zwei Potenzreihen a und b nach x existiren, deren Coefficienten Polynome $(n-1)^{\text{ter}}$, $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in y sind, so dass die Relation $F = af + b\varphi$ identisch erfüllt werden kann." Dieses Kriterium ist leicht mit dem von Herrn Nöther gegebenen in Uebereinstimmung zu bringen. Die weiteren Entwickelungen der Arbeit beziehen sich auf den für die Theorie der algebraischen Curven besonders wichtigen Fall, in welchem die Curven $f = 0$, $\varphi = 0$ in den gemeinsamen Punkten keine Berührung mit einander eingehen. Für diesen Fall ergiebt sich der Satz: „Wenn für jeden gemeinsamen, etwa k-, l-fachen Punkt von f, φ der Ausdruck F bis zu den Gliedern $(k+l-2)^{\text{ter}}$ Dimension inclusive mit der Entwickelung $A'f + B'\varphi$ identisch gemacht werden kann, wo A', B' ganze rationale Functionen von x, y sind, so ist F von der Form $af + b\varphi$." Eine selbstverständliche Voraussetzung ist hierbei, dass jener gemeinsame Punkt ein k- oder l-facher Punkt von $F = 0$ ist, je nachdem $k \leqq l$ oder $k > l$ ist. Hz.

A. Adler. Zur graphischen Auswertung der Functionen mehrerer Variabeln. Wien. Ber. XCIV. 404-423.

Eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ sei als Ausdruck von z in x

und y gegeben. Betrachtet man x, y als Coordinaten eines Punkts in der Ebene, so erzeugt dieser Punkt für jedes constante z eine Linie, und die Gesamtheit dieser Linien bildet die graphische Darstellung der Function z. Das Liniensystem ändert sich, während die Tafel ihre Bedeutung behält, wenn man für x, y die Functionen $\xi(x)$, $\eta(y)$ einführt. Nun hat L. Lalanne 1846 in der Abhandlung „sur les tables graphiques" Beispiele dafür gegeben, dass jene Linien parallele Gerade werden. Hieran anknüpfend, stellt der Verfasser allgemein die Frage nach den Bedingungen für $f(x, y, z)$, unter denen es Functionen ξ, η giebt, welche ein System paralleler Geraden liefern. Er findet als notwendige, nicht ausreichende Bedingung die, dass der bekannte Quotient $w = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$ ein Product dreier Functionen einzeln von x, y, z sei, mit der Bedeutung

$$w = a \frac{\partial \xi}{\partial x} : \frac{\partial \eta}{\partial y},$$

wo a als Function von z der Gleichung

$$a\xi + \eta = b(z)$$

entspricht. Hieraus folgt leicht die Lösung, wofern eine solche existirt. Ferner stellt der Verfasser der Lalanne'schen Aufgabe eine reciproke gegenüber. Bei jener müssen die Punkte $(\xi\eta)$ in einer Geraden liegen, bei letzterer die geraden Verbindungen der Punkte $(\xi 0)$, (0η) durch einen Punkt gehen. Gleichung (3) bleibt bestehen, und es bedeuten darin $\frac{a}{b}$, $-\frac{1}{b}$ die Coordinaten von z, $\xi' = -\frac{1}{\xi}$, $\eta' = -\frac{1}{\eta}$ die Coordinaten der zwei verbundenen Punkte. H.

S. Pincherle. Sui gruppi lineari di funzioni di una variabile. Bologna Mem. (4) VI. 101-118.

S. Pincherle. Alcune osservazioni generali sui gruppi di funzioni. Bologna Mem. (4) VI. 205-214.

Referate im nächsten Jahrgang.

S. Pincherle. Studi sopra alcuni operazioni funzionali. Bologna Mem. (4) VII. 393-442.

Unter functionellen Operationen versteht man Operationen, welche, an einer analytischen Function ausgeführt, wieder eine analytische Function erzeugen. Den Gegenstand der Abhandlung bilden diejenigen Operationen, die durch eine Integration, bezogen auf eine Function zweier Veränderlichen, und längs einer bestimmten Curve hin erstreckt, dargestellt werden. Im ersten Teile der Arbeit werden Operationen ins Auge gefasst, welche durch die Gleichung definirt sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} A(x, y)\varphi(y)\,dy.$$

Hier bedeutet (c) eine geschlossene Linie, und stellt diese Gleichung eine Beziehung zwischen den Functionen $\varphi(y)$ und $\psi(x)$ fest, welche durch die Function $A(x, y)$ charakterisirt wird, die deshalb die charakteristische Function heisst; φ ist das Object der functionalen Operation, ψ ihr Resultat. Nun werden speciell zwei Gruppen von Operationen behandelt; die Operationen der einen Gruppe dienen dazu, die verschiedenen Singularitäten einer eindeutigen Function zu trennen, die andern besitzen als charakteristische Function $g\left(\frac{x}{y}\right)$, wo $g(z)$ eine ganze transcendente Function bedeutet, und dienen, auf eindeutige analytische Functionen angewandt, zur Bildung ganzer Functionen, für welche sie zugleich die Reihenentwickelungen liefern. Setzt man speciell $g\left(\frac{x}{y}\right) = e^z$, wodurch man die durch $e_\varrho\varphi(x)$ angedeutete Operation

$$e_\varrho\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} e^{\frac{x}{y}}\varphi(y)\frac{dy}{y}$$

erhält, so hat man damit eine bereits von Abel betrachtete Operation, wenn ϱ als geschlossene Curve vorausgesetzt wird. (Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. Abel, Oeuvres II édition t. II. No. XI.) Mit dieser Operation erhält man die Lösungen einer Reihe interessanter Probleme, so z. B. die Dar-

stellung einer Function, welche einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten genügt, die auch unendlich viele Terme besitzen kann, dann die Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe, welche nach den von Appell eingeführten Polynomen fortschreitet (Sur une classe des polynômes. Ann. de l'Éc. N. (2) IX, F. d. M. XII. 1880. 342.) u. s. w.

Im zweiten Teile der Arbeit werden diejenigen Operationen studirt, die unter der Annahme, dass die charakteristische Function $A(x, y)$ eine rationale und die Integrationscurve ein Kreis ist, entstehen, indem die Veränderungen der Function $\psi(x)$ untersucht werden, 1) wenn x in den verschiedenen Gebieten der Ebene variirt, 2) wenn die Integralcurve (c) sich ändert, wobei die Reihenentwickelungen für ψ angegeben werden. Endlich folgt noch eine kurze Andeutung über die Umkehr dieser Operationen, deren Ausführung einer späteren Arbeit überlassen wird, und den Schluss bilden einige Beispiele für die vorgetragene Theorie. Bm.

C. Neumann. Ueber gewisse particulare Integrale der Differentialgleichung $\varDelta F = 0$, insbesondere über die Entwickelung dieser particulären Integrale nach Kugelfunctionen. Leipz. Ber. 75-82.

Referat siehe Abschnitt VII Capitel 2D.

P. Appell. Développement en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel $\varDelta F = 0$. C. R. CII. 1439-1442.

Die Herleitung der aufgestellten Formeln bilden den Inhalt einer Abhandlung, die demnächst in Resal's Journal erscheinen wird. Wz.

L. Königsberger. Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines anderen Functionaltheorems als des Abel'schen. Kronecker J. C. 121-136.

Das Referat erscheint im nächsten Jahrgange zugleich mit dem Referate über die inzwischen erschienene Fortsetzung der Arbeit. Hz.

G. Humbert. Sur le théorème d'Abel. C. R. CIII. 919-922.

Da man die Coordinaten einer algebraischen Curve vom Geschlechte p $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ als holomorphe Thetafuchs'sche Functionen vom Grade μ ausdrücken kann (Referat S. 352), so gelingt es durch Einführung der Thetafuchs'schen Functionen, den Ausdruck für das Abel'sche Theorem

$$\sum_{i=1}^{i=mn} \int_{x_i^0}^{x_i} \frac{Q(x,y)}{R(x,y)} dx$$

direct auszuwerten. Q und R sind hier Polynome, bezüglich vom Grade q und r, und x, y sind durch die Gleichung n^{ten} Grades $f(x,y) = 0$ mit einander verbunden.

Bezeichnet man mit F und φ zwei Polynome m^{ten} Grades und mit u einen variabeln Parameter, so dass $F - u\varphi = 0$ einen Curvenbüschel bezeichnet, durch den $f = 0$ geschnitten wird, so erhält man als Schlussresultat das obige Integral in der Form

$$-\int_{u_0}^{u} \Sigma \left(\frac{Qf'_y}{(R'_x f'_y - R'_y f'_x)\left(\frac{F}{\varphi} - u\right)} \right)_\beta du,$$

wobei noch zu bemerken ist, dass $F - \varphi u_0 = 0$ diejenige Curve bedeutet, welche $f = 0$ in den Punkten $x_i^{(0)}$ schneidet und Σ sich auf alle den Curven $R = 0$ und $f = 0$ gemeinsamen Punkte bezieht. Bm.

F. Casorati. Les fonctions d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. Acta Math. VIII. 345-359.

F. Casorati. Les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales abéliennes et en particulier des fonctions inverses des intégrales elliptiques de 2me et 3me espèce. Acta Math. VIII. 360-386.

Ueber die erste Abhandlung, welche selbständig schon 1884 zu Mailand erschien, ist F. d. M. XVII. 1885. 406 berichtet worden. Es waren darin gleichsam als Beispiele die beiden einfachsten Integrale

$$z = \int_0^Z \frac{A}{Z-a}\,dZ, \quad z = \int_0^Z \left(\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b}\right) dZ,$$

deren Umkehrung periodische Functionen erzeugt, betrachtet worden. In der vorliegenden zweiten Abhandlung werden insbesondere die elliptischen Integrale untersucht, indem zugleich die analogen Resultate für die allgemeinsten Abel'schen angekündigt werden. Es wird die Form der „lieux fondamentaux" für die inversen Functionen dieser Integrale bestimmt. Der „lieu fondamental" der Function Z auf der Ebene der unabhängigen Variabeln z entsteht dadurch, dass die „monodromische Oberfläche" von Z, welche durch je eine von den singulären Punkten a etc. ins Unendliche verlaufende (gerade) Linie zerschnitten ist und die zugehörigen Wertepaare z und Z trägt, so auf die z-Ebene gelegt wird, dass jeder Wert von z über dem Punkte zu liegen kommt, der ihn in der Ebene z darstellt. M.

E. Picard. Sur les périodes des intégrales doubles. C. R. CII. 349-350, 410-412.

In den vorliegenden Mitteilungen handelt es sich um Definition und Berechnung der Perioden des Doppelintegrals

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \frac{Q\,dx\,dy}{f'_z},$$

wobei z durch die algebraische Gleichung $f(x, y, z) = 0$ als Function von x und y erklärt ist und Q eine ganze Function von x, y, z bedeutet, welche zu $f(x, y, z) = 0$ adjungirt ist. Betrachtet man den Fall, wo x, y, z sich als hyperfuchs'sche Functionen zweier Parameter u, v darstellen lassen (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 385), so kann das Doppelintegral in die Gestalt

$$\iint G(u, v)\,du\,dv$$

gesetzt werden. Sei nun S ein Gebiet von zwei Dimensionen, welches derart durch den Fundamentalraum der hyperfuchs'-schen Gruppe gespannt ist, dass die an der Grenze von S befindlichen Stellen paarweise durch Substitutionen der Gruppe zusammengehören. Das über ein solches Gebiet S ausgedehnte Integral $\int\int G(u, v) du dv$ ist dann als eine Periode des ursprünglichen Doppelintegrals zu betrachten. Diese Definition der Periode lässt sich auch auf nicht-hyperfuchs'sche Integrale übertragen. Um die Perioden zu berechnen, lasse man zunächst x constant, so dass $\int \frac{Q dy}{f'_z}$ in ein Abel'sches Integral mit der unabhängigen Variabeln y übergeht. Irgend eine Periode dieses Integrals wird von dem Werte von x abhängen und sei deshalb mit $P(x)$ bezeichnet. Das Integral $\int P(x) dx$, erstreckt über einen geschlossenen Weg, auf welchem sich $P(x)$ reproducirt, wird dann, falls es nicht verschwindet, eine Periode des Doppelintegrals sein. In dem speciellen Falle, dass sich x, y, z als vierfach periodische Functionen zweier Parameter darstellen lassen, ergeben sich als Perioden des Doppelintegrals die sechs Unterdeterminanten, welche aus den Fundamentalperioden der vierfach periodischen Functionen gebildet werden können. Hz.

O. DAVID. Sur les contours décrits autour des points singuliers d'une équation algébrique. Toul. Mém. (8) VIII. 295-343.

Unter Zugrundelegung der bekannten Formen der Reihenentwickelung algebraischer Functionen in der Umgebung ihrer singulären Punkte, wird in breiter Ausführlichkeit die Aufgabe behandelt: die Wege, die die abhängige Variable in ihrer Constructionsebene durchläuft, wenn man die unabhängige Variable eine Reihe wachsender, einander umschliessender Contouren durchlaufen lässt, analytisch zu bestimmen und graphisch darzustellen. Hr.

DE SPARRE. Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers. C. R. CII. 740-743.

Es mögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots$ die absoluten Beträge der Nullstellen einer ganzen transcendenten Function sein. Giebt es dann nicht-negative ganze Zahlen μ von der Beschaffenheit, dass die Summe

$$\frac{1}{\alpha_1^{\mu+1}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^{\mu+1}} + \cdots$$

convergirt, so heisst nach Laguerre die kleinste unter diesen Zahlen das Geschlecht jener Function (cf. F. d. M. XVI. p. 367). Herr de Sparre giebt unter der Voraussetzung, dass die Zahlen α_n unter einander verschieden und ihrer Grösse nach geordnet sind, folgenden Satz zur Bestimmung des Geschlechts: „Ist der Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n^{\omega-1}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$ endlich und von Null verschieden, so ist das Geschlecht gleich ω". Beispielsweise ist das Geschlecht von $\sin x$ gleich 1, weil $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ beständig gleich π ist. Aus dem genannten Satze leitet Herr de Sparre einen weiteren ab: Es seien die Nullpunkte der Function die Ecken eines Systems von Dreiecken, welche die Ebene einfach und lückenlos überdecken. Sei ferner der Nullpunkt mit dem absoluten Betrage α_n der Eckpunkt eines Dreiecks, welches den Flächeninhalt S_n besitzt. „Wenn nun $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n^{\omega-2} S_n$ endlich und von Null verschieden ist, so ist das Geschlecht der Function gleich ω." Ein Beispiel bilden die Nullstellen der elliptischen Functionen dritter Art (allgemeine Θ-Functionen), für welche sich das Geschlecht 2 ergiebt, da man das System der Dreiecke offenbar so wählen kann, dass S_n constant wird. Uebrigens gilt der Satz nur unter gewissen in der Note näher angegebenen Einschränkungen. Hz.

R. FRICKE. Ueber die Substitutionsgruppen, welche zu den aus dem Legendre'schen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören. Klein Ann. XXVIII. 99-118.

G. Pick. Ueber gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen. Klein Ann. XXVIII. 119-124.

Nach Herrn Klein teilt man die Untergruppen, welche aus der Gesamtheit aller ganzzahligen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ der Determinante $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ausgeschieden werden können, in Congruenzgruppen und Nichtcongruenzgruppen ein. Zu den ersteren zählen alle diejenigen, deren Substitutionen durch Congruenzen in Bezug auf einen festen Modul erklärt werden können, zu den letzteren alle diejenigen, für welche eine solche Erklärung nicht möglich ist. So z. B. bilden alle Substitutionen, welche den Bedingungen

$$\alpha\equiv\delta\equiv 1,\quad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2)$$

genügen, eine Congruenzgruppe. Beispiele für Nicht-Congruenzgruppen hatte Herr Klein schon vor langer Zeit angegeben, jedoch ohne seinen Beweis für die damit ausgesprochenen Sätze zu publiciren. Die Herren Fricke und Pick sind nun unabhängig von einander und ohne den Beweis des Herrn Klein zu kennen zu einer Begründung dieser Sätze gelangt und haben, indem sie ihre Untersuchungen in den vorliegenden Noten veröffentlichten, eine fühlbare Lücke in der Theorie der Modulfunctionen ausgefüllt. Der zu beweisende Satz besagt, dass die Gruppe, welche zu $\sqrt[s]{\lambda(\omega)}$ gehört (wo zur Abkürzung $\varkappa^2(\omega)=\lambda(\omega)$ gesetzt ist), nur dann eine Congruenzgruppe ist, wenn die ganze Zahl s einen der Werte 1, 2, 4, 8 besitzt.

Der Beweis, welchen Herr Fricke giebt, beruht auf einer vollständigen zahlentheoretischen Definition derjenigen Gruppe, welche aus allen $\sqrt[s]{\lambda(\omega)}$ und $\sqrt[s]{1-\lambda(\omega)}$ zugleich ungeändert lassenden Substitutionen besteht. Jede (mod. 2) der Identität congruente Substitution lässt sich nach Herrn Fricke stets und nur auf eine Weise in der Form darstellen:

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}=2a_0-\frac{1}{2a_1-\ldots-\frac{1}{2a_{2n}+\omega}},$$

indem man $\frac{\alpha}{\gamma}$ so in einen Kettenbruch entwickelt, dass man als Teilnenner immer die nächstliegende gerade Zahl verwendet. Definirt man nun die zahlentheoretische Function (α, β) durch die Gleichung

$$-(\alpha, \gamma) = 2a_1 + 2a_3 + \cdots + 2a_{2n-1},$$

so wird

$$-(\delta, \beta) = 2a_0 + 2a_2 + \cdots + 2a_{2n},$$

und die oben erwähnte Gruppe von $(\sqrt[s]{\lambda}, \sqrt[s]{1-\lambda})$ wird durch die Congruenzen

$$\tfrac{1}{2}(\alpha, \gamma) \equiv \tfrac{1}{2}(\delta, \beta) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } s)$$

erklärt. Zu dieser Gruppe gehören jedenfalls, welchen Wert auch s besitzen möge, die Substitutionen, für welche $(\alpha,\gamma) = (\delta,\beta) = 0$ ist. Die letzteren bilden eine Gruppe G, die auch als Gruppe von $(\log \lambda, \log(1-\lambda))$ definirt werden kann. Durch eine genauere Untersuchung der zahlentheoretischen Function (α, γ) zeigt aber Herr Fricke, dass die Gruppe G nur in Bezug auf den Zahlenmodul 48 (und daher selbstverständlich auch in Bezug auf die Teiler von 48) charakteristische Eigenschaften besitzt. Näher ausgedrückt besagt dies Folgendes: Man rechne (mod. m) zwei Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$ zu demselben Typus, wenn

$$\alpha \equiv \varepsilon\alpha', \quad \beta \equiv \varepsilon\beta', \quad \gamma \equiv \varepsilon\gamma', \quad \delta \equiv \varepsilon\delta' \qquad (\text{mod. } m),$$

wobei ε entweder $+1$ oder -1 ist; dann kommen in der Gruppe G im allgemeinen alle möglichen Typen vor. Die Ausnahmen hievon werden durch das Verhalten von G (mod. 48) erschöpft. In Bezug auf den Modul 48 befriedigen aber, wie Herr Fricke findet, die Substitutionen von G die Congruenzen

$$\alpha\gamma + 4 - 4\left(\frac{2}{\alpha}\right) \equiv \delta\beta + 4 - 4\left(\frac{2}{\delta}\right) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 16),$$

$$\alpha\beta + 3\beta\gamma + \gamma\delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 6).$$

Die beiden ersten Congruenzen definiren nun genau die Gruppe von $(\sqrt[8]{\lambda}, \sqrt[8]{1-\lambda})$, die letzte Congruenz zum Teil, aber nicht

vollständig, die Gruppe von $(\sqrt[3]{\lambda}, \sqrt[3]{1-\lambda})$. Aus alledem folgt offenbar der zu beweisende Satz, dass nur die Gruppen von λ, $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[8]{\lambda}$ durch Congruenzen vollständig definirt werden können.

Wann ist die Gruppe von $\varphi(\omega) = \sqrt[s]{\lambda(1-\lambda)}$ eine Congruenzgruppe? Soll dieses der Fall sein, so muss Gleiches für die Gruppe von

$$\varphi(\omega) : \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \lambda^{\frac{3}{s}}$$

gelten. Folglich sind nur die Werte $s = 3, 6, 12, 24$ möglich; diesen Werten entsprechen aber bekanntlich auch wirklich Congruenzgruppen.

Der Beweis des Herrn Pick berührt sich in seinem Kernpunkt mit der eben besprochenen Untersuchung des Herrn Fricke. Auch Herr Pick geht von der Betrachtung der zu $\log\lambda$ gehörigen Gruppe aus, nur beschränkt er sich auf das für seinen Zweck Notwendige, wodurch sein Beweis die möglichst concise Form erhält. Indem Herr Pick nach der Methode des Herrn Klein das Fundamentalpolygon von $\log\lambda$ bestimmt und hieraus die erzeugenden Substitutionen der Gruppe von $\log\lambda$ ableitet, gelingt es ihm mit Hülfe dieser erzeugenden Substitutionen nachzuweisen, dass die erwähnte Gruppe nur (mod. 16) charakteristische Eigenschaften besitzt. Wenn nun die Gruppe von $\sqrt[n]{\lambda}$ durch Congruenzen (mod. N) erklärt werden kann, so muss N ein Teiler von 16 sein, weil jede Substitution, welche $\log\lambda$ ungeändert lässt, auch $\sqrt[n]{\lambda} = e^{\frac{1}{n}\log\lambda}$ nicht ändert. Andererseits enthält die Gruppe von $\sqrt[n]{\lambda}$ die Substitution $\omega + 2n$. Folglich ist N durch $2n$ teilbar, also $n = 1, 2, 4$ oder 8, woraus der zu beweisende Satz folgt.

Die Functionen $\sqrt[s]{\lambda(1-\lambda)}$ werden in derselben Weise wie bei Herrn Fricke erledigt. Hz.

H. Weber. Ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Functionen. Gött. N. 359-370.

Der Autor knüpft in dieser Mitteilung an eine Bemerkung von F. Klein (Math. Ann. XX) an, welche dahin lautet, dass man mittels der Fuchs'schen Functionen zwei Veränderliche, die durch irgend eine algebraische Gleichung von einander abhängen, als eindeutige Functionen einer Variabeln darstellen kann. Diese Darstellung wird für jene algebraischen Functionen ausgeführt, welche durch eine Quadratwurzel ausdrückbar sind, indem das Problem als eine Abbildungsaufgabe formulirt wird, deren Behandlung sich an ein in Riemann's Werken unter No. XXV mitgeteiltes Fragment anschliesst. Hierdurch wird die Darstellung gegenüber den allgemeinen Sätzen von Poincaré wesentlich vereinfacht. Die Variable $\eta = u + iv$ ergiebt sich als Quotient zweier Particularlösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, während die Umkehrfunctionen die n-fach periodischen Functionen

$$\sqrt{\frac{z-\alpha_{2\nu-1}}{z-\alpha_{2\nu}}} = \Pi\left(\frac{\eta-\alpha_{2\nu-1}}{\eta-\alpha_{2\nu}}\right)$$

werden, wo ν die Werte von 1 bis n annimmt und das unendliche Product sich auf alle Null- und Unendlichkeitspunkte der Function bezieht, die durch die Substitutionen

$$\eta_\nu = A_\nu(\eta) = C_\nu + \frac{r_\nu^2}{\eta - c_\nu}$$

und ihre Wiederholungen aus den Punkten $a_{2\nu-1}$ und $a_{2\nu}$ hervorgehen. Die Convergenz dieses Productes für alle Werte von η wird durch eine geometrische Betrachtung nachgewiesen und zum Schlusse noch gezeigt, wie man für $n = 2$ die elliptischen Functionen in der von Rausenberger in seinem Lehrbuch der periodischen Functionen aufgestellten Form erhält. Bm.

H. Poincaré. Sur une transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes. C. R. CII. 41-44.

Die Reduction der Abel'schen Functionen auf niedere Grade ist in zahlreichen Arbeiten in der Weise behandelt worden, dass man die Thetafunctionen durch eine Transformation k^{ter} Ordnung auf Thetafunctionen mit weniger Variabeln reducirte. Dieses Verfahren lässt jedoch die Fälle, in denen mit einer Reduction der Functionen zugleich eine Reduction des Geschlechtes einer algebraischen Curve verbunden ist, nicht deutlich erkennen. Diesen Umstand kann man vermeiden, indem man sich der Transformation der Fuchs'schen Functionen bedient und zu einer vorgelegten Fuchs'schen Gruppe die sämtlichen Untergruppen aufstellt.

Die Note bietet hierfür einige Beispiele, indem die Substitutionsgruppen durch ihre erzeugenden Polygone nach des Verfassers Methode (Acta Math. I) dargestellt werden. Bm.

H. Poincaré. Sur une classe étendue de transcendantes uniformes. C. R. CIII. 862-864.

Es wird der Satz bewiesen: Wenn

$$x_1 = \varphi_1(u), \quad x_2 = \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(u)$$

eindeutige Functionen einer Veränderlichen sind, m irgend eine Zahl mit einem Modul > 1, und

$$x'_1 = \varphi_1(mu), \quad x'_2 = \varphi_2(mu), \quad \ldots, \quad x'_n = \varphi_n(mu)$$

ist, so kann man immer rationale Functionen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ finden, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} x'_1 &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x'_2 &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x'_n &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n); \end{aligned}$$

oder die Functionen φ besitzen ein Multiplicationstheorem. Die Functionen F dürfen in sehr ausgedehnter Weise willkürlich gewählt werden, während die Functionen φ dann immer als Quotienten zweier ganzen Functionen aufgefasst werden können.

Diese Transcendenten enthalten als speciellen Fall die elliptischen Functionen, die θ-Functionen und jene Functionen, die sich ergeben, wenn man in einer Abel'schen Function alle Veränderlichen bis auf eine verschwinden lässt. Bm.

L. Fuchs. Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eine Involution zulassen. Berl. Ber. 797-804.

Ist P ein Punkt auf einer ein algebraisches Gebilde darstellenden Riemann'schen Fläche, und geht derselbe durch eine gewisse Transformation in einen Punkt P' derselben Fläche über, so lässt sich diese Transformation so bestimmen, dass der nach derselben Transformation dem Punkte P' zugeordnete Punkt wieder mit P zusammenfällt. Einer in der Geometrie gebräuchlichen Ausdrucksweise folgend, nennt der Autor dieses gegenseitige Entsprechen ein involutorisches, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zuordnung auf algebraischem Wege erfolgt. Als Hauptresultat der genaueren Untersuchung dieses Entsprechens von Punkten der Riemann'schen Fläche ergiebt sich, dass die auf eine zweiblätterige (hyperelliptische) Riemann'sche Fläche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Substitution abgebildeten Riemann'schen Flächen die einzigen sind, welche eine solche involutorische Paarung zulassen; auch ist diese Klasse von algebraischen Gebilden durch die Eigenschaft, eine involutorische Paarung zuzulassen, vollständig und eindeutig charakterisirt. Bezüglich der Grenzen, innerhalb welcher dieses Resultat Giltigkeit hat, vergleiche man eine weitere Arbeit des Verfassers, die in den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1887 erschienen ist, sowie eine Abhandlung des Herrn Hurwitz in den Göttinger Nachrichten 1887. Bm.

G. Humbert. Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. Jordan J. (4) II. 239-329.

Die Veranlassung zu dieser inhaltreichen Abhandlung ist der von Poincaré bewiesene Satz, dass sich die Coordinaten der Punkte einer algebraischen Curve durch Fuchs'sche Functionen eines Parameters darstellen lassen. Der Verfasser bedient sich derselben Methode zur Untersuchung der Curven von beliebigem Geschlechte, die er in einer früheren Arbeit auf die Curven vom Geschlecht 1 anwandte. Die Einführung der Fuchs'schen Functionen gestattet, die in der Clebsch'schen Theorie bei Behandlung nicht adjungirter Curven notwendige Einführung Abel'scher Integrale dritter Gattung zu vermeiden, indem nicht sowohl die zwischen den Coordinaten der Schnittpunkte bestehenden Relationen, als vielmehr jene Beziehungen untersucht werden, die zwischen den Parametern der gewissen Bedingungen unterworfenen Schnittcurven bestehen, wodurch es möglich wird, die Form der allgemeinen Gleichung der Berührungscurven aufzustellen und daraus die geometrischen Eigenschaften dieser Curven selbst abzuleiten.

Zur Behandlung dieser Fragen werden in fünf Paragraphen die wichtigsten Eigenschaften der Fuchs'schen und Thetafuchs'schen Functionen vorausgeschickt. Zunächst wird die Existenz der von Poincaré (Acta Math. I) übergangenen Thetafuchs'schen Functionen vom Grade $m = 1$ nachgewiesen und für sie ein analytischer Ausdruck hergestellt. Auf Grund desselben wird dann gezeigt, dass es den p adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung einer Curve vom Geschlechte p entsprechend p unabhängige holomorphe Thetafuchs'sche Functionen ersten Grades giebt, durch welche sich jede holomorphe Thetafuchs'sche Function ersten Grades linear ausdrücken lässt. Ferner ergiebt sich aus dem Abel'schen Theorem für Integrale erster Gattung der wichtige Satz: „h Fuchs'sche Functionen von der Ordnung n mit denselben Unendlichkeitsstellen lassen sich auf $p+h-n$ verschiedenen Weisen als Quotienten zweier holomorphen Thetafuchs'schen Functionen erster Ordnung ausdrücken, wenn

$$p + h - n > 0$$

ist.“

Analog ergiebt sich der allgemeine Satz, dass jede Fuchs'sche

Function durch den Quotienten zweier holomorphen Thetafuchs'schen Functionen dargestellt werden kann. Nach diesen Voruntersuchungen gelingt es, die Coordinaten einer Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p in die Form:

$$x_i = a_1^{(i)} \Theta_1 + a_2^{(i)} \Theta_2 + \cdots + a^{(i)}_{(2\mu-1)(p-1)} \Theta_{(2\mu-1)(p-1)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zu bringen, wo Θ_1, Θ_2 u. s. w. $(2\mu - 1)(p - 1)$ linear unabhängige Thetafuchs'sche holomorphe Functionen und $a_k^{(i)}$ Constante bedeuten. Diese Thetafunctionen sind vom Grade μ, wenn die Beziehung besteht $2\mu(p-1) - n - p \geqq 0$, im Gegenfalle aber vom Grade $\mu + 1$ ausser für gewisse specielle Curven n^{ter} Ordnung, für die sie ebenfalls den μ^{ten} Grad nicht übersteigen. — Hierauf folgt die Untersuchung der Schnittpunkte einer Curve vom Geschlechte p mit einer adjungirten Curve, und werden die bereits aus Clebsch's Arbeiten bekannten Sätze mit Hülfe der Thetafuchs'schen Functionen neu begründet. Die Grundlage für die folgende Untersuchung der Punktgruppen auf einer algebraischen Curve bildet dann der Umstand, dass das Studium der mit einer gegebenen Gruppe $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ äquivalenten Gruppen identisch ist mit dem Studium der Null- und Unendlickeitsstellen der Fuchs'schen Functionen, welche die Unendlichkeitspunkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$ haben, da man nur eine Fuchs'sche Function bilden kann, welche zu Unendlichkeitsstellen die Argumente der Punkte einer Gruppe und zu Nullstellen die Argumente der Punkte einer dazu äquivalenten Gruppe hat. Desgleichen ist das Studium der Specialgruppen identisch mit dem Studium der Thetafuchs'schen holomorphen Functionen ersten Grades, woraus der Riemann-Roch'sche Satz gefolgert wird.

Im weiteren ist besonders die eingehende Untersuchung der Berührungscurven hervorzuheben, deren Gleichungsform in Fuchs'schen Functionen angegeben wird, wodurch man die Erweiterung einiger Sätze von Clebsch sowie eine neue Gattung von Functionen erhält, die auf's engste mit den Fuchs'schen Functionen zusammenhängen. Im speciellen wird dann die Anzahl vierpunktig berührender Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung an Curven vierter Ordnung und der fünfpunktig be-

rührenden Kegelschnitte an Curven fünfter Ordnung angegeben, und werden dabei einige in Clebsch's Vorlesungen (herausgegeben von Lindemann) p. 882 angeführte Zahlen richtig gestellt. Endlich folgt eine Betrachtung der hyperelliptischen Curven, wobei es sich zeigt, dass, wenn man durch die zwei Punkte einer g_2^1 auf der Curve eine Gerade legt und die weiteren $n-2$ Schnittpunkte derselben mit der Curve ins Auge fasst, die Parameter der n Schnittpunkte sämtlich durch eine Relation zwischen Fuchs'schen Functionen von der Ordnung 2 und der Ordnung $n-2$ verbunden sind und mit den Unendlichkeitsstellen der Fuchs'schen Functionen zusammenfallen. Dadurch ergeben sich dann einige Sätze über die Curven, welche von solchen Geraden umhüllt werden.

Zum Schlusse werden noch interessante Theoreme über Curven vom Geschlechte 2 entwickelt, so über Curven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt, deren Coordinaten sich als holomorphe Thetafuchs'sche Functionen dritter Ordnung darstellen, ferner über die Curven fünfter Ordnung mit vier Doppelpunkten, über Curven sechster Ordnung und endlich über jene speciellen Curven, deren Punkte sich durch Thetafuchs'sche Functionen erster Ordnung ausdrücken. Bm.

S. Pincherle. Sur une formule dans la théorie des fonctions. Stockh. Öfv. XLIII. 51-55.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

O. Tognoli. Intorno ad un problema della geometria elementare. Batt. G. XXIV. 354-363.

In der vorliegenden Note versucht Herr Tognoli einen neuen Beweis für die Unmöglichkeit der Quadratur des Zirkels zu geben. Er überträgt zunächst in richtiger Weise die von dem Referenten (Klein Ann. XXII. pag. 211) für die Lösungen der Differentialgleichung $axy'' = by' + y$ entwickelten Integralsätze auf die Lösungen der Differentialgleichung $ay'' = by' + y$. Indessen sind die Anwendungen, welche Herr Tognoli von den bei dieser Uebertragung gewonnenen Sätze auf die Zahlen e und π macht, nicht richtig. Die von ihm pag. 362 betrachteten Grössen werden freilich mit wachsendem m unendlich klein, sind aber nicht notwendig ganze Zahlen, was erforderlich ist, um schliessen zu können, dass jene Grössen für genügend grosse Werte von m verschwinden. Uebrigens sind die Hülfsformeln des Herrn Tognoli leicht aus denjenigen abzuleiten, welche Herr Weierstrass (Berl. Ber. Dec. 1885) zu seinem sehr einfachen Beweise der Lindemann'schen Sätze verwendet. Hz.

F. Hofmann. Une application élémentaire du théorème d'Abel. Nouv. Ann. (3) V. 279-284.

Besteht zwischen den drei Grössen x_1, x_2, x_3 die Gleichung

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 0,$$

so ist

$$x_3 = (\sqrt{x_1}\sqrt{1-x_2} + \sqrt{x_2}\sqrt{1-x_1})^2.$$

Dies wird benutzt, um das Additionstheorem für $\cos x$ herzuleiten. M.

E. Marchand. Sur le changement de variables. Ann. de l'Éc. Norm (3) III. 137-188, 343-388.

Es handelt sich um das Problem der independenten Darstellung der n^{ten} Ableitung einer Function bei Ersetzung der unabhängigen Veränderlichen durch eine neue. Die Abhandlung

beginnt mit einem historischen Teil, in welchem die Wichtigkeit des „allgemeinen Gesetzes der Reihen“ von Wronski (cf. z. B. F. d. M. 1874 VI. 237) hervorgehoben wird, aus welchem sich alle hierher gehörigen Resultate herleiten lassen. Mehrere aus dieser Quelle fliessende allgemeine Formeln liegen den in der vorliegenden Abhandlung ausführlich auseinandergesetzten Untersuchungen des Verfassers zu Grunde, und derselbe giebt verschiedene Methoden an, wie man diese Formeln zweckmässig verwenden kann, um die geforderte Darstellung in den Fällen, wo die neuen Variablen durch die elementaren Functionen u^{μ}, e^{u}, Lu, $\sin u$, $\operatorname{tg} u$, $\arcsin u$, $\operatorname{arctg} u$ eingeführt werden, systematisch und vollständig zu Ende zu führen. T.

O. Rausenberger. Ueber die einfachste Behandlungsweise des allgemeinen binomischen Satzes. Ber. des Freien deutschen Hochstiftes 1885/86. 328-330.

Der Verfasser hat in seinem „Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln“ (F. d. M. 1884. XVI. 334) die Herleitung des allgemeinen binomischen Satzes, wie Cauchy in der Analyse algébrique, auf die durch directe Rechnung abgeleitete bekannte Gleichung gestützt:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\cdots+\binom{m}{k-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Um die hierbei erforderliche Rechnung zu vermeiden, wendet er jetzt einen Schluss an, den er für neu zu halten scheint, der aber gerade für die obige Gleichung in allen Auflagen von Baltzer's „Elementen der Mathematik“ gedruckt steht.

Lp.

J. Wolstenholme, B. H. Rau, N. Sarkar. Solution of question 7568. Ed. Times. XLIV. 40-41.

Unter der Bedingung

$$\sin(\beta+\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\alpha+\beta) = 0$$

gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{\{\Sigma\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\}^2}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\{\Sigma\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}^2}{-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)} = 4,$$

$$\{\Sigma\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\}\{\Sigma\sec\alpha-\sec(\alpha+\beta+\gamma)\} = 4,$$

$$\{\Sigma\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}\{\Sigma\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}(\alpha+\beta+\gamma)\} = 4,$$

$$\left(\frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left(\frac{\cos\beta\cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

etc. Lp.

J. Griffiths, D. Edwardes, T. R. Terry. Solutions of questions 8381 & 8448. Ed. Times XLV. 109-110.

Beweise der Formeln

$$(1)\qquad 1+2\Sigma(-1)^s\cos^2\frac{s\pi}{2n} = 0 \qquad \left(\begin{matrix}s = 1, 2, \ldots, n-1\\ n>1\end{matrix}\right),$$

$$(2)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}n\sec n\theta = \sec\theta\left(1+2\Sigma\frac{(-1)^s\cos\frac{s\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{s\pi}{n}\sec^2\theta}\right),$$

($s = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$; n = ungerade Primzahl).

Lp.

A. Mukhopâdhyây, B. H. Rau, B. Easton, E. Catalan. Solution of question 7831. Ed. Times. XLV. 90, 105.

Ist

$$u = \sin\theta + \tfrac{1}{5}\sin 5\theta + \tfrac{1}{9}\sin 9\theta + \cdots \text{ in inf.},$$

so ergiebt sich durch unzulässige Differentiation und Summirung der erhaltenen Reihe $du = \dfrac{d\theta}{4\cos\theta}$, mithin durch Integration

$$u = \tfrac{1}{4}\log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta}.$$

Mit diesem falschen Resultate vergleicht Herr Catalan die beiden Formeln, welche, wie er glaubt, von Lobatto herrühren und für $x \leqq 1$, $\varphi > 0$, $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ gelten:

$$x\sin\varphi - \tfrac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \tfrac{1}{5}x^5\sin 5\varphi - \cdots = \tfrac{1}{4}\log\frac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2},$$

$$x\sin\varphi + \tfrac{1}{3}x^3\sin 3\varphi + \tfrac{1}{5}x^5\sin 5\varphi + \cdots = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}.$$

Aus ihnen folgt für $x = 1$:

$$\sin\varphi + \tfrac{1}{5}\sin 5\varphi + \tfrac{1}{9}\sin 9\varphi + \cdots = \tfrac{1}{8}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} + \tfrac{1}{8}\pi.$$

Lp.

Saalschütz. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) V. 47-53.

Setzt man $\xi = e^{ix}$, $\xi^2 = t$ und wendet auf die Function

$$f(x) = \frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)}$$

den Cauchy'schen Satz:

$$F(t) = \Sigma\,\text{rés}\frac{F(z)}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)}{z-t}\,dz$$

an, so ergiebt sich, wenn als Integrationsweg ein Kreis mit sehr grossem Radius gewählt wird, für $f(x) = F(t)$ eine Darstellung, aus welcher sich durch Trennung des reellen Bestandteils vom imaginären eine schon von Hermite (Nouv. Ann. (3) IV.) gefundene Formel und folgende neue ableiten lässt:

$$f(x) = \frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\cot(x-a_1)$$
$$+\frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\cot(x-a_2)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\cos(a_1+a_2+\cdots+a_n-b_1-b_2-\cdots-b_n),$$

woraus sich durch Specialisirung noch andere Relationen gewinnen lassen. Wz.

O. Stolz. Ueber die Partialbruchzerlegung der Function $e^{az}:(e^z-1)$. Innsbruck Ber. 84-87.

Herr Worpitzky hat mit Hülfe eines Cauchy'schen Satzes die Function $e^{az}:(e^z-1)$ in Partialbrüche zerlegt (Schlömilch Z. XXIX; cfr. F. d. M. XVI. 1884. 394). Herr Stolz benutzt zu diesem Zwecke einen Satz von Briot und Bouquet und entwickelt ausserdem diese Function nach dem von Herrn Mittag-Leffler angegebenen Satze in eine Reihe nach rationalen Functionen von z. Wz.

E. H. von der Heyden. Elementare Anwendungen der Hyperbelfunction. Pr. Realg. Essen.

Der Herr Verfasser hat die hauptsächlichsten Formeln für die Hyperbelfunctionen und deren Anwendungen, die er mit Obersecundanern und Primanern durchgenommen hat, zusammengestellt. Vorangeht die Entwickelung der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, alsdann sind die Formeln für die Hyperbelfunctionen den entsprechenden für die cyklometrischen Functionen gegenübergestellt. Die Anwendungen betreffen folgende Aufgaben: $\log(a+b)$ und $\log\sqrt{a^2+b^2}$ aus $\log a$ und $\log b$ zu berechnen, die Wurzeln der Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ und die der Gleichung $x^3-3px-2q=0$ zu bestimmen. Angefügt ist eine Tabelle der Hyperbelfunctionen und ihrer Logarithmen nach Ligowski (Taschenbuch der Mathematik). M.

S. REALIS. Sur quelques relations nouvelles entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. Mathesis. VI. 7-12.

Aus der Betrachtung der Productentwickelung der in Rede stehenden Functionen leitet man die Beziehungen her:

$$\mathrm{Ch}\,x < e^{\frac{1}{2}x^2} < \sec x, \quad \frac{\mathrm{Sh}\,x}{x} < e^{\frac{1}{6}x^2} < \frac{x}{\sin x}.$$

Mn. (Lp.)

J. C. und W. KAPTEYN. Die höheren Sinus. Wien. Ber. XCIII. 807-868.

Die höheren hyperbolischen und elliptischen Sinus werden für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ durch die Functionen:

$$\varphi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!} + \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} + \cdots,$$

$$\psi_\mu(z) = \frac{z^\mu}{\mu!} - \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} - \cdots$$

definirt, während $\varphi_\mu(z) = \varphi_{\mu-n}(z)$ für $\mu > n$ sein soll. Im ersten Teile der Abhandlung werden diese Functionen als endliche Summen von Exponentialfunctionen dargestellt, deren Coefficienten gewöhnliche sinus resp. cosinus sind. Als Additionstheoreme ergeben sich für $\varphi_\mu(u \pm v)$ endliche Summen von Producten $\varphi_{\mu-\lambda}(u)\varphi_\lambda(v)$ oder $\varphi_{\mu-\lambda}(u)\psi_\lambda(v)$, je nachdem n gerade oder ungerade ist; setzt man hierin $u = v$, so erhält man n algebraische Relationen zwischen den $2n$ elliptischen und hyperbolischen Sinus. Nach Herleitung eines dem Moivre'schen analogen Satzes werden die endlichen Summen $\varphi_\mu(z) + \varphi_\mu(2z) + \cdots + \varphi_\mu(mz)$ durch die Functionen $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)$ rational ausgedrückt. Aus der Darstellung durch endliche Summen von Exponentialfunctionen werden die Wurzeln von $\varphi_\mu(z)$ und $\psi_\mu(z)$ gefolgert und Sätze über ihre Verteilung abgeleitet. Mittels Cauchy'scher Methoden wird $\varphi_\mu(z)$ durch ein unendliches Product dargestellt, ferner $\log\varphi_\mu(z)$, $\varphi_\mu(z):\varphi_\nu(z)$ und $1:\varphi_\mu(z)$ in unendliche Reihen entwickelt, wobei sich ergiebt, dass die Coefficienten dieser Reihen in einer einfachen Beziehung zu den Bernoulli'schen Zahlen

stehen. Endlich wird für die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dz^n} - m^n u = F(z)$$

das allgemeine Integral

$$u = \sum_{\mu=0}^{n-1} C_\mu \varphi_\mu(mz) + \frac{1}{m^{n-1}} \int_0^z \varphi_{n-1}\{m(z-\lambda)\} F(\lambda)\, d\lambda$$

aufgestellt, wo C_μ eine Constante bedeutet.

Im zweiten Teile der Abhandlung wird zunächst eine Function $f(z)$, welche sich durch eine Potenzreihe von der Form:

$$f^\mu(0) \frac{z^\mu}{\mu!} + f^{\mu+n}(0) \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + f^{\mu+2n}(0) \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} + \cdots$$

darstellen lässt, einer Reihe von höheren Sinus:

$$b_1 \varphi_\mu(z) + b_2 \varphi_\mu\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1} z\right) + b_3 \varphi_\mu\left(\frac{\varrho_3}{\varrho_1} z\right) + \cdots$$

gleichgesetzt, wo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ die absoluten Beträge der Wurzeln von $\varphi_\mu(z) = 0$ bedeuten und ϱ_1 kleiner als $\varrho_2, \varrho_3, \ldots$ ist. Durch Vergleichung der Coefficienten erhält man unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Grössen b_m. Setzt man in den p ersten dieser Gleichungen $b_{p+1} = b_{p+2} = b_{p+3} = \cdots = 0$, so lassen sich $b_1, b_2, \ldots, b_p$ bestimmen; lässt man p in dem so erhaltenen Ausdruck für b_m unendlich gross werden, so erhält man für b_m den Ausdruck:

$$b_m = \frac{n\varrho_1^{\mu-\nu-1}}{\varrho_m^{\mu-\nu} \varphi'_\nu(\varrho_m)} \int_0^{\varrho_1} \varphi_{n-1}\left(\frac{\varrho_m}{\varrho_1}(\varrho_1 - \lambda)\right) f^{\mu-\nu}(\lambda)\, d\lambda.$$

Mit Hülfe der Residuenrechnung Cauchy's wird dann auch die Function $F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ in eine Reihe höherer Sinus entwickelt:

$$nF(z) = \frac{\nu}{n} W_0 + \sum_{m=1}^{\infty} W_m; \quad \alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$W_m = \frac{n}{\varrho_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha^{k\nu}} \int_0^{\varrho_1 \alpha^k} \frac{\varphi_{\nu-1}\left(\frac{\varrho_m}{\varrho_1}(\varrho_1 \alpha^k - \lambda + z)\right)}{\varphi_{\nu-1}(\varrho_m)} F(\lambda)\, d\lambda.$$

Um diese Formel streng zu beweisen, wird die gefundene Reihe summirt; dadurch ergiebt sich der Satz: Jede Function,

die holomorph ist innerhalb des regelmässigen Polygons, dessen Ecken die n Punkte $\varrho_\iota \alpha^k$ sind, ist innerhalb dieses Polygons entwickelbar in Reihen von höheren Sinus, deren Argumente sich verhalten wie die absoluten Beträge der Wurzeln von $\varphi_\nu(z) = 0$.

Wz.

M. Tychomandritzky. Die n^{te} Differenz der logarithmischen Function. Chark. Ges. 42-44. (Russisch.)

Beweis, dass

$$\Delta^n \log U_x = \log \frac{U_{x+nh}\,(U_{x+(n-2)h})^{C_2^n}\,(U_{x+(n-4)h})^{C_4^n}}{(U_{x+(n-1)h})^{C_1^n}\,(U_{x+(n-3)h})^{C_3^n}} \cdots,$$

wo C_m^n den m^{ten} Binomialcoefficienten bezeichnet. Wi.

B. G. Imschenetzky. Ueber einige Anwendungen der verallgemeinerten Bernoulli'schen Functionen. Petersb. Abhandl. LII. (Russisch.)

Herr Imschenetzky hat in seiner früheren Abhandlung: „Sur la généralisation des fonctions de Jacques Bernoulli" (Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersb. T. XXI. S. F. d. Math. 1883. XV. 370) die Eigenschaften der sogenannten verallgemeinerten Bernoulli'schen Functionen $\varphi_{n,k+1}$ und $\psi_{n,k+1}$ auseinandergesetzt. Im § 1 seiner neuen Arbeit giebt der Verfasser diese Ausdrücke der verallgemeinerten Bernoulli'schen Functionen und ihrer Coefficienten mittels bestimmter Integrale.

Im § 2 folgt eine strenge und einfache Auflösung der Abel'schen Aufgabe, die endliche mehrfache Summe $\Sigma^n \varphi(x)$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Es ergiebt sich nämlich:

$$\overset{n+1}{\Sigma}\mathfrak{F}(x) = \sum_{y=a}^{x} \mathfrak{F}(y) \left\{ \varphi_{n,n}\left(\frac{x-y}{h}\right) + A_{n,n-1} \right\} + X_n,$$

wo X_n eine Function mit der Periode h oder ein Polynom des Grades n ist. Wenn man jetzt die bestimmte endliche Summe, welche auf der rechten Seite der Formel steht, nach der Euler'-

schen Formel in eine Reihe zerlegt und dann die Coefficienten der Function $\varphi_{n,n}$ mit Hülfe der bestimmten Integrale ausdrückt, so erhält man die Formel von Abel mit einfacheren Bezeichnungen. Am Ende des Paragraphen zeigt der Verfasser, dass sein Beweis an Strenge und Einfachheit diejenigen von Abel selbst, Schlömilch und Tortolini übertrifft.

Der § 3 ist den Formeln

$$\Delta^n y_x = (e^{hD}-1)^n y_x \quad \text{und} \quad h^n D^n y_x = [e(1+\Delta)]^n y_x$$

gewidmet. Zuerst wird ein strenger Beweis der ersten Formel gegeben. Der Ausgangspunkt bleibt das Cauchy'sche Integral

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

und es werden mit der Reihe für $\Delta^n y_x$ selbst auch die Bedingungen ihrer Convergenz erhalten. Die Reihe bleibt convergent für alle Werte von x und h, wenn mod. h kleiner ist als der n^{te} Teil des Abstandes von x bis zum nächsten kritischen Punkt der Function $f(x)$. Wenn ferner die Function $f(x)$ für alle Werte der complexen Veränderlichen x stetig und endlich bleibt, erhält man die zweite Formel $h^n D^n y_x = \log[1+\Delta]^n y_x$ als die Folge der Formel $\Delta^n y = (e^{hD}-1)^n y_x$.

Im § 4 macht der Verfasser von dem Verfahren, welches schon früher von ihm (Battaglini G. 1870) zur Herleitung der Euler'schen Formel und zur angenäherten Berechnung bei Quadraturen angewandt wurde, jetzt Anwendung auf allgemeinere Formeln, welche von den verallgemeinerten Bernoulli'schen Functionen abhängen. Als Ausgangspunkt dieses Verfahrens dient die allgemeine Formel der partiellen Integration:

$$\int uv^{(n)}dx = uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v +$$

$$(-1)^n \int u^{(n)} v\,dx + C.$$

Wenn man in dieser Formel zwischen den Grenzen 0 und r integrirt, $v = \varphi_{\nu-1,n}(x) + A_{\nu-1,n-1}$, $u = f'(a+kx)$ setzt (die Function f soll mit allen ihren Ableitungen bis zu der Ordnung $n+1$ endlich und stetig bleiben), erhält man die folgende Formel:

$$f(a+kr)-f(a)=\tfrac{1}{2}kr[f'(a+kr)+f'(a)]-A_{\nu-1,1}k^2[f''(a+kr)-f''(a)]$$
$$-A_{\nu-1,2}k^3[f'''(a+kr)+f'''(a)]+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}A_{\nu-1,n-1}k^n[(-1)^n f^{(n)}(a+kr)-f^{(n)}(a)]$$
$$+(-1)^n k^{n+1}\int_0^\nu [\varphi_{r-1,n}(x)+A_{r-1,n-1}]\,f^{(n+1)}(a+kx)dx.$$

Für den Fall $r=1$, $\dfrac{df(x)}{dx}=\mathfrak{F}(x)$ erhält man die Euler'sche Formel:

$$\int_a^{a+k}\mathfrak{F}(x)dx=\tfrac{1}{2}k[\mathfrak{F}(a+k)+\mathfrak{F}(a)]-A_1k^2[\mathfrak{F}'(a+k)-\mathfrak{F}'(a)]$$
$$-A_3k^4[\mathfrak{F}'''(a+k)-\mathfrak{F}'''(a)]-\cdots$$
$$-A_{2m-3}k^{2m-2}[\mathfrak{F}^{(2m)}(a+k)-\mathfrak{F}^{(2m)}(a)]$$
$$-A_{2m-1}k^{2m+1}\mathfrak{F}^{(2m)}(a+k\theta),\quad (0\leqq\theta\leqq 1).$$

Das Restglied hat hier die Form, welche zuerst von Ostrogradsky (Mém. Acad. St. Pétersb. 1841) und dann von Malmsten (Crelle's J. XXXV. 1847) gefunden war.

Für den Fall $r-1=n$, $kr=n$, $\dfrac{df(x)}{dx}=\mathfrak{F}(x)$ hat man die allgemeinere Formel

$$\int_0^{a+h}\mathfrak{F}(x)dx=\tfrac{1}{2}h\,[\mathfrak{F}(a+h)+\mathfrak{F}(a)]$$
$$-\frac{C_2^n}{n(n-1)}\left(\frac{h}{n+1}\right)^2[\mathfrak{F}'(a+h)-\mathfrak{F}'(a)]$$
$$+\frac{C_3^n}{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{h}{n+1}\right)^3[\mathfrak{F}''(a+h)+\mathfrak{F}''(a)]-\cdots$$
$$-\left(\frac{h}{n+1}\right)^n[(-1)^n\mathfrak{F}^{(n-1)}(a+h)-\mathfrak{F}^{(n-1)}(a)]$$
$$\pm\frac{max\binom{n}{p}}{(n+1)^n}[\mathfrak{F}^{(n-1)}(a+h)-\mathfrak{F}^{(n-1)}(a)]\,h^n\theta\quad(0<\theta<1).$$

(C_k^n bezeichnet die Summe aller Producte aus k verschiedenen Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ..., n.)

Der Vergleich des Restgliedes dieser Formel mit demjenigen der Euler'schen zeigt, dass diese Formel bei gleichen Bedingungen in Bezug auf die Function $\mathfrak{F}$ immer grössere Annäherung giebt als die Euler'sche.

Am Ende wird auch aus den allgemeinen Formeln die For-

mel Boole's (Diff. Equations Ch. VI. p. 108) mit dem Restglied in der von Darboux gefundenen Form (Resal J. (3) II.) abgeleitet.

Wi.

O. Hölder. Ueber eine transcendente Function. Gött. N. 514-522.

Die Function, welche Herr Hölder untersucht, ist durch die Differentialgleichung $y' = x\pi \operatorname{cotg}(x\pi) \, . \, y$, mit der Bedingung $y = 1$ für $x = 0$, definirt. (Sie lässt sich also auch durch die Gleichung $y = F(x) = e^{\int_0^x x\pi \operatorname{cotg}(x\pi) \, . \, dx}$ erklären.) Aus der Partialbruchzerlegung von $\operatorname{cotg} x\pi$ folgert Herr Hölder die Darstellung von $F(x)$ in Form eines unendlichen Productes:

$$F(x) = e^x \cdot \frac{\Pi \left\{ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}{\Pi \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}, \quad (n = 1, 2, \cdots, \infty),$$

aus welcher Darstellung der analytische Charakter der Function $F(x)$ ersichtlich ist. Die hauptsächlichsten Eigenschaften von $F(x)$ leitet Herr Hölder aus der Differentialgleichung ab, bemerkt jedoch, dass dieselben auch auf Grund der Product-Entwickelung von $F(x)$ bewiesen werden können. Diese Eigenschaften sprechen sich in folgenden Gleichungen aus:

$$(1) \qquad F(-x) = \frac{1}{F(x)}; \qquad (2) \qquad F(x) F(1-x) = 2 \sin x\pi;$$

$$(3) \qquad \prod_{\nu=0}^{r-1} \left[F\left(x + \frac{\nu}{r}\right) \right]^r = 2^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{\nu=1}^{r-1} \left[\sin\left(x + \frac{\nu}{r}\right)\pi \right]^\nu F(rx).$$

In der letzten Gleichung bedeutet r irgend eine positive ganze Zahl.

Auf die Function $F(x)$ lässt sich die von Euler, Legendre und Abel betrachtete Function

$$\psi(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots = -\int_0^z \log(1-z) \, d \log z$$

zurückführen. Man setze nämlich $z = 1 - e^{-2\pi i x}$, so ist

$$F(x) = e^{\frac{1}{2}\pi i x^2 + \frac{1}{2\pi i}\psi(z)},$$

wobei die Variabilität von x so zu beschränken ist, dass $|z| < 1$ wird, weil nur für diese Werte von z die Reihe $\varepsilon(z)$ convergirt. Aus der letzten Gleichung folgen noch asymptotische Werte für $F(\pm i\beta)$, unter β eine positiv unendlich werdende Grösse verstanden. Hz.

B. Elliptische Functionen.

G. H. Halphen. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Première partie. Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries. Paris. Gauthier-Villars. 8°. VIII u. 492.

Es ist ein eigenartiges Werk, welches uns hier vorliegt. Der Herr Verfasser hat, wie er in dem Vorwort betont, hauptsächlich für diejenigen geschrieben, welche die elliptischen Functionen praktisch anwenden wollen, also für solche, welche sich mit den exacten Wissenschaften befassen „sans cultiver les Mathématiques". Den Mathematiker von Fach mag es interessiren, welche Stellung die elliptischen Functionen in der allgemeinen Functionentheorie einnehmen, wie ihre Theorie nach allgemeinen functionentheoretischen Principien streng begründet wird; hier kommt es nur darauf an, den Leser möglichst schnell in den Stand zu setzen, Aufgaben aus der Mechanik, der Physik, der Geometrie oder Algebra, die auf elliptische Functionen führen, mit Leichtigkeit zu lösen, numerisch fertig bis auf vorgeschriebene Decimalstellen. Und diesen Zweck hat der Verfasser auch erreicht. Schon die Einführung in die elliptischen Functionen ist charakteristisch. Durch einen Punkt C innerhalb eines Kreises werden alle möglichen Sehnen MCM' gezogen und auf diesen werden von C aus nach beiden Seiten Strecken CN, CN' abgetragen, die proportional der reciproken Quadratwurzel aus der Länge der Sehne MM' sind; alsdann liegen die Endpunkte N, N' auf einer ge-

schlossenen convexen Curve. Zu einem Bogen des ursprünglichen Kreises gehört ein bestimmter Sector der von dieser Curve begrenzten Fläche; wird letzterer als Argument u genommen, so ist der entsprechende Kreisbogen, abgesehen von einem constanten Factor, die entsprechende Amplitude: $\varphi = \operatorname{am} u$. Die trigonometrischen Functionen von φ sind nun die zunächst für reelle Werthe des Argumentes u definirten elliptischen Functionen. Sofort ergiebt sich die Bedeutung von k^2, die reelle Periode $4K$ u. a. Aber die Rechnung mit $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$ interessirt nur noch die, welche die alten Werke von Jacobi u. a. lesen (Seite 23); wir bedienen uns praktischer der „Bezeichnung" von Weierstrass, der Function $\wp u$, die mit $\sin\operatorname{am} u$ durch die Formel

$$\wp u = -\frac{1+k^2}{3\lambda} + \frac{1}{\lambda \operatorname{sn}^2 \frac{u}{\sqrt{\lambda}}}$$

verbunden ist (wo λ eine positive Constante ist), und die der Differentialgleichung ($\wp u = y$)

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)$$

genügt. In einem ausführlichen Referat über das Halphen'sche Buch in Darboux Bull. (2) XI. 29 wird die Benutzung der Weierstrass'schen „Bezeichnungen" gebilligt, weil dies système de notations introduit une plus grande symétrie dans l'exposition et dans les formules. Dass Herr Weierstrass nicht bloss neue Bezeichnungen eingeführt, sondern der ganzen Theorie eine festere functionentheoretische Grundlage gegeben, erfährt der Leser nicht. Von den von Herrn H. A. Schwarz herausgegebenen „Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Vorlesungen des Herrn Professor Weierstrass" wird nun ein ausgiebiger Gebrauch gemacht.

Nachdem im ersten Capitel die elliptischen Functionen mit reellem Argument eingeführt sind, wird $\wp(a+i\alpha)$ mit Hülfe des Additionstheorems, also $\wp u$ für ein complexes Argument definirt und die doppelte Periodicität gewonnen. Alsdann werden die Fundamentaleigenschaften für eine negative Discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

erweitert. Die Multiplicationsformel

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}(u)\psi_{n-1}(u)}{\psi_n^2(u)}$$

wird aufgestellt, und das Problem der Umkehrung bildet den Schluss des vierten Capitels. Das fünfte behandelt die Function $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$, wofür Herr Halphen $\zeta(u)$ setzt; das sechste führt die Function σu ein. Im Capitel VII folgt die Zerlegung in einfache Elemente und in Factoren; Capitel VIII definirt die ϑ-Functionen und giebt die Beziehungen zwischen den Sigma- und den Thetafunctionen, Capitel IX behandelt die Ableitungen nach den Invarianten und den Perioden. Im X. Capitel werden die Perioden durch hypergeometrische Reihen dargestellt, Capitel XI enthält die Entwickelung der elliptischen Functionen mit doppeltem Index, die folgenden die Entwickelungen der Functionen σ und ϑ in einfache Producte und in trigonometrische Reihen. Das letzte (XIV.) Capitel enthält eine Anwendung der allgemeinen Theorie der Functionen auf die der elliptischen Functionen. Wer die sechs ersten Capitel studirt hat, sagt der Herr Verfasser in der Vorrede, kennt die elliptischen Functionen so weit, dass er sie ebenso leicht wie die trigonometrischen Functionen auf Mechanik, Physik, Geometrie und Integralrechnung anwenden kann.

Dem ersten Bande sollen zwei andere folgen. Der zweite wird die hauptsächlichsten Anwendungen bringen; der dritte wird die Theorie der Transformation und deren Anwendungen auf Algebra und höhere Arithmetik enthalten; letzterer ist nur für „Mathematiker“ bestimmt. M.

A. R. Forsyth. Note on Weierstrass's theory of doubly periodic functions. Mess. XV. 165-183.

Ein Bericht über die Weierstrass'sche Theorie nach den „Formeln und Lehrsätzen“ von Schwarz. Die wichtigen grundlegenden Formeln, die in den ersten Abschnitten dieses Werkes vorkommen, werden einzeln von Grund aus nach einer Methode bewiesen, die sich auf die Theorie der doppeltperiodischen Func-

tionen in Liouville's Vorlesungen (Borchardt J. LXXXVIII; F. d. M. XII. 1880. 347) und in Briot und Bouquet's Théorie des fonctions elliptiques stützt. Glr. (Lp.)

M. P. Appell. Sur un problème d'interpolation relatif aux fonctions elliptiques. Darb. Bull. (2) X. 109-115.

Die Lagrange'sche Interpolationsformel giebt bekanntlich die Lösung der Aufgabe: „Es soll ein rationaler Bruch n^{ten} Grades gebildet werden, dessen n Unendlichkeitsstellen bekannt sind und der für $(n+1)$ besondere Werte der Variabeln gegebene Werte annimmt.“ Im Vorliegenden wird folgende analoge Aufgabe gelöst: „Eine elliptische Function n^{ter} Ordnung herzustellen, deren in einem Elementarparallelogramm gelegene Unendlichkeitsstellen bekannt sind und die für n der Variabeln beigelegte Werte gegebene Werte annimmt.“ Es werden die Fälle discutirt, in denen die Aufgabe unmöglich ist, und wann sie unendlich viele Lösungen gestattet. M.

A. R. Forsyth. On Weierstrass's doubly-periodic functions. Quart. J. XXII. 1-43.

Es werden diejenigen Functionen P_1, P_2, P_3 untersucht, die ebenso aus den Weierstrass'schen Functionen σ_1, σ_2, σ_3 abgeleitet werden, wie $\wp u$ aus σu, und die resp. gleich

$$\wp(u+\omega),\quad \wp(u+\omega''),\quad \wp(u+\omega')$$

sind, und partielle Differentialgleichungen für σ_1, σ_2, σ_3 als Functionen der Perioden und der Invarianten hergeleitet. Die Resultate der Arbeit von Frobenius und Stickelberger, Kronecker J. XCII. 311—327 (F. d. M. XIV. 1882. 388) werden benutzt; doch scheint der Herr Verfasser die Abhandlung des Herrn Weierstrass: Zur Theorie der elliptischen Functionen, Berl. Ber. 1882. 443—451 (F. d. M. XIV. 387) nicht zu kennen. M.

Bukreieff. Ueber einige Anwendungen des Mittag-Leffler'schen Theorems. Kiew. Nachr. 1885. 225-232.

Es wird das berühmte Theorem auf die Herleitung der Eigenschaften der Weierstrass'schen Function $\wp u$ angewandt.

Wi.

G. Pick. Zur Theorie der an einer allgemeinen Curve dritter Ordnung hinerstreckten Integrale und der von ihnen abhängenden elliptischen Functionen. Wien. Ber. XCIV. 71-74.

Es werden die Weierstrass'schen Functionen $\wp u$, $\wp' u$, σu durch die beiden Grenzen des beliebig an einer Curve dritter Ordnung hinerstreckt gedachten Integrals erster Gattung u ausgedrückt und daraus allgemeinere Formeln abgeleitet, die im Gegensatze zu den ersteren nicht von zwei, sondern von drei Punkten der Curve abhängen und welche die von Herrn Brioschi (Borchardt J. LXIII. 32) gegebene Transformation des Integrals erster Gattung in die Weierstrass'sche Normalform als speciellen Fall enthalten.

M.

A. Pringsheim. Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der elliptischen Functionen. Klein Ann. XXVII. 151-157.

Da die Thetareihen, durch deren Quotienten die Umkehrungsfunctionen des elliptischen Integrales erster Gattung dargestellt werden, nur existiren, d. h. convergent sind, wenn das Periodenverhältnis $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{K'i}{2K}$ einen wesentlich positiven imaginären Teil besitzt, so ist der Satz, dass jenes Periodenverhältnis niemals reell ist, für die ganze Theorie von der grössten Wichtigkeit. Man darf nicht, wie es meistens geschieht, nachdem man die elliptischen Functionen als eindeutige Umkehrungen des Integrals erster Gattung eingeführt und gezeigt hat, dass sie die Perioden ω, ω' haben, aus dem Satze: „Eine eindeutige doppeltperiodische Function mit reellem Periodenverhältnis existirt nicht" schliessen, dass nun dieses besondere $\frac{\omega'}{\omega}$ eo ipso

imaginär sei, sondern es muss nachgewiesen werden, dass $\frac{\omega'}{\omega}$ auch nicht reell und rational sein kann. Dies geschieht hier auf ganz einfache Weise mit Hülfe der Formeln

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{\omega}{2}\right) = -\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{sn}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = \infty.$$

M.

A. Buchheim. Note on theorems in Weierstrass's theory of elliptic functions. Mess. XVI. 35-36.

Einfache Beweise für die Formel $\eta\omega'-\eta'\omega = \pm\pi i$ und für den Ausdruck für $\sigma_1(u)$ als unendliches Product. Glr. (Lp.)

H. Bruns. Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Klein Ann. XXVI. 234-252.

Wiederabdruck einer im Jahre 1875 zum Doctorjubiläum von V. F. Buniakowsky von der physiko-mathematischen Facultät der Universität Dorpat dargebrachten Festschrift. Siehe F. d. M. VII. 274. M.

C. Isenkrahe. Ueber die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung für ihre reellen Moduln. Schlömilch Z. XXXI. 34-43.

Durch ein mechanisches Problem wird der Herr Verfasser darauf geführt, das Integral K für seinen reellen Modul umzukehren, d. h. den Modul durch den Wert von K auszudrücken. Es kann dies auf verschiedene Weise geschehen, u. a. mit Hülfe der Reihe

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1+(\tfrac{1}{2})^2 x+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^3+\cdots\right)$$

oder mit Hülfe der Reihe für $\vartheta_3(0)$:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\cdots,$$

oder durch Umkehrung dieser Formel unter Anwendung der Lagrange'schen Recursionsformel. Wenn es sich um grössere Werte von K handelt, so wird das Inversionsproblem durch eine Limitationsmethode gelöst, bei der die Grössen $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ und q' statt der K und K' eingeführt werden. Für diese kann man schreiben:

$$q = e^{-\pi \frac{K(q')}{K(q)}}, \quad q' = e^{-\pi \frac{K(q)}{K(q')}},$$

und dann

$$q'_1 = e^{-\pi \frac{K(q)}{K(q')}}, \quad q'_2 = e^{-\pi \frac{K(q)}{K(q'_1)}}, \quad q'_3 = e^{-\pi \frac{K(q)}{K(q'_2)}},$$

etc. bilden, wodurch sich

$$q' = \operatorname{Lim} e^{-\pi \frac{K(q)}{K(q'_n)}}$$

ergiebt. k wird dann durch die Formel

$$k = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q'^{2k-1}}{1 + q'^{2k-1}} \right)^4$$

gefunden. M.

C. Isenkrahe. Ueber die Inversion der von Legendre definirten vollständigen elliptischen Integrale zweiter Gattung für ihre reellen Moduln. Schlömilch Z. XXXI. 178-191.

Ebenso wie in der obigen Arbeit führt ein mechanisches Problem auf die Umkehrung des Integrals E, d. h. auf die Aufgabe, k durch E auszudrücken. Auch hier giebt es verschiedene Methoden. Setzt man $4\left(1 - \frac{2E}{\pi}\right) = u$ und $k^2 = x$, so führt die bekannte Entwickelung des Integrals E auf die Reihe:

$$u = x + (\tfrac{1}{2})^2 3x^2 + \left(\frac{1.3}{4.6}\right)^2 5x^3 + \left(\frac{1.3.5}{4.6.8}\right)^2 7x^4 + \cdots,$$

die mit Hülfe der Lagrange'schen Umkehrungsformel gelöst werden kann. Der Verfasser giebt nun auch hier ein Limitations-Verfahren, das schneller zum Ziele führt, und bei dem wieder q statt K eingeführt wird. Das Resultat ist die Reihe:

$$q = u + 5u^2 + 34u^3 + 266u^4 + 2250u^5 + 19992u^6 + \cdots$$

Für das noch übrig bleibende Intervall $1 < E < 1,1$ wird eine ähnliche Methode mit Einführung von q' gegeben. M.

C. Isenkrahe. Inversion des von Weierstrass definirten vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung. Schlömilch Z. XXXI. 241-246.

Zur Inversion des Weierstrass'schen Integrals J könnte man die Reihe

$$J = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{2})^2k^4 + \tfrac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^6 + \tfrac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \cdots\right)$$

nach Lagrange umkehren und so k als Function von J darstellen. Allein durch Vermittelung der Grösse q erhält man auch hier bequemere Formeln. Es wird der Ausdruck

$$\frac{2J}{\pi} = \frac{8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nq^n}{1-q^{2n}}}{\dfrac{2K}{\pi}}$$

benutzt, wodurch für $\dfrac{J}{4\pi} = u$ das Resultat sich ergiebt:

$$q = u + 2u^2 - 20u^4 - 66u^5 + 84u^6 + \cdots$$

Durch eine den früheren ähnliche Limitationsmethode aber wird die Inversion, wie der Verfasser zeigt, in einem weiteren Gebiete anwendbar. M.

F. Brioschi. Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellittiche. Brioschi Ann. (2) XIV. 238-240.

Schon Legendre (Traité des fonctions elliptiques. Tome I. Chap. 13) hat gezeigt, dass der Wert eines vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung, wenn man ihn als Function des Moduls k betrachtet, einer gewissen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, und Herr Kummer (Ueber die hypergeometrische Reihe, Crelle's Journal XV. 39—83 und 127—172. § 29) hat zuerst darauf hingewiesen, dass diese Differentialgleichung als specieller Fall in jener enthalten ist, welche Gauss (Dis-

quisitiones generales circa seriem infinitam etc. Art. 38) für die hypergeometrische Reihe aufgestellt hat. — Die analogen Untersuchungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der ihnen von Herrn Weierstrass (Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, herausgegeben von Schwarz. Art. 56) gegebenen Normalform hat Herr Bruns (Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Festschrift, Dorpat 1875 und Klein Ann. XXVII. 234 bis 252) durchgeführt. — Der Herr Verfasser teilt in vorliegender Note eine elegante Methode mit, wie man zu den erwähnten, von Herrn Bruns auf Seite 238 unter (14) aufgestellten Differentialgleichungen für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung gelangen kann. Kr.

P. Appell. Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 9-42.

Anwendungen der Methode, die der Herr Verfasser für die Zerlegung der doppeltperiodischen Functionen dritter Gattung in einfache Elemente gegeben hat (Ann. de l'Éc. Norm. (3) I u. II, s. F. d. M. XV. 1883. 340; XVI. 1884. 383; XVII. 1885. 409). Es kommt hauptsächlich darauf an zu zeigen, wie man in dem Falle, wo $m[\text{in } G(z+2ik') = e^{-\frac{m\pi i}{k}} G(z)] > 0$, die ganze Function $G(z)$ bestimmt werden kann; und zwar wird diese Bestimmung zuerst nach der Methode der unbestimmten Coefficienten bewirkt, alsdann nach der von Herrn Hermite für die Functionen erster und zweiter Gattung benutzten Methode. Die betrachteten Functionen sind folgende:

$$\frac{1}{H(z)H_1(z)}, \quad \frac{1}{\Theta(z)\Theta_1(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta_1(z)},$$
$$\frac{1}{H_1(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H(z)\Theta(z)}, \quad \frac{1}{H_1(z)\Theta_1(z)};$$

die Entwickelung der Functionen

$$\frac{1}{\Theta^2(z)}, \quad \frac{1}{H^2(z)}, \quad \frac{1}{\Theta_1^2(z)}, \quad \frac{1}{H_1^2(z)}$$

ist von Herrn Hermite gegeben und in der oben genannten Abhandlung des Herrn. Appell (Ann. de l'Éc. Norm. (3) II. 18) reproducirt. Ferner dienen als Beispiele die Functionen

$$\frac{H^2(z)}{\Theta(z)}, \quad \frac{\Theta_1^2(z)H_1(z)}{H(z)},$$

und nach der zweiten Methode wird die Function $\frac{H(z)H_1(z)}{\Theta(z)}$ entwickelt.

M.

J. Griffiths, G. B. Mathews. Solution of question 8172. Ed. Times XLV. 22.

Beweis der Formel:

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2n}\cdot\operatorname{dn}\frac{3K}{2n}\cdot\operatorname{dn}\frac{5K}{2n}\cdots\operatorname{dn}\frac{2n-1}{2n}K = (k')^{\frac{1}{2}n},$$

worin n eine ganze Zahl bedeutet.

Lp.

E. Catalan. Sur un développement de l'intégrale elliptique de première espèce et sur une suite de nombres entiers. Belg. Mém. XLVI. 22 S.

Mit Benutzung der Legendre'schen Bezeichnungen ($F(c)$ für K, c für k, $b = 1-2x$ für k') findet der Verfasser:

$$F_1(c) = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty P_n\left(\frac{1-b}{16}\right)^n = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty Q_n x^n$$

$$= \sum_0^\infty x^n \int_1^\infty \frac{X_n\,dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2-1}},$$

und es ist

$$P_n = 8^n Q_n, \quad P_0 = 1, \quad P_1 = 8,$$

$$n^2 P_n - 8(3n^2-3n+1)P_{n-1} + 128(n-1)^2 P_{n-2} = 0.$$

Die Zahlen Q_n sind ganz; X_n bezeichnet das Legendre'sche Polynom. Der Verfasser ermittelt manche Eigenschaften der Zahlen P_n, Q_n.

Mn. (Lp.)

---

de Presle. Sur le développement des fonctions elliptiques en séries trigonométriques. S. M. F. Bull. XIV. 131-135.

Es werden zuerst die sn z, cn z, dn z durch Ableitungen der Logarithmen von Summen elliptischer Functionen dargestellt, nämlich

$$\pm k \operatorname{sn} z = D \log(\operatorname{dn} z \mp k \operatorname{cn} z),$$
$$\pm ik \operatorname{cn} z = D \log(\operatorname{dn} z \pm ik \operatorname{sn} z),$$
$$\pm i \operatorname{dn} z = D \log(\operatorname{cn} z \pm i \operatorname{sn} z);$$

alsdann werden diese Summen in Producte verwandelt, und endlich, unter Anwendung der Formeln in den Fundamenta oder Briot et Bouquet, Traité des fonctions elliptiques No. 297. p. 482, für die $D \log \operatorname{sn} z$ etc. die Entwickelungen von sn z, cn z, dn z nach $\sin \frac{(2n+1)\pi z}{\omega}$, $\cos \frac{(2n+1)\pi z}{\omega}$ und $\cos \frac{2(n+1)\pi z}{\omega}$ gewonnen. M.

H. Gyldén. Några nya utvecklingar af de elliptiska funktionerna. Stockh. Öfv. 197-203.

Der Verfasser geht von den folgenden und damit analogen Reihenentwickelungen aus:

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{K'} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{\frac{\pi u}{K'}} \sum \frac{q'^{\mu}}{1+q'^{2\mu} e^{\frac{\pi u}{K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{K'}} \sum \frac{q'^{\mu}}{1+q'^{2\mu} e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right\},$$

wo

$$q' = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$$

eingeführt wird. Die weitere Entwickelung dieser Formeln beruht auf dem Umstand, dass jeder Ausdruck

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}$$

unter der Form

$$\frac{e^{-x}(1-\frac{1}{2}e^{-2x})}{1+\frac{1}{2}e^{-2x}(1-e^{-2x})}$$

geschrieben werden kann. Das letzte Glied im Nenner beträgt für positive x im Maximum $\frac{1}{8}$ und es kann demnach mit Vor-

teil nach den Potenzen dieser Grösse entwickelt werden. Es wird dann

$$\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = U^0(x) + U'(x) + \cdots,$$

wo

$$U^{(\mu)}(x) = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} e^{-(2\mu+1)x}(1-\tfrac{1}{2}e^{-2x})(1-e^{-2x})^\mu,$$

woraus sich unter anderen folgende Formel ergiebt:

$$\operatorname{dn} u = \frac{\pi}{K'} \text{rés.} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{0}^{\infty} U^{(s)}\left(\frac{\pi}{2K'}(u+2\mu K)\right).$$

Um die Anwendung dieser Entwickelungen zu erläutern, leitet der Verfasser durch Integration von diesem Ausdrucke eine Entwickelung von $\operatorname{am} u$ ab, welche folgendermassen zusammengesetzt wird

$$\operatorname{am} u_1 = \sum_{s=0}^{\infty} F^{(s)},$$

$$F^{(s)} = -\left(\frac{u_1-\delta}{K}+\tfrac{1}{2}\right)A^{(s)}(0) + A^{(s)}(\delta) + \sum_{1}^{\infty} A^{(s)}(2uK+\delta) - \sum_{1}^{\infty} A^{(s)}(2uK-\delta),$$

$$\delta = u_1 - 2\mathrm{m}K < 2K, \quad A^{(s)}(u) = \int U^{(s)}\left(\frac{\pi u}{2K'}\right)du.$$

M.-L.

M. Lerch. Beiträge zur Theorie elliptischer Functionen. Prag. Ber. 391-429. (Böhmisch.)

Der Verfasser geht von der Jacobi'schen Reihe $\Sigma e^{\pi i(\tau\nu^2+2u\nu)}$ aus, leitet ihre Periodicitätseigenschaften ab, und geht zur elementaren Untersuchung der Nullstellen und zur Productzerlegung über; dann wird die Cauchy-Poisson'sche Transformationsformel abgeleitet und die Einführung der übrigen drei Jacobi'schen ϑ-Functionen motivirt; der Verfasser bedient sich der Doppelindexbezeichnung $\vartheta_{gh}(u,\tau)$. Dann wird gezeigt, dass die Function $\frac{d^2 \lg \vartheta_{gh}(u,\tau)}{du^2} = P_{gh}(u|\tau)$ eine doppeltperiodische ist, und

dass sie die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})$$

befriedigt, unter a_{gh} die Grösse $P_{gh}(0\,|\,\tau)$ verstanden.

Weitere Betrachtungen beziehen sich auf die Einführung der Jacobi'schen Functionen $\operatorname{sn}v$, $\operatorname{cn}v$, $\operatorname{dn}v$, bei welcher Gelegenheit mehrere Beziehungen unter den a_{gh} und die Relationen $\vartheta'_{11} = \pi\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}$, $\vartheta^2_{00}\vartheta_{11}(u)^2 + \vartheta^2_{01}\vartheta_{10}(u)^2 = \vartheta^2_{10}\vartheta_{01}(u)^2$ etc. abgeleitet werden.

Die Partialbruchzerlegung der Function $P_{11}(u\,|\,\tau)$ führt zur Betrachtung der Weierstrass'schen $\wp$-Function, womit die Abhandlung schliesst. Std.

J. W. L. Glaisher. Formulae in elliptic functions. Mess. XVI. 67-86.

Elementare Systeme von Formeln bezüglich der zwölf elliptischen Functionen $\operatorname{sn}x$, $\operatorname{cn}x$, ..., $\operatorname{sd}x$, $\operatorname{nd}x$. In allen Fällen wird das vollständige System von zwölf Gleichungen gegeben, weil der Verfasser der Meinung ist, dass das Charakteristischste bei den elliptischen Functionen verloren geht, wenn man es versucht, alle Resultate mit Hülfe von nur einer der vier Gruppen von Functionen auszudrücken. Als Beispiele der Arten von Formeln seien die folgenden erwähnt:

$$(\log\operatorname{sn}x)'(\log\operatorname{sn}x)'' = k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x - \operatorname{ns}x\operatorname{ds}x\operatorname{cs}x,$$
$$\tfrac{1}{2}(\log\operatorname{sn}x)''' = k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x + \operatorname{ns}x\operatorname{ds}x\operatorname{cs}x,$$

wo die Accente Ableitungen nach x bedeuten.

$$\frac{d}{dx}\log\frac{d}{dx}\log\operatorname{ns}x = -2\operatorname{ns}2x,\quad \int dx\operatorname{ns}x = \log(\operatorname{ds}x - \operatorname{cs}x),$$
$$-\operatorname{ds}^2x\operatorname{cs}^2x + \operatorname{cs}^2x\operatorname{ns}^2x + \operatorname{ns}^2x\operatorname{ds}^2x = 2\operatorname{ns}x\operatorname{ds}x\operatorname{cs}x\operatorname{ns}2x,$$
$$-\frac{d}{dx}\log(k'^2\operatorname{ns}x + \operatorname{ds}x - k^2\operatorname{cs}x) = -\operatorname{ns}x + \operatorname{ds}x + \operatorname{cs}x.$$

In jedem Falle ist die angeführte Formel eine aus einem Systeme von vier oder zwölf. Glr. (Lp.)

J. C. Fields. A proof of the elliptic-function addition-theorem. Newcomb Am. J. VIII. 287-288.

Die Euler'sche Gleichung wird mit Hülfe des Factors

$$\frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi - k^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

integrirt. Es ist schon oft hervorgehoben worden, dass diese Methode den Nachteil hat, dass man nicht sieht, wie man zu dem integrirenden Factor kommt, ohne das Resultat zu kennen.

M.

M. da Silva. Sur trois formules de la théorie des fonctions elliptiques. Darb. Bull. (2) X. 78-80.

Nach der Methode, die Herr Hermite (Acta Math. I. 368) angewandt hat, um die drei Grössen

$$\operatorname{sn}x\operatorname{sn}(x+a),\quad \operatorname{cn}x\operatorname{cn}(x+a),\quad \operatorname{dn}x\operatorname{dn}(x+a)$$

in einfache Elemente zu zerlegen, werden hier die folgenden drei Smith'schen Gleichungen bewiesen, in denen $u+v+r+s=0$ ist,

$$k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}r\operatorname{cn}s - k^2\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{sn}r\operatorname{sn}s - \operatorname{dn}u\operatorname{dn}v + \operatorname{dn}r\operatorname{dn}s = 0,$$

$$k'^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v - k'^2\operatorname{sn}r\operatorname{sn}s + \operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\operatorname{cn}r\operatorname{cn}s - \operatorname{cn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}r\operatorname{dn}s = 0,$$

$$\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\operatorname{dn}r\operatorname{dn}s - \operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\operatorname{sn}r\operatorname{sn}s + \operatorname{cn}r\operatorname{cn}s - \operatorname{cn}u\operatorname{cn}v = 0.$$

M.

---

de Sparre. Cours sur les fonctions elliptiques. Première partie. Brux. S. sc. X. B. 129-200.

1. Einige Eigenschaften der doppeltperiodischen Functionen. (Auszug aus dem Werke von Briot u. Bouquet.) 2. Beweis für die Identität der vermittelst der Umkehrung der Integrale definirten elliptischen Functionen und derjenigen, welche durch die Functionen Θ und H definirt werden. 3. Zusammenstellung einiger als bekannt vorausgesetzter Formeln über die elliptischen Functionen. 4. Die doppeltperiodischen Functionen zweiter Art lassen sich durch Θ und H ausdrücken. Beweis der Herren Hermite und Mittag-Leffler. 5. Halphen'sche Formel über ge-

wisse Reihenentwickelungen. 6. Anwendung. 7. Entwickelung in trigonometrische Reihen für die Functionen

$$\frac{H'(0)\,\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x)},\quad \frac{H'(0)\,H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)},\quad \frac{H'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{H_1(\omega)\,\Theta(x)},$$
$$\frac{H'(0)\,H_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)}.$$

8. Von der Function $Z(u)$; Additionstheorem etc. 9. Die Functionen Al von Weierstrass. Reihenentwickelung nach den Potenzen der Veränderlichen. 10. Von den Weierstrass'schen Functionen $\wp$ und σ. 11. Additionstheorem der Functionen $\wp$.

Mn. (Lp.)

J. W. L. Glaisher. Note on the functions $Z(u)$, $\Theta(u)$, $\Pi(u,a)$. Lond. M. S. Proc. XVII. 152-157.

Auf einfachem Wege werden die drei Formeln

$$Z(u)+Z(v)-Z(u+v) = k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v),$$
$$\frac{\Theta(u+a)\,\Theta(u-a)\,\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(a)} = 1-k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2a,$$
$$\Pi(u,a) = aZ(u)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

unabhängig von einander aus den Elementen der elliptischen Functionen hergeleitet und hernach der Zusammenhang zwischen den beiden ersten erwiesen.

M.

A. Mukhopâdhyây. A note on elliptic functions. Quart. J. XXI. 209-219.

Mit Hülfe confocaler Kegelschnitte wird hier ein Beweis des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung gegeben. Es wird die partiell imaginäre Transformation

$$\lambda = c\sin\varphi,\quad \mu = c\sin\psi$$

auf die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2-\mu^2)(c^2-\mu^2)}} = 0$$

angewandt; dasselbe leistet die Transformation

$$\lambda = c\sec\varphi,\ \mu = c\sec\psi \ \text{ und } \ \lambda = c\sec\varphi,\ \mu = c\cos\psi.$$

M.

M. Lerch. Sur un théorème relatif à la théorie des fonctions elliptiques. Teixeira J. VIII. 3-10.

In den Berliner Monatsberichten des Jahres 1880 zeigt Herr Weierstrass, dass die Function

$$\Theta(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{\nu^2 \tau \pi i}$$

nur für solche Werte von τ besteht, deren imaginärer Teil positiv ist. In dem vorliegenden Aufsatz giebt Herr Lerch einen neuen Beweis dieses Satzes. Der Beweis gründet sich auf die Eigenschaften des Ausdruckes

$$n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2},$$

in dem n und r ganze Zahlen sind und α eine reelle positive Grösse, und auf einen Satz von Gauss.

Der Verfasser zeigt auch, dass der Beweis, den Poisson und Cauchy bei Verwendung des vorstehenden Ausdrucks gegeben haben, nicht genau ist, und ergänzt ihn.

Die Arbeit schliesst mit einem neuen Beweise des folgenden Satzes: Die Function $\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu}$ existirt nur für Werte von z, deren Modul kleiner als 1 ist. Tx. (Hch.)

A. Cayley. Note on a formula relating to the zero-value of a theta-function. Kronecker J. C. 87-88.

Specialisirung einer von Herrn Thomae (Beitrag zur Theorie der ϑ-Functionen, Kronecker J. LXXI. 266. 1870) gegebenen Formel für $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$, für die einfache Thetafunction. Es wird hier (wenn $(2\pi i)^p$ verbessert wird in $(\pi i)^p$)

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{K'(1+k)}{\pi}}.$$

M.

R. Voss. Theorie der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Hoppe Arch. (2) IV. 385-428.

Die Riemann'sche Thetaformel und Charakteristiken Theorie ist Ausgangspunkt mehrerer Arbeiten von Prym und Krazer geworden, über die das Referat in F. d. M. XIV. 1882. 842 verglichen werden möge. In einer der dort besprochenen Arbeiten hat Herr Krazer die Theorie der Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet worden sind, behandelt. Später hat Herr Krause (Math. Ann. XXVI. 569): „Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind" die Prym'schen Formeln für den Fall zweier Veränderlichen in einer neuen und einfachen Weise abgeleitet und zugleich unabhängig von jenen Formeln Methoden zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen gegeben. An diese Arbeit knüpft Herr Voss an für die Behandlung der Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken sich aus gebrochenen Zahlen zusammensetzen lassen. Die Haupteigenschaften der neu eingeführten Thetafunctionen

$$\vartheta_a\begin{bmatrix} k \\ k_1 \end{bmatrix}(v) = \vartheta_a\left(v + \frac{k}{n}\tau + \frac{k_1}{n}\right)e^{\pi i \frac{k}{n}\left(2v + \frac{2k_1}{n} + \frac{k}{n}\tau\right)} \qquad (\alpha = 1,2,3,4)$$

werden abgeleitet, die Substitutionstabelle zur Ueberführung einer Function in die andere aufgestellt und eine Methode gegeben, die sich zur Parameterdarstellung unserer Function im allgemeinen Falle wie für die Nullwerte der Argumente darbietet. Alsdann werden die speciellen Fälle $n=3$ und $n=5$ behandelt. Schliesslich werden die Prym'schen Fundamentalformeln auf eine einfache und directe Art abgeleitet. M.

M. Krause. Zur Transformation der elliptischen Functionen. Leipz. Ber. 39-43.

Es wird auf folgende Weise ein allgemeines Additionstheorem gewonnen, das als Grundlage der Transformationstheorie dienen kann. Das Product

$$P = \prod_{i=1}^{n} \vartheta_3(v_i, \tau),$$

worin die Grössen $v_1, \ldots, v_n$ beliebige von einander unabhängige

Argumente bedeuten, ist, als Function von v_i aufgefasst, eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null und genügt der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial v_1^2} = 4\pi i \frac{\partial P}{\partial \tau}.$$

Herr Krause setzt nun

$$\vartheta_3[k](v, m\tau) = \vartheta_3(v + k\tau, m\tau) e^{\frac{\pi i k}{m}(2v+k\tau)}$$

und

$$v_i' = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \cdots + a_{in} v_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und untersucht, wann sich ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\prod_{i=1}^{n} \vartheta[k_i](v_i', m_i \tau)$$

bilden lässt, welches, als Function von v_i aufgefasst, wiederum eine Thetafunction erster Ordnung mit der Charakteristik Null ist, während für die ganzen Zahlen a_{ik} die Bedingungsgleichungen bestehen:

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = n,$$
$$a_{\nu 1} + a_{\nu 2} + \cdots + a_{\nu n} = 0 \qquad (\nu > 1).$$

Die Zahlen $m_2, m_3, \ldots, m_n$ sind willkürliche ganze Zahlen und $m_1 = n$. M.

A. Migotti. Aufstellung einer Differentialgleichung, welcher die Wurzeln der Gleichungen für die Teilung der elliptischen Perioden als Functionen des Moduls genügen. Wien. Ber. XCIV. 748-751.

Die Grössen

$$(1) \qquad \alpha = \operatorname{sn}\left(\frac{p\omega + q\omega'}{n}, k\right),$$

worin ω und ω' die Perioden von $\operatorname{sn}(u, k)$ und p, q, n ganze Zahlen bedeuten, sind algebraische Functionen von k und genügen einer und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$k(1-k^2)\Delta(\alpha)^2 \frac{d^2\alpha}{dk^2} + k(1-k^2)(1+k^2-2k^2\alpha^2)\alpha\left(\frac{d\alpha}{dk}\right)^2$$
$$+(1-\alpha^2)[1-3k^2+k^2(1+k^2)\alpha^2]\frac{d\alpha}{dk} - (1-k^2\alpha^2)^2 k\alpha = 0$$

als particuläre Integrale. Dies wird hier mit Hülfe der Formel bewiesen, die Abel (Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, chap. III) für die Reduction des Integrals dritter Gattung

$$\Pi(x,\alpha) = \alpha \Delta(\alpha) \int^x \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\Delta(x)},$$

dessen Parameter α mit dem Modul k in einer Beziehung von der obigen Form (1) steht, auf ein Integral erster Gattung und den Logarithmus einer algebraischen Function von x gegeben hat.

M.

R. Winzer. Zur Transformation der elliptischen Functionen, insbesondere der Transformation dritten und neunten Grades. Diss. Rostock. 55 S.

Die Dreiteilung der elliptischen Functionen ist von Heinze (Beiträge zur Anwendung der Dreiteilung der elliptischen Functionen auf die Theorie der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung, Hoppe Arch. LXX. 1-29; s. F. d. M. XV. 1883. 407) auf eine zweiteilige Curve dritter Ordnung, in welcher ein Wendepunkt das Argument $u = 0$ hat, angewandt worden. Das allgemeinere Problem, die Wendepunkte zu bestimmen, wenn ein beliebiger Punkt der Curve, nicht ein Wendepunkt, gegeben ist, welches die Lösung der allgemeinen Dreiteilungs-Gleichung erfordert, ist Veranlassung zu der vorliegenden Dissertation geworden. Es wird nach Briot und Bouquet (Théorie des fonctions elliptiques, 1875), doch allgemeiner und einfacher, die Transformationsgleichung eines beliebigen ungeraden Grades mit Hülfe von Wurzelzeichen gelöst; alsdann werden algebraische und transcendente Lösungen, so weit möglich, einander zugeordnet und besonders die bei der Lösung auftretenden Constanten (Teilwerte, Moduln und Multiplicatoren) untersucht und ähnliche Beziehungen zwischen ihnen hergestellt, wie sie Herr Krause für die hyperelliptischen Functionen (Festschrift, Rostock 1886) gegeben hat. Ausführlicher wird die Transformation dritten und die aus zwei solchen zusammengesetzte neunten Grades behandelt. Die Anwendung der Dreiteilung auf die Bestimmung

der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung schliesst die Arbeit. M.

J. GIERSTER. Bemerkung zu dem Aufsatze: „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad“. Klein Ann. XXVI. 590-592.

Verbesserung einiger Unrichtigkeiten, die sich in dem Aufsatze Klein Ann. XIV. 537-544 gelegentlich der Entwickelung des Zusammenhangs der Hülfsgrössen τ mit dem Multiplicator M eingestellt haben. M.

L. KRAUS. Beitrag zur Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen. Casop. XV. 52. (Böhmisch.)

Enthält Bemerkungen und Ergänzungen zu Klein's Abhandlung, welche unter dem obigen Titel im XII. Bd. der Math. Ann. erschienen ist. Std.

R. LIPSCHITZ. Sur une formule de M. Hermite. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Kronecker J. C. 66-70.

Die Entwickelungen der Producte von Potenzen von Thetafunctionen, die Herr Hermite gegeben hat, führen zu interessanten zahlentheoretischen Sätzen. Herr Lipschitz teilt hier solche arithmetischen Folgerungen mit, die er aus der Hermite'schen Formel

$$\vartheta_3(0)\,\vartheta_0^8(0) = 1+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}}{(1+q^{2n})^2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(1-q^{2n})q^{n^2}}{1+q^{2n}},$$

wo

$$\vartheta_3(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{a^2}, \quad \vartheta_0(0) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^b q^{b^2}$$

ist, gewonnen hat. M.

L. KRONECKER. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Ber. 701-780.

In der Abhandlung: „Suite des notices sur les fonctions

elliptiques", Crelle J. IV. 185, Ges. Werke I. 266, hat Jacobi zur Bestimmung der bei der Transformation der elliptischen Functionen auftretenden Coefficienten eine Recursionsformel hergeleitet, die in gewissem Sinne die allgemeine Lösung des Transformationsproblems enthält, und zwar in einer von den früheren Lösungen Jacobi's und Abel's ganz verschiedenen Weise. Führt man die Grösse $\varkappa + \frac{1}{\varkappa}$ an Stelle des Moduls $\varkappa$ selbst ein und setzt

$$\varkappa + \frac{1}{\varkappa} = \varrho = 4\mathfrak{M} - 2,$$

$$\sin' \operatorname{am} u = \cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u,$$

so giebt das Additionstheorem zwischen den Functionen

$$x = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn}(u,\varkappa),\quad y = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn}(v,\varkappa),\quad z = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn}(u+v,\varkappa)$$

die Relation

$$z = \frac{x\sqrt{1-\varrho y^2+y^4}+y\sqrt{1-\varrho x^2+x^4}}{1-x^2y^2}.$$

Ferner wird

$$\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn} 2u = \frac{2x\sqrt{1-\varrho x^2+x^4}}{1-x^4},$$

$$\operatorname{sn}' 2u = \frac{x^8-2\varrho x^6+6x^4-2\varrho x^2+1}{x^8-2x^4+1},$$

und wenn man jetzt $v = nu$, also $y = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn} nu$ nimmt,

$$\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn}(n+2)u = \frac{2x(1-x^4)\sqrt{1-\varrho x^2+x^4}\,\operatorname{sn}' nu + (1-x^4)^2 y\,\operatorname{sn}' 2u}{(1-x^4)^2-4x^2y^2(1-\varrho x^2+x^4)}.$$

Für $n = 1$ wird

$$\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn} 3u = -\frac{3x-4\varrho x^3+6x^5-x^9}{3x^8-4\varrho x^6+6x^4-1},$$

und für jede ungerade Zahl n erhält man die Gleichung:

$$(4)\qquad \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{sn} nu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\Phi_{n0}x+\Phi_{n1}x^3+\Phi_{n2}x^5+\cdots+\Phi_{n\nu}x^{n^2-2}+x^{n^2}}{\Phi_{n0}x^{n^2-1}+\Phi_{n1}x^{n^2-3}+\cdots+\Phi_{n\nu}x^2+1},$$

in welcher $\nu = \frac{1}{2}(n^2-3)$ ist, und in welcher die $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Coefficienten Φ_{n0}, Φ_{n1}, Φ_{n2}, ... ganze ganzzahlige Functionen von ϱ, also „ganze Grössen" des natürlichen Rationalitätsbereiches (ϱ), folglich auch ganze Grössen des Rationalitätsbereiches $(\mathfrak{M})$ sind. Zunächst wird nun bewiesen, dass die Gleichung (4) auch gilt, wenn

man $n+2$ statt n setzt. Die allgemeinen Eigenschaften der Coefficienten Φ, zu denen Herr Kronecker durch Anwendung der Jacobi'schen Recursionsformel gelangt ist, haben sich dann als bestes Fundament für die arithmetische Behandlung der singulären Moduln und der zugehörigen elliptischen Functionen erwiesen. Der Herr Verfasser gelangt für die Transformation zu folgendem Resultat: „Die gebrochene rationale Function von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$, durch welche die transformirte elliptische Function $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sn}(\mu u,\lambda)$ ausgedrückt wird, hat in ihrer reducirten Form als Zähler eine ganze Function von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$ vom Grade n und als Nenner eine solche vom Grade $n-1$. Die Coefficienten des Zählers und Nenners sind sämtlich ganze algebraische Grössen des Gattungsbereiches $(\varrho,\varkappa,\mu)$; der Coefficient der n^{ten} Potenz von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$ im Zähler, sowie der von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$ unabhängige Term im Nenner, haben den absoluten Wert Eins; alle übrigen Coefficienten sind durch den Multiplicator μ teilbar, und der Coefficient von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$ im Zähler, sowie der damit identische Coefficient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von $\sqrt{\varkappa}\,\mathrm{sn}(u,\varkappa)$ im Nenner, sind mit dem Multiplicator μ selbst absolut äquivalent“. Es folgt daraus die vollkommene Analogie der Formeln für die Transformation der elliptischen Functionen mit denen der Multiplication der Kreisfunctionen. Als eine „Multiplication der elliptischen Functionen im weiteren Sinne“ fasst es der Herr Verfasser auf, wenn die elliptische Function sn für das m-fache eines beliebigen Arguments u rational durch sn u ausdrückbar ist, gleichviel ob sn mu denselben oder irgend einen andern Modul hat als sn u. M.

Ch. Hermite. Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques. Kronecker J. C. 51-65.

In der Theorie der elliptischen Functionen sind es besonders zwei Gattungen von Entwickelungen in Sinus- oder Cosinusreihen, welche für die höhere Arithmetik von Bedeutung sind. Einmal

hat Jacobi aus den Entwickelungen der elementaren doppeltperiodischen Functionen $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ etc. (Fundam. § 39) seine schönen Sätze über die Zerlegung einer Zahl in 2, 4, 6 und 8 Quadrate hergeleitet. Die zweite Art der Entwickelungen bildet die der Quotienten von Θ-Producten und Θ-Potenzen, in denen die Anzahl der Factoren im Zähler verschieden von der im Nenner ist, und die die Periode $4K$ haben und bei der Aenderung des Argumentes um $4K'i$ bis auf einen Exponentialfactor denselben Wert annehmen. Diese Functionen hat Herr Hermite in Liouville J. (2) VII. untersucht und gezeigt, dass sie auf mehrere von Herrn Kronecker gefundene Sätze über die Summen der Klassenanzahlen der quadratischen Formen mit negativer Determinante führen. Insbesondere betrachtete der Herr Verfasser die Grösse $\frac{H^2(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta^2(x)}$ und das Integral

$$\mathfrak{A} = \frac{H_1(0)}{2\pi}\int_0^K \frac{H^2(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta^2(x)}\,dx,$$

dessen Entwickelung nach Potenzen von q die Reihe

$$\mathfrak{A} = \Sigma\,\frac{q^{\frac{1}{4}(a^2+2a)-c^2}}{1-q^a}\qquad\begin{pmatrix} a = 1, 3, 5 \text{ etc.} \\ c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{a-1}{2}\end{pmatrix}$$

ergiebt, oder in anderer Form:

$$\mathfrak{A} = \Sigma\,F(n)\,q^{\frac{1}{4}n},\qquad (n = 3, 7, 11, \ldots)$$

wo $F(n)$ für alle $n \equiv 3 \pmod 4$ die Anzahl der Klassen der Determinante $-n$ bezeichnet, in denen wenigstens einer der äusseren Coefficienten ungerade ist. Aus diesem Resultat folgt die Kronecker'sche Reihe:

$$F(n) + 2F(n-2^2) + 2F(n-4^2) + \cdots = \tfrac{1}{2}\,\Psi_1(n),$$

wo $\Psi_1(n)$ der Ueberschuss der Summe der Divisoren von n, die grösser als seine Quadratwurzel, über die Summe der andern Divisoren, die kleiner als diese Wurzel (J. für Math. LVII).

Viele andere doppeltperiodische Functionen dritter Gattung führen ebenfalls auf Sätze aus der höheren Arithmetik, und der Herr Verfasser zeigt, dass dieser rein analytische Weg einen interessanten Ausdruck für die Anzahl der Zerlegungen einer

ganzen Zahl in drei und in fünf Quadrate ergiebt. Vorher wird die Formel

$$\Sigma \frac{q^{\frac{1}{4}(a^2+2a)-c^2}}{1-q^a} = \Sigma F(n)\, q^{\frac{1}{4}n}$$

benutzt, um einen Ausdruck für die Summe

$$F(3)+F(7)+\cdots+F(4m-1)$$

zu gewinnen. M.

A. G. Greenhill. Solution of the cubic and quadric equations by means of Weierstrass' elliptic functions. Lond. M. S Proc. XVII. 262-287.

Zuerst wird an die Lösung der kubischen Gleichung mittels trigonometrischer und hyperbolischer Functionen erinnert. Um die Gleichung

$$4x^3-Sx-T=0$$

mit Hülfe von $\wp u$ zu lösen, setzen wir

$$x=\frac{1}{z},\quad \frac{S}{T}=a,\quad \frac{1}{T}=b,$$

dann wird

$$z^3+az^2-4b=0,$$

und wenn $z=\frac{y}{m}$ und $m^3=\frac{1}{b}=T$ gesetzt wird,

$$y^3+amy^2-4=0.$$

Dies wird verglichen mit

$$\wp^3u+3\wp(iu\sqrt{3})\,\wp^2u-4=0,\quad g_2=0,\quad g_3=4;$$

dann ist

$$\wp(iu\sqrt{3})=\tfrac{1}{3}\,am=\frac{S}{3T^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{J}{J-1}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \text{wo } J=\frac{S^3}{S^3-27T^2},$$

und

$$y=\wp u,\quad z=\frac{\wp u}{T^{\frac{1}{3}}},\quad x=\frac{T^{\frac{1}{3}}}{\wp u}.$$

Ist nur eine Wurzel der kubischen Gleichung reell, so haben die beiden andern Werte von x die Form $\frac{T^{\frac{1}{3}}}{\wp(u\pm\frac{2}{3}\omega_2')}$, wo

$$\omega_2'=\omega_3-\omega_1,\quad \wp\omega_3=e_3=\omega^2,\quad \wp\omega_1=e_1=\omega,\quad e_2=1,$$

$$\frac{\omega_2'}{\omega_2}=i\frac{K'}{K}=i\sqrt{3}.$$

Wenn alle drei Wurzeln reell sind, so hat x die Form $\frac{T^{\frac{1}{3}}}{\wp\frac{1}{3}u}$ und die beiden andern x die Form $\frac{T^{\frac{1}{3}}}{\wp(\frac{1}{3}u\pm\frac{2}{3}\omega_2)}$. Es werden Tafeln gegeben für $\wp\frac{r\omega_2}{180}$ und $\wp\frac{r\omega_2'}{180}$ für $r=0, 1, 2, \dots, 180$.

Um die biquadratische Gleichung $U_x=(a, b, c, d, e)(x, 1)^4=0$ zu lösen, wird an den Ausdruck

$$\wp u=\frac{(a, b, c)(x_0, 1)^2 x^2+2(b, c, d)(x_0, 1)^2 x+(c, d, e)(x_0, 1)^2}{2(x-x_0)^2}$$

erinnert, der auf die Weierstrass'sche Normalform führt. Wenn $x=\infty$ für $u=\alpha$, so ist

$$\wp\alpha=\tfrac{1}{2}(a, b, c)(x_0, 1)^2,\quad \wp'\alpha=-\sqrt{a}(a, b, c, d)(x_0, 1)^3,$$

und

$$\wp u-\wp\alpha=\frac{(a, b, c, d)(x_0, 1)^3}{x-x_0}=-\frac{\wp'\alpha}{\sqrt{a}(x-x_0)};$$

$$x-x_0=-\frac{\wp'\alpha}{\sqrt{a}(\wp u-\wp\alpha)}.$$

Wird in

$$ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$$

$x=\frac{1}{a}(z-b)$ gesetzt, so wird

$$V=z^4+6Hz^2+4Gz+a^2J-3H^2=0,$$

wo $H=ac-b^2$, $G=a^2d-3abc+2b^3$. Der Coefficient a kann gleich 1 genommen werden. Wird x, also z unendlich für $u=\alpha$, so ist $\wp(2\alpha)=H$, $\wp'(2\alpha)=-G$ und die vier Wurzeln der Gleichung $V=0$ sind:

$$z_0=\frac{\sigma_1(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}+\frac{\sigma_2(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}+\frac{\sigma_3(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)},$$

$$z_1=\frac{\sigma_1(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}-\frac{\sigma_2(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}-\frac{\sigma_3(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)},$$

$$z_2=-\frac{\sigma_1(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}+\frac{\sigma_2(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}-\frac{\sigma_3(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)},$$

$$z_3=-\frac{\sigma_1(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}-\frac{\sigma_2(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)}+\frac{\sigma_3(2\alpha)}{\sigma(2\alpha)},$$

(siehe Burnside and Panton: Theory of equations, p. 117 und

Halphen, J. de l'Éc. Polyt. 1884). Es folgt dann die Untersuchung der Realität der Wurzeln und die Anwendung auf ein hydrodynamisches Problem. M.

C. Isenkrahe. Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Pr. Realprog. Bonn. 35 S.

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Convergenzgrenze von Reihen, die durch Inversion entstanden sind. In einer Note über die Inversion des vollständigen elliptischen Integrals erster Gattung (siehe oben S. 383) war die aus den Gleichungen

$$\vartheta_3(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} \quad \text{und} \quad \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

abgeleitete Gleichung

$$q + q^4 + q^9 + \cdots + q^{n^2} + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}} - 1\right) = \tfrac{1}{2}(\vartheta_3(0) - 1) = u$$

durch Inversion auf die Form

$$q = u - u^4 + 4u^7 - u^9 + 22u^{10} + 13u^{12} + 140u^{13} - 136u^{15} + 969u^{16} + \cdots$$

gebracht und ohne Beweis als Bedingung der Convergenz $u \gtreqless \frac{1}{2}$ oder $K \gtreqless 2\pi$ angegeben. Dieser Beweis wird hier nachgeholt. Der Verfasser recapitulirt vorher die von Kerz („Die allgemeine Umkehrung der Reihen", I. Giessen 1850 u. II. Darmstadt 1861) aufgestellten Bedingungen der Convergenz invertirter Potenzreihen und das Kriterium Lagrange's (Nouvelle méthode pour résoudre les équations littéraires, Berl. Ber. 1768) sowie die Resultate der späteren Untersuchungen über die Reihe von Lagrange. M.

H. von Mangoldt. Ueber ein Verfahren zur Darstellung elliptischer Modulfunctionen durch unendliche Producte nebst einer Ausdehnung dieses Verfahrens auf allgemeinere Functionen. Gött. Nachr. 1-29.

Ausführlichere Mitteilung der Untersuchungen, über welche F. d. M. XVII. 448 berichtet worden ist. Wird nach dem Vorgange des Herrn Klein als Hauptkreis der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt der Ebene des Argumentes x beschriebene Kreis bezeichnet, für dessen Fläche die zu betrachtenden Functionen erklärt sind und dessen Peripherie für die Veränderlichkeit des Argumentes x eine natürliche Grenze bildet, so erhält man durch Verallgemeinerung der von Herrn Weierstrass angewandten Schlüsse folgende Sätze: „1. Jede eindeutige Function von x, welche im Innern des Hauptkreises überall den Charakter einer ganzen Function besitzt, kann dargestellt werden in Gestalt eines Productes, dessen Factoren sämtlich die Form haben

$$(kx+l)\,e^{\psi(x)},$$

wo k, l Constante bedeuten und $\psi(x)$ eine eindeutige Function von x bezeichnet, welche im Innern des Hauptkreises überall den Charakter einer ganzen Function besitzt. 2. Jede eindeutige Function von x, welche im Innern des Hauptkreises überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, kann als Quotient zweier Producte von der eben angegebenen Beschaffenheit dargestellt werden.“ Setzt man voraus, dass jede der in Betracht gezogenen Functionen im Innern ihres Gültigkeitsbereiches unendlich viele Null- und Unendlichkeitsstellen besitzt, und hebt die Beschränkung auf, dass jede der Functionen $g(x)$ für $x=0$ verschwinden soll, so kann man $k=1$ setzen und die Constanten l bei denjenigen Functionen, welche nur für die Fläche des Hauptkreises erklärt sind, der Bedingung unterwerfen, im Innern des Hauptkreises zu liegen. Es wird nun für jede der Fuchs'schen Functionen Poincaré's, deren Geschlecht gleich Null ist, und deren Gruppe und deren Null- und Unendlichkeitsstellen gegeben sind, ein System jener Zusatzfactoren $e^{\psi(x)}$ ermittelt.

M.

R. Fricke. Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl. Diss. Leipzig. 8°. 89 S.

Die Arbeit enthält einen Beitrag zu der von Herrn Klein

(Klein Ann. XVII. 133; s. F. d. M. XII. 351) begründeten Theorie der Modulfunctionen. Ueber die dahin gehörigen Arbeiten von Klein, Hurwitz u. a. ist F. d. M. XIII. 364; XVI. 397 und XVII. 449ff. berichtet worden, wo auch die vorliegende Dissertation erwähnt ist. Nach Feststellung einiger fundamentaler Begriffe werden diejenigen Riemann'schen Flächen gebildet, denen die aus der Theorie der elliptischen Functionen entspringenden Modulfunctionen als algebraische Functionen angehören. Was die Methode betrifft, so kann die Theorie der elliptischen Functionen, wenigstens zunächst, gänzlich vermieden werden, und nach Riemann'scher Anschauungsweise kann man von den Flächen auf die ihnen zugehörigen Functionen schliessen. Diese Behandlungsweise erledigt insofern die principielleren Fragen, als sie auf einfachste Modulsysteme führt, in welchen jede andere der betreffenden Stufe angehörige Function sich rational darstellen lassen muss, und die somit fortan den Untersuchungen ihrer Stufen zu Grunde zu legen sind. Nach dieser Methode werden nun die niedrigsten Primzahlstufen durchgeführt. Durch Vermittelung der Theorie der elliptischen Normalcurven (Bianchi, Math. Ann. XII. 234 und Klein, Leipz. Abh., s. F. d. M. XII. 352 u. XVII. 453) wird dann die Verallgemeinerung für Primzahlen oder auch für ungerade nicht durch 3 teilbare Zahlen bewirkt. Die sieben Capitel der vorliegenden Arbeit behandeln resp. die 2te, 3te, 4te, 6te, 8te, 9te, 10te und 16te Stufe.

M.

G. Friedrich. Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der zweiten bis fünften Stufe. Diss. Leipzig. 8°. 71 S.

Auch diese Arbeit gehört in die Gruppe der im vorstehenden Referat erwähnten Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen. Sie bezweckt die Aufstellung der Modulargleichungen für diejenigen ausgezeichneten Hauptmoduln der ϱ^{ten} Stufe, welche nur bei den mod. ϱ zur Identität congruenten Substitutionen ihres Argumentes ω ungeändert bleiben. Derartige Moduln

existiren nur für $\varrho \overline{\overline{<}} 5$ und sind: das Doppelverhältnis, die Tetraederirrationalität, die Oktaederirrationalität und die Ikosaederirrationalität. Ihre Modulargleichungen haben die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn der ursprüngliche und der transformirte Modul gleichzeitig gewissen linearen Substitutionen unterworfen werden. Die Methode der Aufstellung dieser Modulargleichungen besteht nun darin, dass man zunächst untersucht, welche Form Ausdrücke von dieser Substitutionseigenschaft haben müssen; alsdann bleiben noch wenige Zahlencoefficienten auszurechnen, was durch Einsetzen der bekannten nach Potenzen von $q = e^{2\pi\omega i}$ fortschreitenden Reihen für die Moduln ohne Schwierigkeit geschieht. M.

Müller. Complanation der Kegel II. Ordnung. Pr. Realg. Chemnitz.

Das Integral

$$F = \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sqrt{h^2(f'^2\xi + f'^2\eta) + (\xi f'\xi + \eta f'\eta)^2}}{f'\eta}\, d\xi,$$

welches den Inhalt des von ξ_0 bis ξ genommenen Oberflächenstückes eines Kegels mit der Leitlinie $f(\xi, \eta) = 0$ ausdrückt, wird zunächst in den Fällen, wo die Leitlinie ein Kegelschnitt ist, auf elliptische Integrale zurückgeführt. Alsdann wird der Fall betrachtet, wo der Fusspunkt O der Höhe $h = HO$ (wo O der Anfangspunkt, H die Spitze des Kegels) in eine Axe des Kegelschnittes fällt. M.

Ch. Hermite. Sur quelques applications des fonctions elliptiques. Paris. Gauthier-Villars. 4°. 146 S.

Die seit mehreren Jahren in den C. R. erschienenen Abhandlungen gleichen Titels sind hier zu einem Bande vereinigt. Wir haben in den Bänden IX bis XIV dieses Jahrbuchs über die einzelnen Abschnitte referirt. Der Hauptgegenstand ist ein ein-

gehendes Studium der Lamé'schen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \mathrm{sn}^2 x + h]y$$

und der doppeltperiodischen Functionen zweiter Gattung. Daran knüpfen sich Anwendungen aus der Mechanik, das Problem der Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt in dem Falle, wo keine äusseren Kräfte wirken, das sphärische Pendel, die elastische Linie und ausserdem verschiedene analytische Anwendungen, deren wichtigste sich auf Typen von linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten und eindeutigen Integralen beziehen. Ein ausführlicher Bericht über das Buch findet sich Darb. Bull. (2) X. 33-41. M.

E. Ökinghaus. Transformationen der elliptischen Integrale und Functionen in Verbindung mit der Theorie der Kettenlinie. Hoppe Arch. (2) IV. 225-278.

Fortsetzung der Arbeit in Hoppe Arch. (2) II. 138-192 (s. F. d. M. XVII. 1885. 465). Die durch Kreis und Kettenlinie vermittelte Transformation erweist sich für die geometrische Darstellung der entwickelten mannigfaltigen elliptischen Functionen erfolgreich und führt zu einer Reihe interessanter Entwickelungen. M.

E. Ökinghaus. Elliptische Integralfunctionen und ihre geometrische, analytische und dynamische Bedeutung. Hoppe Arch. (2) IV. 279-307.

Fortsetzung der Abhandlung in Hoppe Arch. (2) I. 337-488, s. F. d. M. XVI. 1884. 403. Die geometrische Interpretation der früher entwickelten dritten Integralfunction führt zur geometrischen Darstellung des Additionstheorems der Integrale erster Gattung, und zwar vermittelst der Kegelschnitte. Vorher wird eine neue vierte Integralfunction abgeleitet, deren Modulus rational ist. Zum Schluss werden die hyperelliptischen Integral-

functionen betrachtet und die aus der Theorie der Kegelschnitte gewonnenen Resultate verallgemeinert. M.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

O. Bolza. Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische, insbesondere über die Reduction durch eine Transformation vierten Grades. Diss. Göttingen. 4°. 39 S.

Lange Zeit waren die beiden von Jacobi (Crelle J. VIII. 416 und Ges. Werke I. 382) gegebenen Integrale für $\varrho = 2$, die sich durch rationale Transformationen zweiten Grades auf elliptische Integrale reduciren liessen, das einzige Beispiel einer solchen Reduction. Herr Hermite fügte ihnen im Jahre 1876 als zweites Beispiel zwei Integrale erster Gattung hinzu, die durch Transformationen dritten Grades auf je ein elliptisches reducirbar waren (s. F. d. M. VIII. 278). Seitdem ist das Problem der Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische Gegenstand zahlreicher Arbeiten von Königsberger, Brioschi, Goursat, Picard u. a. geworden. Ersterer wies schon im Journ. für Math. Bd. LXVII nach, dass die oben erwähnten Jacobi'schen Integrale die beiden allgemeinsten durch eine rationale Transformation zweiten Grades reducirbaren Integrale sind. Goursat teilte die allgemeinsten durch eine Transformation dritten Grades reducirbaren Integrale mit (s. F. d. M. XVII. 466 u. 468), und Herr Bolza gab 1885 die allgemeinsten hyperelliptischen Integrale erster Gattung und erster Ordnung, die durch eine Transformation vierten Grades auf elliptische zurückführbar sind (s. F. d. M. XVII. 468). Während diese Beispiele auf rein algebraischem Wege gefunden wurden, benutzten Königsberger (a. a. O. LXVII. 72) und Pringsheim (Clebsch Ann. IX. 461) die Transformation

der ϑ Functionen, ebenso Hanel (Diss. Berlin 1882). Herr Weierstrass hatte den Satz bewiesen, dass man im Falle der Reducirbarkeit durch eine Transformation höheren Grades zu einem System transformirter ϑ-Moduln, in welchen $\tau'_{12} = 0$ ist, gelangen kann.

In der vorliegenden Arbeit wird nun die Reduction durch eine Transformation vierten Grades vollständig durchgeführt mit Hülfe eines zweiten von den Herren Weierstrass und Picard gegebenen, für die Behandlung des Problems wichtigen Satzes, welcher lautet: „Wenn ein zu dem hyperelliptischen Gebilde

$$y^2 = R(x)$$

vom Range 2 gehöriges Integral algebraisch auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, so giebt es unter den unendlich vielen zu dem Gebilde gehörigen Systemen von ϑ-Moduln mindestens eines, für welches $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, wo k eine positive ganze Zahl ist.“ (S. v. Kowalewski, Acta Math. IV. 393 und Picard, S. M. F. Bull. XII. 153; s. F. d. M. XVI. 426.) Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird nun die Aufgabe gelöst, alle Systeme von ϑ-Moduln, in denen $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, zu finden, sobald ein solches existirt. Alsdann wird eine von der Richelot'schen Normalform, die Herr Picard seinen Untersuchungen über die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung zu Grunde gelegt, verschiedene Normalform hergestellt. Diese Herstellung und die Untersuchung der linearen Transformation derselben bilden den Inhalt des zweiten Teils. Nach dem Satze von Weierstrass und Picard giebt es stets zwei zu demselben Gebilde gehörige durch Transformation k^{ten} Grades reducirbare Integrale erster Gattung, sobald es überhaupt eines giebt. Während nun das eine derselben auf algebraischem Wege leicht herzustellen war, machte die Bestimmung des zweiten Integrals bisher grosse Schwierigkeiten. Mit Hülfe der im zweiten Teil gewonnenen Principien gelingt es jetzt Herrn Bolza, zu zeigen, dass das zweite Integral und die zugehörige reducirende rationale Func-

tion ohne alle Rechnung, durch eine blosse Buchstabenvertauschung gefunden werden kann.

Der dritte, vierte und fünfte Teil der Arbeit enthält nun die vollständige Lösung des Reductionsproblems für $k = 4$ mit Hülfe der ϑ-Functionen. Nach Aufstellung der Bedingungsgleichungen zwischen den Wurzeln der ganzen Function sechsten Grades werden die Constanten der beiden reducirbaren Integrale als algebraische Functionen zweier unabhängigen Parameter dargestellt, und dann wird die rationale Function vierten Grades gewonnen, durch welche die Reduction geleistet wird. M.

J. Schacht. Reducirbarkeit elliptischer und hyperelliptischer Integrale auf Logarithmen nach der Methode von Abel. Pr. Kgl. Mariengymn. Posen. 4°. 27 S.

Es werden aus der von Abel (Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières) angegebenen Methode, insbesondere aus der Entwickelung der irrationalen Function in einen Kettenbruch, Kriterien für die Reducirbarkeit eines elliptischen resp. hyperelliptischen Integrals auf Logarithmen gewonnen. Für den vierten und sechsten Grad insbesondere wird die Kettenbruchentwickelung durchgeführt und werden die zugehörigen reducirbaren Integrale aufgestellt.

M.

O. Staude. Ueber hyperelliptische Integrale zweiter und dritter Gattung. Acta Math. VIII. 81-92.

Der Verfasser liefert in dieser Arbeit, indem er sich auf einen von Herrn Weierstrass in den Berl. Monatsber. des Jahres 1861 veröffentlichten Vortrag „Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid" bezieht, eine ausführliche Ableitung der in dieser Arbeit vorkommenden Formeln und eine eingehende Untersuchung über den Ausdruck, welcher die Bogenlänge der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid durch die hyper-

elliptischen Functionen giebt. Diese Untersuchung bietet die Gelegenheit, die Ableitung der Integrale zweiter und dritter Gattung nach Analogie des in Jacobi's späterer Theorie der elliptischen Integrale benutzten Verfahrens durch die Thetafunctionen darzustellen. Die Entwickelungen werden unter Benutzung der vom Verfasser früher veröffentlichten Formeln über die Nullwerte der Thetafunctionen und ihrer Ableitungen ausführlich in seiner von der Weierstrass'schen wenig abweichenden Ausdrucksweise gegeben, und im wesentlichen stimmen die Resultate natürlich mit denen des Herrn Weierstrass überein.

Hch.

Schirdewahn. Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale dritter Gattung erster Ordnung. Oels. Grünberger & Co.

G. Pick. Zur Theorie der binomischen Integrale. Wien. Ber. XCIV. 372-377.

Unter binomischen Integralen versteht der Herr Verfasser solche Abel'schen Integrale, welche die n^{te} Wurzel aus einer beliebigen rationalen Function der unabhängigen Veränderlichen als Irrationalität enthalten. Während der Art. 1 sich mit der Aufstellung der allgemeinsten Form eines binomischen Integrals erster Gattung beschäftigt, ist Art. 2 der Herstellung eines ausgezeichneten Integrals dritter Gattung gewidmet, das der Herr Verfasser als das wahre Normalintegral dritter Gattung bezeichnen zu dürfen glaubt.

Kr.

H. Poincaré. Sur la réduction des intégrales abéliennes. C. R. CII. 915-916.

Der Verfasser gab im Jahre 1884 in den S. M. F. Bull. XII eine Verallgemeinerung des Weierstrass'schen Satzes über die Reduction der Abel'schen Integrale (vergl. F. d. M. XVI. 1884.

426-430). Herr Picard zeigte an derselben Stelle, dass für den Fall $\varrho = 2$ noch eine Vereinfachung in der Form der Perioden möglich sei.

In der vorliegenden Note stellt Herr Poincaré als Beispiel, dass die entsprechende Vereinfachung auch im allgemeinen Falle gültig ist, die reducirten Perioden für den Fall $\varrho = 6$, $\mu = 3$ auf. Es treten in diesem Falle an Stelle von $\frac{1}{k}$ Grössen von der Form $\frac{1}{a}, \frac{1}{ab}, \frac{1}{abc}$ (a, b, c ganze Zahlen) auf. In speciellen Fällen kann die Form der Perioden noch einfacher werden.

Hch.

L. Schleiermacher. Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln. Erlang. Ber. XVIII. 22-25.

Der Herr Verfasser zeigt, dass die zwischen den sechzehn Thetafunctionen mit zwei Variabeln bestehenden Identitäten derartig aufgelöst werden können, dass man sämtliche Thetaquotienten als rationale Functionen von drei Parametern darstellt, welche noch durch eine algebraische Gleichung mit einander verknüpft sind.

Kr.

Kadik. Theorie der sechsstelligen Charakteristiken. Diss. Dorpat.

Während die ersten drei Artikel Definitionen und Sätze über sechsstellige Charakteristiken enthalten, deren Elemente beliebige Grössen sind, beschäftigen sich die Untersuchungen der folgenden Artikel ausschliesslich mit den 64 zum Falle $p = 3$ gehörigen Charakteristiken, die aus halben Zahlen gebildet sind, bringen aber nichts Wesentliches bei, was nicht schon von den Herren Weber, Nöther, Frobenius und Prym in ihren Untersuchungen über Thetacharakteristiken mitgeteilt worden ist oder aus diesen Untersuchungen unmittelbar gefolgert werden kann.

Kr.

M. Krause. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind. Klein Ann. XXVI. 569-589.

Nachdem der Herr Verfasser die Thetafunctionen zweier Veränderlichen, deren Charakteristiken aus gebrochenen Zahlen gebildet sind, definirt und ihre Haupteigenschaften aufgestellt hat, bildet er aus denselben Thetafunctionen n^{ter} Ordnung und drückt dieselben auf Grund des Satzes des Herrn Hermite durch gewöhnliche Thetafunctionen aus. Wie die Werte der hiebei auftretenden unbestimmten Coefficienten ermittelt werden können, wird an einigen einfachen, den Fällen $n = 3$ und $n = 5$ entsprechenden Beispielen erläutert. Zum Schlusse wird gezeigt, wie der im Hermite'schen Satze als speciellster Fall enthaltene bekannte Satz, dass eine Thetafunction durch gewisse Functionalgleichungen bis auf eine Constante bestimmt wird, zur Herstellung allgemeiner Thetabeziehungen verwertet werden kann, und dies wird durch Verification der von Herrn Prym und dem Referenten im dritten Bande der Acta Mathematica abgeleiteten Formel (Θ_2) illustrirt. Kr.

A. v. Braunmühl. Note über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und das Additionstheorem der zugehörigen Thetafunctionen. Erlang. Ber. XVIII. 37-43.

Nach den von den Herren Nöther und Frobenius gegebenen Principien werden in der vorliegenden Note die p-reihigen Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, untersucht, diesbezügliche Definitionen und Sätze aufgestellt und zum Schlusse unter Anwendung des Satzes des Herrn Hermite eine Thetaformel von grosser Allgemeinheit abgeleitet.

Die Endformel am Schlusse der sechsten Seite ist fehlerhaft und von dem Herrn Verfasser selbst in den Abh. d. k. bayer. Akademie der Wiss. II Cl. XVI. Bd. II. Abtl. pag. 352 berichtigt worden. Kr.

M. KRAUSE. Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Klein Ann. XXVII. 419-430.

Die n^{te} Potenz einer Thetafunction ist eine Thetafunction n^{ter} Ordnung und lässt sich daher im Falle $p=2$ nach dem Satze des Herrn Hermite durch n^2 linear unabhängige Thetafunctionen n^{ter} Ordnung linear ausdrücken. Wählt man für diese die n^2 Functionen, die aus

$$\vartheta_5(nv_1+g\tau_{11}+g'\tau_{12},\ nv_2+g\tau_{21}+g'\tau_{22};\ n\tau_{11},\ n\tau_{12},\ n\tau_{22})$$

für $g, g' = 0, 1, \ldots, n-1$ hervorgehen, so lassen sich die hiebei auftretenden unbestimmten Coefficienten in einfacher Weise bestimmen, wenn man zur Darstellung derselben die Nullwerte von Thetafunctionen zulässt, deren Charakteristiken aus gebrochenen Zahlen gebildet sind, und deren Moduln Vielfache der Moduln der ursprünglichen Thetafunction sind. Kr.

M. KRAUSE. Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung nebst Anwendungen. Leipzig. Teubner. VIII und 276 S. gr. 8°.

Das vorliegende Werk ist, wie der Herr Verfasser in dem Vorworte bemerkt, aus den Vorlesungen über hyperelliptische Transcendenten entstanden, welche derselbe während mehrerer Semester an der Universität Rostock gehalten hat.

Der erste Abschnitt (§§ 1—5) beschäftigt sich mit der Definition der Thetafunctionen zweier Veränderlichen und der Ableitung ihrer Haupteigenschaften. An den Schluss desselben ist der Satz des Herrn Hermite gestellt, wonach zwischen n^2+1 Thetafunctionen n^{ter} Ordnung mindestens eine lineare Relation besteht. Wie diese Anzahl sich für gerade und ungerade Thetafunctionen n^{ter} Ordnung verringert, ist in einem weiteren Satze angegeben. Die von Herrn Hermite (Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, C. R. XL) und von Herrn Cayley (On the transformation of the double Thetafunctions, Quart. J. XXI) mitgeteilten diesbezüglichen Resultate sind an der Hand der Angaben des Herrn Verfassers zu ergänzen.

Der zweite Abschnitt (§§ 6-18) behandelt die zwischen den sechzehn Thetafunctionen zweier Veränderlichen bestehenden Beziehungen und das Additionstheorem dieser Functionen, ferner die Relationen, welche zwischen den Nullwerten der zehn geraden Thetafunctionen und den Nullwerten der Differentialquotienten der sechs ungeraden Thetafunctionen bestehen. Die diesbezüglichen Formeln sind zwar fast ausschliesslich schon früher von anderen Autoren mitgeteilt worden, jedoch hat der Herr Verfasser die Formelsysteme an mehreren Stellen vervollständigt und neue Beweise dafür angegeben. In § 18 wird dann noch gezeigt, dass eine jede Thetafunction n^{ter} Ordnung sich als ganze homogene Function n^{ten} Grades der ursprünglichen Thetafunctionen darstellen lässt, welche eine eindeutig bestimmte Anzahl von Constanten linear in sich enthält.

Nachdem weiter die σ-Functionen und als Quotient zweier solcher die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung eingeführt sind, beginnt mit § 21 der dritte Abschnitt (§§ 21-45), in dem das Hauptproblem des ganzen Werkes, nämlich das der rationalen Transformation — bei welcher sich die transformirten Thetafunctionen rational durch die ursprünglichen ausdrücken lassen — gelöst wird. Der Zusammensetzung der allgemeinen rationalen Transformation aus einfacheren, der Definition der Klasse von Transformationen und der Bestimmung der Klassenanzahl sind die §§ 22 und 23 gewidmet. Nachdem sodann die §§ 24-26 sich speciell mit der linearen Transformation beschäftigt haben, werden in den §§ 27-32 die hier gewonnenen Formeln bei der Bestimmung der Differentialquotienten der hyperelliptischen Functionen und gewisser einfacher Verbindungen derselben und bei der Aufstellung einer Reihe wichtiger Differentialgleichungen aus der Theorie der hyperelliptischen Functionen verwertet. Die diesbezüglichen Resultate wurden grösstenteils von dem Herrn Verfasser schon früher (Klein Ann. XXV. 323-340, Kronecker J. XCVIII. 148-174 und XCV. 256-263) mitgeteilt, und es ist darüber bereits in diesem Jahrbuche berichtet worden. Die §§ 33 und 34 behandeln gleichfalls im Anschlusse an frühere Abhandlungen des Herrn Verfassers die Multiplication

der Thetafunctionen und der hyperelliptischen Functionen. In § 35 wird das Problem der Transformation zweiten Grades auf folgende Weise gelöst. Jede transformirte Thetafunction ist eine Thetafunction zweiter Ordnung und lässt sich daher durch vier linear unabhängige Thetafunctionen zweiter Ordnung linear ausdrücken. Benützt man dazu vier passend gewählte Göpel'sche Thetaquadrate, so gelingt die Bestimmung der constanten Coefficienten durch Einführung specieller Werte für die Argumente auf ziemlich einfache Weise. Die §§ 36-39 behandeln die Transformation dritten und fünften Grades und die allgemeine Transformation ungeraden Grades von ähnlichen Gesichtspunkten, während die §§ 40-45 sich mit den Modulargleichungen, den Multiplicatorgleichungen und anderen die Transformation betreffenden Relationen beschäftigen.

Die Grundlage der bisherigen Untersuchungen über die Transformation bildete ausschliesslich der Satz des Herrn Hermite. Die bei seiner Anwendung auftretenden unbestimmten Coefficienten in knapper und übersichtlicher Form zu bestimmen, ist (von den einfachsten Fällen abgesehen) mit Schwierigkeiten verbunden. Daher schafft der Herr Verfasser in dem nun folgenden vierten Abschnitte (§§ 46-54) neue Hülfsmittel zur Lösung des Transformationsproblems, sieht sich aber zugleich veranlasst, demselben statt der früheren Fassung: die transformirten Thetafunctionen durch die ursprünglichen auszudrücken, die allgemeinere zu geben: möglichst allgemeine Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen aufzustellen. Auf den reichen Inhalt der einzelnen Paragraphen einzugehen, würde zu weit führen; es mag nur erwähnt werden, dass die beiden Arbeiten des Herrn Verfassers: „Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken gebrochene Zahlen sind" (Klein Ann. XXVI) und „Ueber Fourier'sche Entwickelungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen" (Klein Ann. XXVII), über welche der Referent im Vorstehenden berichtet hat, in den §§ 47-50 und 53 reproducirt sind.

Der Schlussparagraph, § 55, behandelt das Divisionsproblem der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Kr.

F. Brioschi. Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine. Brioschi Ann. (2) XIV. 241-344.

Die umfangreiche Arbeit des Herrn Verfassers, von der hier die ersten zehn Capitel vorliegen, enthält eine in der Art der Behandlung neue Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Den Ausgangspunkt bilden dabei die fünfzehn im ersten Capitel als hyperelliptische Functionen erster Ordnung der Integralwerte u definirten algebraischen Functionen der oberen Integralgrenzen, und es enthalten entsprechend die Capitel II—VII eine abschliessende Theorie dieser Functionen. Cap. II beschäftigt sich mit den zwischen den fünfzehn hyperelliptischen Functionen bestehenden algebraischen Relationen und zeigt insbesondere, wie sich sechzig Systeme von vier, beziehlich drei hyperelliptischen Functionen bilden lassen, durch deren Quadrate die Quadrate der übrigen Functionen linear ausgedrückt werden können, während sie selbst durch eine Relation vierten Grades mit einander verknüpft sind. In Cap. III werden zunächst die Derivirten der hyperelliptischen Functionen nach den Variablen u durch hyperelliptische Functionen selbst ausgedrückt und sodann aus diesen Formeln zahlreiche Folgerungen gezogen. Cap. IV beschäftigt sich mit den Derivirten der hyperelliptischen Functionen nach den Moduln a, Cap. V mit den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung und den zwischen ihnen bestehenden Beziehungen, Cap. VI mit den Werten der hyperelliptischen Functionen für besondere Werte der Argumente, und Cap. VII endlich enthält das Additionstheorem der hyperelliptischen Functionen und daraus sich ergebende Folgerungen. — Mit dem Cap. VIII treten die sechzehn Thetafunctionen in den Kreis der Untersuchungen; dieselben erscheinen hier durch gewisse Differentialgleichungen, Gleichungen (9), definirt; der Herr Verfasser zeigt zunächst, wie man auf Grund dieser Differentialgleichungen zu einer Entwickelung der Thetafunctionen nach Potenzen der Variabeln u_1, u_2 gelangen kann, und geht sodann erst zu der gewöhnlichen Entwickelung derselben nach Potenzen von $e^{2r_1\pi i}$, $e^{2r_2\pi i}$ über. Die fünfzehn hyperelliptischen Functionen

werden jetzt bis auf multiplicative Constanten den fünfzehn Quotienten gleich, die entstehen, wenn man durch eine der sechzehn Thetafunctionen die fünfzehn anderen teilt. Den algebraischen Relationen zwischen den fünfzehn hyperelliptischen Functionen, den Differentialgleichungen für dieselben und endlich dem Additionstheoreme derselben entsprechen analoge Gleichungen bei den sechzehn Thetafunctionen, welche von dem Herrn Verfasser in den Capiteln IX und X aufgestellt werden. Kr.

F. Brioschi. Sur quelques formules hyperelliptiques. C. R. CII. 239-242, 297-298.

Wenn man von den Thetafunctionen eines Göpel'schen Systems drei durch die vierte teilt, so entstehen drei hyperelliptische Functionen y, z, w. Aus den Additionstheoremen dieser Functionen ergeben sich leicht Relationen zwischen den Functionen selbst und ihren ersten partiellen Derivirten. Aus diesen Formeln leitet der Herr Verfasser weitere Differentialgleichungen ab und zeigt insbesondere, wie sich die zweiten partiellen Derivirten der Functionen y, z, w durch Polynome dritten Grades, die Quadrate und Producte zu zweien der ersten partiellen Derivirten von y, z, w durch Polynome vierten Grades der Functionen y, z, w selbst ausdrücken lassen. Kr.

F. Brioschi. I nuovi moduli per le funzioni iperellittiche a due variabili. Rom. Acc. L Rend. (4) II. 159-164.

Folgt man in der Bezeichnung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen Herrn Weierstrass, so gehören die vier Functionen $\vartheta_5, \vartheta_0, \vartheta_{12}, \vartheta_{34}$ einem Göpel'schen Vierersysteme an; durch ihre Quadrate können daher die Quadrate der zwölf übrigen Thetafunctionen linear ausgedrückt werden, während die vier Functionen $\vartheta_5, \vartheta_0, \vartheta_{12}, \vartheta_{34}$ selbst durch eine Gleichung vierten Grades mit einander verknüpft sind. Die in den betreffenden dreizehn Gleichungen als Coefficienten auftretenden Verbindungen der Nullwerte der zehn geraden Thetafunctionen werden von dem

Herrn Verfasser durch die drei Grössen:

$$\lambda = -\frac{c_{14}^2}{c_{23}^2},\quad \mu = -\frac{c_4^2}{c_{02}^2},\quad \nu = -\frac{c_{01}^2}{c_2^2},$$

bei denen c_{14} den Nullwert der Function ϑ_{14} etc. bezeichnet, ausgedrückt, und diese drei Grössen die neuen Moduln für die hyperelliptischen Functionen zweier Veränderlichen genannt (Art. 1). In Art. 2 zeigt sodann der Herr Verfasser, auf welche Weise sich durch diese drei Grössen die Coefficienten jener Differentialgleichungen darstellen lassen, denen der Zähler und der Nenner der Transformationsgleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung Genüge leisten, und welche von Herrn Krause (Ueber einige Differentialbeziehungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Zweite Mitteilung. Klein Ann. XXVI. 16—25, F. d. M. XVII. 1885. 481) zuerst aufgestellt wurden. Der Art. 3 ist der Discussion der einfachsten speciellen Fälle gewidmet. Kr.

F. Brioschi. Sulla espressione per serie delle funzioni iperellittiche a due variabili. Rom. Acc. L Rend. (4) II. 199-203, 215-221.

Die vorliegende Arbeit besteht auch dem Inhalte nach aus zwei selbständigen Teilen. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Darstellung der zweiten Ableitungen des Logarithmus der Function $\vartheta(u_1|u_2)$ durch hyperelliptische Functionen; der zweite mit jenen Gleichungen, welche zwischen den partiellen Ableitungen der Thetafunctionen zweier Veränderlichen nach den Parametern und nach den Argumenten bestehen. Kr.

F. Klein. Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Klein Ann. XXVII. 431-464.

Herr Klein definirt in dem ersten einleitenden Paragraphen zunächst die Functionen, mit denen er sich beschäftigen will. Er nennt diejenigen Jacobi'schen Functionen

$$\Theta_a(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}) = K_a e^{a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2}\,\vartheta_a(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

σ-Functionen, in denen K_a und die a_{11}, a_{12}, a_{22} so bestimmt sind,

dass sie bei linearer Transformation der Perioden glatt in einander permutiren, wie es in der Theorie der elliptischen Functionen die Weierstrass'schen σ-Functionen thun. Zu diesem Zweck setzt er K_a für die geraden Θ gleich dem Nullwert der $\vartheta_a(v_1, v_2) = \vartheta_a$ und bestimmt den Wert von a_{11}, a_{12}, a_{22} so, dass bei der Reihenentwickelung des Productes der 10 geraden Θ nach v_1, v_2 das Glied $[v_1, v_2]_2$ gleich Null wird. Es wird gesetzt

$$\sigma(v_1, v_2) = e^{\frac{1}{20}\left(\sum\limits_1^{10} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} v_1^2 + 2 \sum\limits_1^{10} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} v_1 v_2 + \sum\limits_1^{10} \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} v_2^2\right)} \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta},$$

wo σ und ϑ alle 10 geraden Functionen repräsentiren, die Σ über die 10 geraden ϑ sich erstrecken, und ϑ_{ab} hier den Nullwert der zweiten Ableitung von $\vartheta(v_1, v_2)$ nach dv_a, dv_b bedeutet. Eine Bemerkung des Verfassers in betreff dieser Functionen bei Herrn Weierstrass entspricht in sofern nicht den Thatsachen, als in der grundlegenden Arbeit dieses Herrn (Crelle J. XLVII) die Constanten a_{11}, a_{12}, a_{22} für die Function $Al(u_1)$, welche der Function $\sigma(u_1, u_2)$ entspricht, vollständig durch die Perioden erster und zweiter Gattung bestimmt sind.

In § 3 werden in bekannter Weise die Beziehungen zwischen den v und u gegeben, die zu u_a gehörigen Perioden werden $\omega_{a1}, \omega_{a2}, \omega_{a3}, \omega_{a4}$ und $\omega_{1i}\,\omega_{2k} - \omega_{2i}\,\omega_{1k} = p_{ik}$ bezeichnet, und der Verfasser nennt die p_{ik} transcendente Covarianten, bez. Invarianten, $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ absolute Covarianten, bez. Invarianten der binären Form sechsten Grades f (der homogenen Variabeln $z_1 : z_2$ oder $x_1 : x_2$), die bei den Integralen unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt. In § 4 wird das K_a entsprechend für die ungeraden σ bestimmt, die Werte der $a_{11}, \ldots$ bleiben natürlich dieselben. Die geraden σ werden als absolute Covarianten, die ungeraden als solche mit dem Index 1 bezeichnet. In § 5 werden einige Umformungen des Ausdrucks für den Wert der $a_{11}, \ldots$ gegeben; in § 6 die Functionalgleichungen, denen die σ bei Vermehrung der u_1, u_2 um Perioden unterliegen. Herr Klein führt entsprechend der Weierstrass'schen Bezeichnung die Perioden zweiter Gattung ein; die Formel 34 stimmt dann inhaltlich vollständig mit der von Herrn Weierstrass in Crelle J. XLVII. 303 für $Al(u_1, \ldots)$ gegebenen überein.

In § 7 geht Herr Klein zu den Integralen dritter Gattung über, definirt diese und stellt als ein ausgezeichnetes und einfaches, Q, das auf, dessen Zähler nicht nur eine rationale, sondern auch eine ganze Covariante von f ist. In § 8 werden die Thetafunctionen durch die Integrale dritter Gattung definirt, im § 9 dementsprechend die σ-Functionen, und wird hierzu das erwähnte Normalintegral Q gebraucht. Die §§ 10 und 11 sind der Reihenentwickelung der σ-Functionen nach Potenzen von u_1, u_2 gewidmet. Indem auf die schon im § 5 erwähnte auf zehn verschiedene Weisen mögliche Zerlegung von f in zwei kubische Formen φ und ψ, den geraden Thetafunctionen entsprechend, und auf die in sechs Weisen mögliche Zerlegung von f in eine Linearform p und eine Form fünften Grades χ, den ungeraden Theta entsprechend, zurückgegriffen wird, wird erschlossen, dass in den Reihenentwickelungen die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu}$ simultane Covarianten der Formen φ, ψ, die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ solche von p und χ sind, in denen die Variabeln durch u_1, u_2 ersetzt sind. Das simultane Formensystem zweier binären kubischen Formen wird aus Clebsch „Theorie der binären algebraischen Formen“ entnommen und daraus in der dort gegebenen Bezeichnungsweise die Entwickelung von $\sigma(u_1, u_2)$ nach Potenzen von u_1, u_2 direct hingeschrieben.

In § 12 werden die Hauptformeln von Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen zum Vergleich herangezogen, und unter Verwendung derselben invarianten Bildungen werden sie in der entsprechenden Form gegeben. In § 13 werden dann die elliptischen mit den hyperelliptischen Functionen verglichen. Wie man in der Theorie der elliptischen Functionen sich keineswegs hauptsächlich auf die Nebeneinanderstellung der $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$ stütze, sondern auf die von $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$, welche bei linearer Transformation der Perioden unverändert bleiben, und die Functionen erster Stufe erster, zweiter, dritter Ordnung genannt werden, ebenso müsse man in der Theorie der hyperelliptischen Functionen entsprechende Functionen aufstellen. Dies geschieht im letzten Paragraphen für die einfachsten derselben. Herr Klein schliesst seine Arbeit mit folgenden Worten: „Das wesentliche

Neue meiner Betrachtungen erblicke ich in dem principiellen Anschlusse an die Processe und Begriffsbildungen der Invariantentheorie: nur hierdurch wird von vorneherein die Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Constanten möglich und also ein wichtiges Hindernis weggehoben, das sich bisher dem Fortschritte der Theorie entgegenstellte. Die elliptischen Functionen zusammen mit den hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente erscheinen dabei durch den Umstand ausgezeichnet, dass bei ihnen die Betrachtung einer binären Form zu Grunde zu legen ist (oder doch zu Grunde gelegt werden kann), während man zur Behandlung der allgemeinen Abel'schen Functionen zu Formen mit grösserer Variablenzahl wird schreiten müssen".

Hch.

M. KRAUSE. Zur Division der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Festschr. d. Univ. Rostock zur 5. Säcularfeier d. Univ. Heidelberg. VI + 21 S. 4°.

H. POINCARÉ. Sur les fonctions abéliennes. Newcomb Am. J. VIII. 289-343.

Im ersten Paragraphen giebt der Verfasser eine ausführliche Auseinandersetzung über die Erweiterung zweier Sätze des Herrn Weierstrass in betreff der Abel'schen Integrale, die sich auf einen niederen Rang reduciren lassen; im wesentlichen eine Wiederholung der schon von ihm und Herrn Picard in dem S. M. F. Bull. veröffentlichten Ausführungen, über die F. d. M. XVI. 1884. 426 berichtet ist. Ueber die hinzugekommenen Erweiterungen siehe das Referat S. 410. Den Schluss bildet folgender Satz: Wenn in einem System Abel'scher Integrale vom Range ϱ sich μ auf den Rang μ reduciren lassen, so giebt es auch immer $\varrho-\mu$, die auf den Rang $\varrho-\mu$ reducirbar sind. Im zweiten Paragraphen werden zunächst specielle Fälle besprochen und dann die schon in den C. R. IC gegebenen Sätze ausführlicher behandelt (siehe F. d. M. XVI. 1884. 430). Im dritten giebt Herr Poincaré eine Verallgemeinerung des Abel'schen Theorems. Er fasst die Punkte $x_1, y_1; \dots; x_q, y_q$ als Schnittpunkte einer ebenen Curve mit einer

variablen ebenen Curve m^{ten} Grades auf, für welche bei Integralen erster Gattung das Abel'sche Theorem gilt, und erweitert es, indem er dafür Raumcurven und Oberflächen einführt und zeigt, dass das Abel'sche Theorem noch gültig ist für Integrale erster Gattung von vollständigen Differentialen der Form

$$\int (R_1 dx_1 + R_2 dx_2 + \cdots + R_n dx_n),$$

wo die R rationale Functionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und von z sind, und z durch eine algebraische Gleichung $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ definirt ist.

Darauf entwickelt er in den beiden folgenden Paragraphen für die „fonctions intermédiaires" Briot's und Bouquet's (Functionen, die bei Vermehrung der Variabeln um eine Periode bis auf einen in den Variabeln linearen Exponentialfactor unverändert bleiben) die wesentlichsten Eigenschaften und giebt für die Multiplicatoren, die zu den Perioden gehören, gewisse Ausdrücke, die invariante Eigenschaften besitzen. Dies zeigt er zunächst bei Vertauschung der Fundamentalperioden und linearer Vertauschung der Variabeln, geht darauf zu den Transformationen μ^{ter} Ordnung über und giebt die Beziehungen zwischen den transformirten und ursprünglichen Functionen. Hieran schliesst sich die Untersuchung für den Fall, dass die Abel'schen Integrale auf elliptische reducirbar sind; es wird gezeigt, wie man zu den von einander unabhängigen Perioden der einzelnen elliptischen Integrale durch passende Transformationen gelangt.

Im letzten Paragraphen beweist Herr Poincaré folgenden Satz: Wenn ϱ intermediäre Functionen von ϱ Variabeln gegeben sind, die dieselben Perioden besitzen und respective von der Ordnung $m_1, m_2, \ldots, m_\varrho$ sind, und man denkt sich die N distincten (d. h. nicht nur um Perioden verschiedenen) Wertsysteme aufgestellt (N ist $= \varrho!\ m_1 m_2 \ldots m_\varrho$), so sind die Summen dieser Nullwerte der einzelnen Variabeln nur von den Perioden und Multiplicatoren abhängig und sind einem der einfachen früher aufgestellten invarianten Ausdrücke congruent modulo der Periode. Speciell für die Θ-Functionen, wo jene Ausdrücke gleich 0 sind, reducirt sich, wenn man (für $\varrho > 2$) ϱ der 4^ϱ Theta gleich 0 setzt,

die Summe der ϱ! distincten Wertsysteme auf ein Vielfaches der Perioden oder auf Null. Hch.

P. Appell. Sur les fonctions abéliennes. C. R. CIII. 1246-1248.

Der Verfasser knüpft seine Untersuchung an einen Beweis Jacobi's (Crelle J. VIII), dass die ultraelliptischen Functionen zweier Variabeln darstellbar seien als algebraische Functionen von Functionen einer Variabeln. Mit Berufung auf den Satz von Weierstrass (Borchardt J. LXXXIX pag. 1), dass sich jede $2r$-fach periodische eindeutige Function, die den Charakter einer rationalen Function hat, durch $r+1$ beliebige Functionen derselben Art, die dieselben Perioden haben, rational ausdrücken lässt, und dass unter diesen $r+1$ Functionen eine algebraische Gleichung besteht, zeigt Herr Appell unter Benutzung des Additionstheorems, dass, wenn man $u=x, v=0, u'=0, v'=y$ setzt, sich drei Functionen $f_i(x, y)$ als rationale Functionen R_i von X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3 ergeben, wo $X_i=f_i(x, 0)$, $Y_i=f_i(0, y)$ also Functionen einer Variabeln sind. Ebenso ergeben sich $f_i(x+\alpha, y+\beta)$, wenn α, β eine Gruppe zugehöriger Perioden sind, als Functionen R_i von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, wo die φ und ψ wieder Functionen der X resp. der Y, also von x resp. von y sind. Es muss also $R_i(X, Y)$ gleich $R_i(\varphi, \psi)$ sein. Die Betrachtungsweise lässt leicht eine Ausdehnung auf Abel'sche Functionen beliebig vieler Variabeln zu. Hch.

W. Reichardt. Ueber die Normirungen der Borchardt'schen Moduln der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p=2$. Klein Ann. XXVIII. 84-98.

Der Verfasser geht aus von der Kummer'schen Fläche, betrachtet diese nach dem Vorgange des Herrn Klein als gemeinsame Singularitätenfläche von ∞^1 confocalen Complexen, stellt die nötigen Gleichungen für sie auf und betrachtet darauf bezügliche Gruppen von Substitutionen. Dann stellt er sich die Aufgabe, die Coordinaten, insbesondere die Knotenpunktcoordinaten auf transcendentem Wege derart absolut zu definiren, dass zu

ihnen ein Substitutionssystem bestimmter Art gehört. Es werden transcendente Parameter auf der Kummer'schen Fläche definirt und zwar als Integrale hyperelliptischer Functionen. Es geschieht der Uebergang zu den ϑ-Functionen, aus diesen werden durch eine quadratische Substitution der Perioden neue gewonnen, von diesen sind vier identisch mit den Verhältnissen der Coordinaten eines Punktes der Kummer'schen Fläche, wie sie zuvor betrachtet worden waren. Die vier Nullwerte dieser Theta sind nun die Borchardt'schen Moduln für die hyperelliptischen Functionen $p = 2$, und können also definirt werden als Coordinaten eines Knotenpunktes der Kummer'schen Fläche in Bezug auf eines der 15 Fundamentaltetraeder. Nachdem die Verhältnisse der Coordinaten bestimmt sind, geht der Verfasser zu einer transcendenten absoluten Normirung der Coordinaten über. Es wird ein Factor gesucht, der mit den ϑ multiplicirt bewirkt, dass diese bei linearer Transformation der ursprünglichen Perioden sich bis auf einen rein numerischen Coefficienten substituiren. Dieser Factor wird so bestimmt, dass an Stelle der ϑ die Function σ tritt in der von Herrn Klein (Referat S. 418) definirten Bedeutung, und dann wird die verlangte Eigenschaft speciell nachgewiesen. Hch.

G. Pick. Ueber die Abel'schen Integrale dritter Gattung, welche zu singularitätenfreien ebenen algebraischen Curven gehören. Wien. Ber. XCIV. 367-371.

Der Herr Verfasser zeigt, wie man für jede beliebig gegebene singularitätenfreie ebene algebraische Curve ein Integral dritter Gattung explicite aufstellen kann, welches durch eine Reihe ausgezeichneter Eigenschaften auf den Namen eines Normalintegrals Anspruch besitzt. Kr.

G. Pick. Ueber die zu einer singularitätenfreien ebenen algebraischen Curve gehörigen ϑ-Functionen. Wien. Ber. XCIV. 739-747.

In der vorliegenden Mitteilung drückt der Herr Verfasser die ϑ-Functionen, welche das Umkehrproblem der zu einer sin-

gularitätenfreien ebenen algebraischen Curve gehörigen Abel'schen Integrale zur Lösung bringen, im Anschlusse an seine Notiz „Ueber die Abel'schen Integrale dritter Gattung, welche zu singularitätenfreien ebenen algebraischen Curven gehören" (Wien. Ber. XCIV. 367-371) in covarianter Form aus.

Kr.

H. Dobriner. Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hülfe von Thetafunctionen zweier Variabeln. Acta Math. IX. 73-104.

Führt man bei den Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien die Bedingung der Constanz des Krümmungsmasses ein, so erhält man als eine Folge davon die Eigenschaft, dass die Centra der osculirenden Kugeln auf einer Geraden liegen. Die Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten X_1, X_2, X_3 einer Fläche constanten Krümmungsmasses mit einem System sphärischer Krümmungslinien sind daher in jenen allgemeineren Formeln enthalten, welche der Herr Verfasser in seiner Arbeit „Ueber die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien" (Kronecker J. XCIV. 116-161) unter III d. auf den Seiten 153-155 für die Coordinaten derjenigen Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien aufgestellt hat, deren Mittelpunktscurve eine gerade Linie ist (§ 1). Die darin vorkommenden, im genannten allgemeineren Falle willkürlichen Functionen p_1, p_2 und q_1, q_2 der Parameter u, v der Krümmungslinien genügen in Folge der Constanz des Krümmungsmasses gewissen Differentialgleichungen (Gleichungen (25) des § 3 und Gleichungen (20) des § 2), auf Grund deren sich, wie der Herr Verfasser in den §§ 4, 5 und 6 zeigt, die Functionen p_1, p_2 mit Hülfe von Thetafunctionen einer Veränderlichen, die Functionen q_1, q_2 mit Hülfe von Thetafunctionen zweier Veränderlichen als Functionen von u und v darstellen lassen (Gleichungen (33) des § 4 und (43) des § 6). Die Ausdrücke für die Coordinaten X_1, X_2, X_3 der in Rede stehenden Fläche enthalten ferner zwei Systeme

von je neun Grössen, l_h, m_h, n_h ($h = 1, 2, 3$) das eine, λ_h, μ_h, ν_h ($h = 1, 2, 3$) das andere, die einzeln den Bedingungsgleichungen einer orthogonalen Substitution und gewissen Differentialgleichungen genügen, deren Integration auf Schwierigkeiten stossen würde, wenn man nicht durch den Umstand, dass die Functionen p und q durch Thetafunctionen darstellbar sind, von vorneherein auf die Vermutung käme, die gesuchten orthogonalen Systeme möchten mit dem bekannten aus den neun Quotienten der zehn geraden Thetafunctionen gebildeten orthogonalen Systeme in nahem Zusammenhange stehen. Von dieser Annahme ausgehend gelingt dem Herrn Verfasser die Bestimmung der Grössen l, m, n (Gleichungen (48) des § 8) und λ, μ, ν (Gleichungen (49) des § 8) ohne Mühe. Im Schlussparagraphen wird dann noch gezeigt, dass das Krümmungsmass der in ihren Coordinaten im Vorangehenden bestimmten Fläche in der That ein constantes ist. Kr.

K. Bobek. Ueber hyperelliptische Curven. Wien. Ber. XCIII. 601-607, XCIV. 861-873.

Siehe Abschn. IX, Cap. 2, D.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

E. Catalan. Sur les fonctions X_n de Legendre (Troisième Mémoire). Belg. Mém. XLVI. 28 S.

Zusätze zu den in F. d. M. XIII. 1881. 394—395, XIV. 1882. 429—430 besprochenen Forschungen. Mn.

C. Neumann. Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwickelung der Ausdrücke $P_n(zz_1+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. Leipz. Abh. 403-476.

Setzt man

$$Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi,$$

wo z und z_1 complex, Φ aber reell sein sollen, so ergeben sich für die Kugelfunctionen $P_n(Z)$ und $Q_n(Z)$ Formeln von folgender Gestalt:

$$(A) \qquad P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n} \mathfrak{A}_{nh} P_{nh}(z) P_{nh}(z_1) \cos h\Phi,$$

$$(B) \qquad Q_n(Z) + \mathfrak{M} \,.\, 2\pi i P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \mathfrak{B}_{nh} f_{nh}(z) Q_{nh}(z_1) \cos h\Phi,$$

dabei repräsentiren die P_{nh} und Q_{nh} die adjungirten Kugelfunctionen. Die f_{nh} sind für $h \leqq n$ mit den P_{nh} identisch, für $h > n$ aber durch gewisse andere Functionen dargestellt. Die $\mathfrak{A}_{nh}$ und $\mathfrak{B}_{nh}$ sind constante Coefficienten. Hingegen repräsentirt $\mathfrak{M}$ eine variable ganze Zahl, d. h. eine Zahl, deren Wert wesentlich abhängt von den augenblicklichen Werten der Argumente z, z_1, Φ.

Die Formel (A) giebt geradezu die Entwickelung des Ausdrucks $P_n(Z)$. Andererseits erhält man die Entwickelung des Ausdrucks $Q_n(Z)$, falls man $P_n(Z)$ aus den beiden Formeln (A), (B) eliminirt. Die Formel (A) ist ganz allgemein gültig. Bei der Formel (B) hingegen wird vorausgesetzt, dass die complexen Variabeln z, z_1 gewissen Bedingungen entsprechen. Und um diese Bedingungen bequem angeben zu können, wird es zweckmässig sein, an bekannte geometrische Betrachtungen anzuknüpfen, indem man z und z_1 als zwei variable Punkte in der z-Ebene sich vorstellt. Von besonderer Wichtigkeit sind dabei die beiden festen Punkte -1 und $+1$; sie mögen die beiden Pole heissen, und gleichzeitig mag die gerade Verbindungslinie dieser beiden Pole die Pollinie genannt werden.

Denkt man sich alle von Pol zu Pol gehenden Kreisbogen und deren rechtwinklige Trajectorien construirt, so sind diese Trajectorien bekanntlich wiederum Kreise, sie mögen in Zukunft kurzweg als das System der Dipolarkreise bezeichnet werden. Solches festgesetzt, lauten alsdann jene den Punkten z und z_1 aufzuerlegenden Bedingungen folgendermassen:

(α) Es soll $R < R_1$ sein, wo R und R_1 die Radien der respective durch z und z_1 gehenden Dipolarkreise vorstellen.

(β) Es soll der reelle Teil von z positiv sein, mithin der Punkt z rechts von der imaginären Axe liegen. Es ist nämlich die reelle x-Axe von links nach rechts, und die imaginäre y-Axe von unten nach oben fortlaufend zu denken.

(γ) Es soll der Punkt z_1 von der Pollinie durch irgend welchen Zwischenraum getrennt sein.

Denkt man sich diese Bedingungen (α), (β), (γ) wirklich erfüllt, so werden nicht nur die Formeln (A), (B) in Kraft sein, sondern gleichzeitig wird alsdann auch die Bestimmung der daselbst auftretenden Zahl $\mathfrak{M}$ eine sehr einfache sein, nämlich zu bewerkstelligen sein nach folgender Regel: Man construire die in (A), (B) enthaltenen Punkte z, z_1, Z, überdies noch einen vierten Punkt z', der der Formel entsprechen soll: $z' = zz_1$, und construire sodann die gebrochene Linie

$$(L) \qquad (Z, z', z_1),$$

d. i. eine Linie, welche von Z geradeaus nach z', und von z' geradeaus nach z_1 geht. Alsdann wird jene Zahl $\mathfrak{M} = 0$ sein, falls die Linie (L) die Pollinie gar nicht oder aber zweimal überschreitet. Hingegen wird die Zahl $\mathfrak{M} = \pm 1$ sein, falls (L) die Pollinie nur einmal überschreitet, und zwar $= +1$ oder $= -1$, jenachdem diese einmalige Ueberschreitung von oben nach unten, oder umgekehrt von unten nach oben erfolgt.

Dabei sei bemerkt, dass die so eben angedeuteten Resultate vom Verfasser erhalten sind unter Anwendung der Laplace'schen Methode. Uebrigens ist der hier behandelte Gegenstand schon von Heine untersucht worden, jedoch auf einem wesentlich andern Wege, nämlich unter Anwendung der Jacobi'schen Methode. Abgesehen von dieser Verschiedenheit der Methode, besteht der Unterschied der gegenwärtigen Untersuchung gegenüber der Heine'schen namentlich darin, dass die hier vom Verf. zur Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$ gegebene Regel durch besondere Einfachheit sich auszeichnet, während bei Heine im Gegenteil die Bestimmung von $\mathfrak{M}$ mit mancherlei mühsamen Substitutionen und

Unterscheidungen verknüpft ist. Will man die Art und Weise, in welcher Heine die Zahl $\mathfrak{M}$ bestimmt, sich vergegenwärtigen, so hat man die Auseinandersetzungen in seinem Handbuch der Kugelfunctionen (Erster Band, Berlin. 1878) auf Seite 335 und 336, und überdies noch die daselbst auf Seite 169 gegebenen Vorschriften einem sorgfältigen Studium zu unterwerfen. N.

C. Neumann. Ueber gewisse particuläre Integrale der Differentialgleichung $\Delta F = F$, insbesondere über die Entwickelung dieser particulären Integrale nach Kugelfunctionen. Leipz. Ber. 75-82.

Der Verf. gelangt zu folgendem Resultat: Setzt man:

$$R = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\mu},$$

und ferner:

$$U = \frac{1}{2R}(e^R - e^{-R}) = 1 + \frac{R^2}{1.2.3} + \frac{R^4}{1.2.3.4.5} + \cdots,$$

$$V = \frac{1}{2R}(e^R + e^{-R}) = \frac{1}{R} + \frac{R}{1.2} + \frac{R^3}{1.2.3.4} + \cdots,$$

so gelten für diese Ausdrücke U, V folgende nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$ fortschreitende Entwickelungen:

$$U = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2^n \Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2 \mathfrak{S}_n(r)\mathfrak{S}_n(r_1)P_n(\mu),$$

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{S}_n(r)\mathfrak{T}_n(r_1)P_n(\mu), \quad [r < r_1],$$

wo $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n$ die Functionen vorstellen:

$$\mathfrak{S}_n(r) = r^n\left(1 + \frac{r^2}{2(2n+3)} + \frac{r^4}{2.4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right),$$

$$\mathfrak{T}_n(r) = \frac{1}{r^{n+1}}\left(1 - \frac{r^2}{2(2n-1)} + \frac{r^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right).$$

Und zwar gelangt der Verf. zu diesem Resultat auf Grund des Umstandes, dass jene von R abhängenden Ausdrücke U und V sich als particuläre Integrale der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F$$

erweisen, sobald man in ihnen unter R den Abstand des Punktes (x, y, z) von irgend einem festen Punkt (x_1, y_1, z_1) versteht.

N.

C. Posse. Ueber die Functionen, welche den Legendre'schen ähnlich sind. Chark. Ges. 1885. II. 155-169. (Russisch.)

Es werden die Theoreme bewiesen, welche von Hrn. Stieltjes für die betrachteten Functionen gegeben sind (C. R. C. 439, F. d. M. XVII. 1885. 62), z. B. das Theorem: „Die Function $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_n)^\alpha [(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)]^\beta \Pi(x_i - x_k)^2$, wo α und $\beta > 0$ sind, und die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ in den Grenzen 0 und 1 bleiben, erreicht ihr Maximum, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ gleich den Wurzeln der Gleichung $T_n(\alpha, \beta, x) = 0$ werden". Der Beweis ist basirt auf der Definition der Function $T_n(\alpha, \beta, x)$ als Nenner der n^{ten} Annäherung der Kettenbruchentwickelung des Integrals $\int_0^1 \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz}{x-z}$. Das Maximum selbst wird berechnet. Als Grenzfall des erwähnten Theorems wird noch ein neues Theorem bewiesen: „Der Ausdruck

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n e^{-(\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n)} \pi(\xi_i - \xi_k)^2$$

wird ein Maximum, wenn $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ gleich den Wurzeln der Gleichung $\psi_n(\xi) = 0$ werden. Die Function $\psi_n(\xi)$ ist der Nenner des n^{ten} Näherungsbruches der Kettenbruchentwickelung des Integrals $\int_0^\infty \frac{e^{-u}du}{\xi - u}$".

Wi.

E. Haentzschel. Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen. Schlömilch Z. XXXI. 25-33

Die Differentialgleichung der Lamé'schen Functionen lässt sich mit Benutzung der Weierstrass'schen Function $\wp(u)$ auf die Form bringen:

$$(1) \qquad \frac{d^2E}{du^2} = \{n(n+1)[\wp(u) - e_\lambda] - h^2\} E \qquad (\lambda = 1, 2, 3).$$

Neben diesen Functionen, in denen n ganzzahlig ist, spielen eine wichtige Rolle die Functionen y, die der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{du^2} = \{(\nu^2 - \tfrac{1}{4})[\wp(u) - e_\lambda] - h^2\} y$$

genügen, wobei ν eine ganze Zahl ist. Der Verfasser zeigt nun, dass sowohl in (1), als in (2) die Differentialgleichung der Kugelfunctionen als Specialfall enthalten ist. Leitet man aus (2) die Differentialgleichung ab, der

$$(3) \qquad z = y[\wp(u) - e_\lambda]^{\frac{1}{4}}$$

genügt, so geht letztere für $e_2 = e_3$ und $\lambda = 3$ in die der zugeordneten Kugelfunctionen P_ν^m, Q_ν^m über mit dem Argument $\cos(u\sqrt{e_1 - e_3})$ und dem oberen Index

$$m = \frac{h}{\sqrt{e_1 - e_3}} - \frac{1}{2};$$

Dieser Index m braucht keine ganze Zahl zu sein, während der untere Index ν ganzzahlig ist. Die sich ergebenden Kugelfunctionen sind also allgemeiner, als die Laplace'schen, und enthalten u. a. auch die Mehler'schen Kegelfunctionen. Für $e_2 = e_3$, $\lambda = 3$ geht aber auch die Gleichung (1) für E in die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunctionen über, nur dass das Argument hier $-\cot g^2(u\sqrt{e_1 - e_3})$, dass ferner der obere Index n ganzzahlig, der untere Index $= \frac{h}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ ist. Obwohl sich somit aus (1) sowohl, als aus (2) die Kugelfunctionen ableiten lassen, sind doch nicht die Lamé'schen Functionen E, sondern die durch (2) und (3) definirten Functionen z als die wahren Verallgemeinerungen der Kugelfunctionen zu betrachten, weil das zweite particuläre Integral von (2), ebenso wie die Kugelfunction $Q_\nu^n(x)$ für $x = 1$ logarithmisch unendlich wird, während das zweite particuläre Integral von (1) stets algebraisch ist.

Für $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ geht die aus (2) folgende Differentialgleichung für $z = \frac{y}{\sqrt{u}}$ in die Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen über.

Endlich wird darauf aufmerksam gemacht, dass das, was Heine in seinem Handbuch der Kugelfunctionen über den Zusammenhang der Functionen des elliptischen Cylinders mit den Lamé'schen, Bessel'schen und Kugelfunctionen sagt, nicht richtig ist, dass vielmehr die erstgenannten Functionen zu den übrigen nicht in so naher Beziehung stehen, wie Heine angiebt. Auch Heine's Darstellung der Functionen des elliptischen Cylinders zweiter Art durch Bessel'sche Functionen ist falsch (cf. das folgende Referat). Wn.

E. Haentzschel. Zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders. Pr. Realgymn. Duisburg. 24 S.

Die Arbeit bezweckt, die von Heine und Lindemann erhaltenen Resultate einheitlich darzustellen und in einigen Punkten zu ergänzen. Sie beginnt mit einer Ableitung der Differentialgleichung, welcher die im Titel genannten Functionen genügen, aus der Potentialtheorie. Durch Einführung cylindrischer Coordinaten ergiebt sich leicht, dass die Cylinder zweiter Ordnung die einzigen sind, bei denen die bekannte Gleichung $\Delta V = 0$ Particularlösungen zulässt in Form eines Productes aus drei Functionen je einer Veränderlichen. Die von x (die x-Axe ist die Cylinderaxe) unabhängigen Factoren eines solchen Productes sind im allgemeinen Falle die Functionen des elliptischen Cylinders; in einfacher Weise ergeben sich aus ihnen als specielle Fälle resp. als Grenzfälle einmal die Bessel'schen Functionen (Functionen des geraden Kreiscylinders), andrerseits die Functionen des parabolischen Cylinders. Die Differentialgleichung für die Functionen des elliptischen Cylinders lässt sich in folgende, als algebraische Normalform bezeichnete Form bringen:

$$4s^2(\alpha\beta s - m^2)\frac{d^2y}{ds} + 2s^2(4\alpha\beta s - 3m^2)\frac{dy}{ds} + \left[\tfrac{3}{4}\alpha\beta s^2 + \left(\nu^2 - \frac{m^2}{4}\right)s - h^2\right]y = 0.$$

Diese Gleichung, die für $m = 0$ in die der Functionen des parabolischen Cylinders übergeht, während der Fall $\alpha = 0$ auf die

Bessel'schen Functionen führt, ist nur ein specieller Fall der allgemeineren Gleichung, auf welche zuerst vom Referenten, später von Herrn Darboux die Potentialgleichung für die Cykliden reducirt ist. Da die auf die Cykliden bezüglichen Functionen nach Heine's Bezeichnung Lamé'sche Functionen dritter Ordnung sind, so folgt, dass die Functionen des elliptischen Cylinders auch Cylinderfunctionen dritter Ordnung werden, nicht solche zweiter Ordnung, wie Heine angiebt. Auch die Behauptung Heine's, die Functionen des elliptischen Cylinders gingen in derselben Weise aus den Lamé'schen Functionen zweiter Ordnung hervor, wie die Bessel'schen Functionen aus den Kugelfunctionen, wird damit hinfällig.

Die weitere Untersuchung betrifft zunächst das Verhalten der Integrale der obigen Differentialgleichung an den singulären Stellen. In Bezug auf die Stelle $s = 0$ versagen die bekannten Methoden, nur für den Fall $m = 0$ ergiebt sich dieser Punkt als ein wesentlich singulärer. Die Punkte $s = \infty$ und $s = \frac{m^2}{\alpha\beta}$ dagegen sind beide ausserwesentlich singulär; für den parabolischen Cylinder ist die letztere Stelle nicht vorhanden, für die Bessel'schen Functionen fallen beide zusammen. Durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher werden diese Stellen $\left(s = \infty \text{ resp. } s = \frac{m^2}{\alpha\beta}\right)$ in den Anfangspunkt verlegt, wodurch zugleich die Lindemann'sche Form der Differentialgleichung gewonnen wird. Die beiden neuen Formen der Differentialgleichung ermöglichen nun sofort Reihenentwickelungen für die Integrale derselben; dabei ergiebt sich neben den vier von Heine aufgestellten Klassen der Functionen des elliptischen Cylinders noch eine fünfte, während die Hermite'sche Darstellung der Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine sechste (schon von Lindemann behandelte) Klasse führt. Die Einzelheiten dieser Untersuchung, die übrigens zu keinen wesentlich neuen Resultaten führt, lassen sich nicht in Kürze wiedergeben.

Wn.

E. Papperitz. Untersuchungen über die algebraische Transformation der hypergeometrischen Functionen. Habilitationsschrift Dresden. Leipzig. Teubner; Klein Ann. XXVII. 315-357.

Die vorliegende Arbeit giebt die Grundlagen einer Theorie der algebraischen Transformation der hypergeometrischen Functionen oder vielmehr, was im wesentlichen auf das Gleiche hinauskommt, der von Herrn Schwarz eingeführten Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$, welche als Quotient zweier Particular-Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung erklärt ist. Diese Function genügt bekanntlich der Differentialgleichung dritter Ordnung $[s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$, wo $[s]_x$ den Ausdruck $\frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2$ bezeichnet und R die rationale Function

$$\frac{1-\lambda^2+(\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1)\,x+(1-\mu^2)\,x^2}{2x^2(1-x)^2}$$

bedeutet. Das Problem der algebraischen Transformation der Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ formulirt der Verfasser folgendermassen: „Es sollen alle algebraischen Gleichungen:

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

aufgestellt werden, welche den Uebergang von einer Differentialgleichung

$$(2) \qquad [s]_x = R(\lambda, \mu, \nu, x)$$

zu einer Differentialgleichung derselben Form

$$(3) \qquad [s]_y = R(\lambda', \mu', \nu', y)$$

vermitteln, mithin Integralgleichungen der Kummer'schen Differentialgleichung

$$(4) \qquad [x]_y + R(\lambda, \mu, \nu, x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = R(\lambda', \mu', \nu', y)$$

darstellen."

Zunächst untersucht der Verfasser die Verzweigung der beiden Riemann'schen Flächen, welche über der x- bez. y-Ebene ausgebreitet sind und zu der als irreducibel vorausgesetzten Gleichung $f(x, y) = 0$ gehören. Die hierbei befolgte Methode ist eine Verallgemeinerung derjenigen, welche Herr Klein auf die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen an-

gewandt hat. Die Grundlage derselben bildet der Schwarz'sche Satz, nach welchem die Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ die Abbildung der x-Halbebene auf ein Kreisbogen-Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ vermittelt. Um dieses Dreieck zu einem vollständig bestimmten zu machen, hat man unter $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ einen bestimmten Zweig eines bestimmten particulären Integrals der Gleichung (2) zu verstehen. Die symmetrischen Vervielfältigungen dieses Dreiecks werden dann vermöge der anderen Zweige dieses particulären Integrals abwechselnd auf die negative und positive x-Halbebene abgebildet; dieselben constituiren ein Netz von Dreiecken, welches die s-Ebene oder einen Teil derselben einfach oder mehrfach überdeckt. In analoger Weise gehört zu einem bestimmten particulären Integral $s(\lambda', \mu', \nu', y)$ der Gleichung (3) ein zweites Netz von Dreiecken, von welchen jedes einzelne die Winkel $\lambda'\pi$, $\mu'\pi$, $\nu'\pi$ aufweist. Wenn nun die Gleichung (1) in x vom n'^{ten}, in y vom n^{ten} Grade ist, so muss es möglich sein (bei richtiger Auswahl der particulären Integrale) in der s-Ebene ein Gebiet von folgender Beschaffenheit abzugrenzen: dasselbe besteht aus $2n$ Dreiecken des ersten Netzes und lässt sich in $2n'$ Teile zerlegen, welche ebenso vielen Dreiecken des zweiten Netzes äquivalent sind. Die erwähnten $2n$ Dreiecke bez. $2n'$ Teile entsprechen genau den n bez. n' Blättern der Riemann'schen Flächen, welche über der x- bez. y-Ebene ausgebreitet sind. Hieraus folgt zunächst, dass, wo immer eine Verzweigung stattfinden mag, entweder x oder y einen der Werte 0, ∞, 1 besitzen muss. Denn einer Verzweigungsstelle kann in der s-Ebene nur eine Stelle entsprechen, welche mindestens für eines der beiden Dreiecksnetze ein Eckpunkt ist. Die Eckpunkte entsprechen aber den Werten 0, ∞, 1. Des weiteren ergeben sich eine Reihe von Gleichungen und Ungleichungen zwischen den die Riemann'schen Flächen charakterisirenden Zahlen, nämlich der Zahl der Blätter, der Zahl der Cyklen, der Geschlechtszahl etc. Als besonders wichtig und interessant sei die Gleichung $n(1-\lambda-\mu-\nu) = n'(1-\lambda'-\mu'-\nu')$ hervorgehoben.

Die specielle Annahme $n' = 1$ ergiebt das vor[illegible]

sat aufgestellte System von Gleichungen und Ungleichungen, welches der rationalen Transformation $x = R_n(y)$ entspricht. Ferner lässt sich die von Herrn Schwarz erledigte Aufgabe: alle Fälle zu bestimmen, in welchen die Differentialgleichung (2) algebraisch integrirt werden kann, auf Grund der besonderen Annahme $\lambda' = \mu' = \nu' = 1$ behandeln. Bei dieser Annahme kann nämlich offenbar $s(\lambda', \mu', \nu', y) = y$ gesetzt werden. Auch für das allgemeine Transformationsproblem bildet die Lösung des Systems von Gleichungen und Ungleichungen den ersten Schritt. Ob jeder einzelnen Lösung Riemann'sche Flächen und somit Lösungen des Transformationsproblems entsprechen, bleibt indessen noch unentschieden. Jedoch ergiebt sich unabhängig hiervon eine Reihe von Sätzen, von welchen einige hier hervorgehoben seien. Dabei sei vorausgeschickt, dass mit p das Geschlecht der Gleichung (1) bezeichnet wird und dass der Verfasser unter „Kummer'schen Typen" diejenigen Transformationen versteht, bei denen mindestens einer der Exponenten $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ willkürlich bleibt. Diese Transformationen entstehen, wie Herr Goursat fand, sämtlich durch Combination der von Herrn Kummer aufgestellten rationalen Transformationen. Der Verfasser findet nun unter anderen folgende Sätze

„Soll die Kummer'sche Differentialgleichung (4) algebraische Integrale besitzen, welche nicht unter die „Kummer'schen Typen" gehören, so ist erforderlich, dass die Zahlen λ, μ, ν, λ', μ', ν' rationale Werte $\frac{\alpha}{\varrho}$, $\frac{\beta}{\sigma}$, $\frac{\gamma}{\tau}$, $\frac{\alpha'}{\varrho'}$, $\frac{\beta'}{\sigma'}$, $\frac{\gamma'}{\tau'}$ haben."

„Sind λ, μ, ν gegeben und ist $\bar{\omega} = 1 - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\tau}$ positiv und von Null verschieden, so ergiebt sich nur eine endliche bestimmbare Anzahl algebraischer Integralgleichungen, für welche die Ordnung n' in der Variabeln x und das Geschlecht p vorgegebene Werte haben, andernfalls unendlich viele." „Schliesst man die Fälle $\bar{\omega} \leqq 0$ aus, so existirt überhaupt nur eine endliche bestimmbare Anzahl wesentlich verschiedener algebraischer Irrationalitäten, welche der Kummer'schen Differentialgleichung genügen und für welche p und n' gegebene Werte haben."

Dem Beweise dieser Sätze geht eine Untersuchung vorauf, welche sich auf die zu den Functionen $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ und $s(\lambda', \mu', \nu', y)$ gehörigen Gruppen bezieht. Diese Gruppen kommen bekanntlich dadurch zu Stande, dass jedem Umlaufe der Variabeln x bez. y eine linear gebrochene Substitution der Function $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ bez. $s(\lambda', \mu', \nu', y)$ entspricht. Die Gruppe von $s(\lambda, \mu, \nu, x)$ kann in bekannter Weise aus den drei Substitutionen erzeugt werden, welche einfachen Umläufen von x um $0, \infty, 1$ entsprechen. Der Verfasser giebt die Darstellung dieser erzeugenden Substitutionen durch λ, μ, ν in einer Form, welche gestattet, die zwischen ihnen bestehende Relation in einfacher Weise geometrisch zu deuten. Zwischen den Gruppen von zwei algebraisch in einander transformirbaren s-Functionen besteht die Beziehung, dass sie eine in beiden ausgezeichnete Untergruppe gemein haben.

Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der schon oben berührten Aufgabe, die Riemann'schen Flächen, welche zu einer Lösung des Systems von Gleichungen und Ungleichungen gehören können, wirklich herzustellen. Eine besondere Anwendung wird der Theorie der Modulargleichungen (Transformation 11[ter] Ordnung) entnommen. Hz.

E. Goursat. Sur les fonctions d'une variable analogues aux fonctions hypergéométriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 107-136.

Sind $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ die singulären Stellen einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten, wobei unbeschadet der Allgemeinheit $a_\varrho = \infty$ angenommen wird, so hat diese Gleichung nach den Untersuchungen des Herrn Fuchs die Gestalt:

$$(1) \qquad y^{(m)} + \frac{F_{\varrho-2}}{\psi} y^{(m-1)} + \frac{F_{2\varrho-4}}{\psi^2} y^{(m-2)} + \cdots + \frac{F_{m\varrho-2m}}{\psi^m} y = 0,$$

falls ihre Integrale sich überall „regulär“ verhalten. Hier bezeichnet F_k allgemein eine ganze Function der unabhängigen Variabeln x von nicht höherem als dem k^{ten} Grade, und es ist

$\psi = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{\varrho-1})$. Die Gleichung (1) ist bestimmt, wenn die Coefficienten der Functionen F_k bekannt sind. Die Gesamtzahl dieser Coefficienten beträgt $(\varrho - 2)\frac{m(m+1)}{2} + m$. Nimmt man nun an, es seien die $m\varrho$ Wurzeln der Fundamentalgleichungen gegeben, sowie die singulären Stellen $a_1, a_2, \ldots$, so ergeben sich $m\varrho$ lineare Gleichungen für jene Coefficienten, von welchen indessen eine eine Folge der übrigen ist, da die Summe Σr aller dieser Wurzeln einen nur von m und ϱ abhängigen Wert, nämlich

$$\Sigma r = \frac{m(m-1)(\varrho - 2)}{2}$$

besitzt. Durch die singulären Punkte und die Wurzeln der Fundamentalgleichungen ist also die Gleichung (1) nur dann bestimmt, wenn $m\varrho - 1 = (\varrho - 2)\frac{m(m+1)}{2} + m$ ist. Diese Relation ist nun ausser für $m = 1$ nur noch für $m = 2$ und $\varrho = 3$ erfüllt. Daraus folgt, wie schon Herr Fuchs hervorhob, dass der bekannte Ansatz von Riemann, welcher sich auf den Fall $m = 2, \varrho = 3$ bezieht, sich nicht auf höhere Fälle übertragen lässt. Herr Goursat bemerkt nun, dass man die Riemann'sche Untersuchung auf folgende Weise verallgemeinern kann. Man nehme an, dass die Wurzeln der Fundamentalgleichung, welche zu der Stelle a_i gehören, sich in λ_i Gruppen von $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}$ anordnen, der Gestalt, dass die Wurzeln einer Gruppe sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, dass dagegen die Differenz zweier Wurzeln aus verschiedenen Gruppen niemals eine ganze Zahl ist. Dann treten nach Herrn Fuchs in den zu a_i gehörigen Fundamentalintegralen im allgemeinen notwendig Logarithmen auf. Stellt man nun die Forderung, dass erstens jene Wurzeln gegeben sind und dass zweitens Logarithmen nicht auftreten sollen, und zwar für alle singulären Stellen, so ergeben sich für die Coefficienten der Functionen F_k im ganzen

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)} + 1)}{2} - 1$$

Bedingungsgleichungen. Ist also die letztere Zahl gleich der

Gesamtzahl jener Coefficienten, so wird die Aufgabe, aus den gegebenen Grössen die Differentialgleichung zu bestimmen, im allgemeinen wieder eine vollständig bestimmte sein. Zunächst wird es sich darum handeln, alle Systeme von Zahlen $m_k^{(i)}$, welche der angegebenen Bedingung genügen, aufzustellen. Dabei kann man den Fall, dass alle m Wurzeln für eine Stelle a_i eine einzige Gruppe bilden, ausschliessen, da in diesem Falle die singuläre Stelle a_i durch eine einfache Substitution ihren singulären Charakter verliert. Dies vorausgesetzt, ergiebt sich die wichtige Ungleichung $\varrho \overline{\overline{<}} m+1$, welche zur Folge hat, dass zu einem gegebenen Wert von m nur eine endliche Anzahl von Systemen $m_k^{(i)}$ gehört.

Diese Systeme stellt Herr Goursat für $m = 3$ und $m = 4$ auf; es ergeben sich 2 bez. 7 solche Systeme. Für einen beliebigen Wert von m kann man ohne weiteres zwei zulässige Wertsysteme $m_k^{(i)}$ angeben; nämlich

$$1)\qquad \varrho = 3;\; m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = \cdots = m_m^{(1)} = 1;$$
$$m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = \cdots = m_m^{(2)} = 1;\; m_1^{(3)} = m-1,\; m_2^{(3)} = 1$$

und

$$2)\qquad \varrho = m+1;\; m_1^{(i)} = m-1,\; m_2^{(i)} = 1, (i = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Die dem ersten Falle entsprechenden Differentialgleichungen führen zu den höheren hypergeometrischen Reihen, während der zweite Fall die zuerst von Herrn Pochhammer untersuchten Functionen ergiebt (cf. F. d. M. II. 1870. 265).

Wenn nun, irgend einem Systeme $m_k^{(i)}$ entsprechend, die Wurzeln der Fundamentalgleichungen gegeben sind, so findet man für die Coefficienten der F_k in (1) so viele Bestimm gleichungen, als ihre Anzahl beträgt. Diese Gleichungen w linear, wenn die Wurzeln einer Gruppe sich je in eine ari tische Progression von der Differenz 1 anordnen lassen folgt eine Betrachtung dieses besonderen Falles, welche zun zeigt, dass die Zahlen $m_k^{(i)}$ noch eine Ungleichheitsbeding erfüllen müssen, wenn zu ihnen eine Differentialgleichung (wirklich gehören soll. Sodann ergiebt sich weiter der wichtige Satz, dass die Gruppen der untersuchte [illegible] tialgleichungen

auf algebraischem Wege aus den Multiplicatoren der Integrale gefunden werden können. Dieser Satz gilt indessen nicht nur für den besonderen Fall, welcher zunächst betrachtet wird, sondern auch wenn die Wurzeln einer Gruppe nicht eine arithmetische Progression mit der Differenz 1 bilden. Und hieraus folgert Herr Goursat, dass die zu dem letzteren allgemeineren Falle gehörigen Functionen sich als lineare Functionen der zu dem besonderen Falle gehörigen Functionen darstellen lassen, wobei die Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind.

Den weiteren Inhalt der Arbeit bildet die Untersuchung der Differentialgleichungen 4[ter] Ordnung, welche in die vom Verfasser betrachtete Klasse von Gleichungen gehören. Es wird die explicite Gleichung aus den gegebenen Grössen hergestellt und in einem Falle die Gruppe der erhaltenen Gleichung abgeleitet.

Hz.

G. Brunel. Monographie de la fonction gamma.
Bord. Mém. (3) III. 1-184. Paris. Gauthier-Villars.

Es wird die gesamte Theorie der Gammafunction nach eigner Verarbeitung des Verfassers entwickelt, die Geschichte erst durch begleitende, dann durch chronologisch geordnete Angabe der Quellen berücksichtigt. H.

O. Hölder. Ueber die Eigenschaft der Gammafunction keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen.
Klein Ann. XXVIII. 1-13.

Es wird hier, und zwar, wie sich nicht bezweifeln lässt, zum erstenmale, der Beweis für diese Eigenschaft geführt. Zuerst wird dasselbe für die Function

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

bewiesen, indem eine angenommene ganze Function von $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., mit Coefficienten rational in x, $= 0$ gesetzt

nach wiederholter Reduction einen Widerspruch ergiebt. Hierauf stützt sich dann der Beweis für $\Gamma(x)$, wovon die Ableitungen ausser dem primitiven Factor $\Gamma(x)$ nur $\varphi(x)$ nebst Ableitungen enthalten. H.

Hj. Mellin. Zur Theorie der Gammafunction. Acta Math. VIII. 37-80.

Hj. Mellin. Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro nära beslägtade med gammafunktionen. I. Acta Soc. Scient. Fenn. Tom. XIV. Helsingfors. 355-385.

Der Abhandlung in Acta Math. wird die Function zugrunde gelegt:

$$F(z) = e^{az} \frac{\Gamma^{\mu_1}_{(z-a_1)} \Gamma^{\mu_2}_{(z-a_2)} \cdots \Gamma^{\mu_r}_{(z-a_r)}}{\Gamma^{\nu_1}_{(z-b_1)} \Gamma^{\nu_2}_{(z-b_2)} \cdots \Gamma^{\nu_r}_{(z-b_r)}},$$

wo $\mu_1, \ldots, \mu_r, \nu_1, \ldots, \nu_r$ positive ganze Zahlen und $a, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r$ beliebige von z unabhängige Grössen bedeuten. Die Function weist ähnliche Eigenschaften wie die Γ-Function selbst auf. Es wird zunächst gezeigt, dass dieselbe zwei Functionalgleichungen ähnlich der Gammafunction Genüge leistet; dann wird nach Untersuchung ihrer Null- und Unendlichkeitspunkte mittels des Mittag-Leffler'schen Satzes der Satz bewiesen, dass sich die Function $F(z)$ für den Fall, dass die Gradzahl des Zählers grösser oder gleich der des Nenners ist, als eine Summe zweier anderen Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ darstel[illegible] lässt, von welchen $P(z)$ eine gewisse Partialbruchreihe [illegible] $Q(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. [illegible] Bedingungen, welchen die Partialbruchreihe und die ratio[illegible] Function zu genügen haben, werden durch eine eingehen[illegible] Untersuchung gewonnen, für welche der Ausgangspunkt in d[illegible] Abhandlung des Verfassers aus den Acta societatis scient. Fennicae t. XIV, XV zu suchen ist, wosel[illegible] [illegible]aloge Darstellung der einfacheren Function $F(z)$ [illegible] wird.

Auf Grund der letztern Untersuchung werden die wahrscheinlichen Formen der gesuchten Bedingungsgleichungen für $P(z)$ und $Q(z)$ angenommen, die Functionen allgemein aufgestellt, welche diesen angenommenen Bedingungen genügen, und schliesslich gezeigt, dass $P(z)$ und $Q(z)$ unter denselben enthalten sind; endlich wird für die in der Partialbruchreihe $P(z)$ auftretenden Constanten ein Recursionsgesetz entwickelt. Als ein wichtiges Resultat der vorhergehenden Untersuchung ist noch anzuführen, dass $P(z)$ und $Q(z)$ ganz bestimmte Individuen (particuläre Integrale) einer ganzen Klasse von Functionen sind, welche Bedingungsgleichungen von der angenommenen Gestalt genügen, und dass zwischen diesen neuen Transcendenten und den Integralen gewisser linearer Differentialgleichungen ein enger Zusammenhang besteht, der in einer späteren Abhandlung (Acta Math. IX) besprochen wird. Bm.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. Cantor. Zur Frage des actualen Unendlichen. Stockholm.

Der Verfasser constatirt in der früheren Geschichte der Analysis Verwechselungen zwischen dem „potenzialen Unendlichen", welches unbestimmte Grösse hat und mit dem Grenzbegriffe zusammenhängt, und dem „actualen", welches durch einfache Begriffsfestsetzung als bestimmte Menge gewonnen wird. Er erinnert daran, dass das letztere, wiewohl durch die Methode der Grenzen in den Hintergrund gedrängt, doch nicht gänzlich entbehrt werden könne, und beruft sich zum Belege auf [illegible] Theorie der Irrationalzahlen und die Notwendigkeit der [illegible] setzung eines bestimmten Gebietes, innerhalb dessen eine [illegible] sich ändern kann.

Schg.

R. Betazzi. I postulati e gli enti geometrici. [illegible] Per. I. 170-183.

In dieser Arbeit stellt der Verfa[illegible] interessanten Betrachtungen an über die Grundlage[illegible]rie und ins-

besondere über die zum Aufbau dieser Wissenschaft notwendigen Erfahrungen, sowie über den von ihnen zu machenden Gebrauch bei der Auseinandersetzung der Postulate. Der Charakter des Jahrbuchs gestattet es uns nicht, näher auf die Einzelheiten einzugehen; sonst würden wir leicht zu einer Erörterung der Behauptungen des Verfassers geführt werden. Es genüge, auf diesen Aufsatz diejenigen aufmerksam zu machen, welche solchen Fragen ihre Teilnahme schenken. La. (Lp.)

R. P. Der Raumbegriff und die Principien der Geometrie. „Kosmos“ (polnisch).

Enthält einige Bemerkungen über die geometrischen Axiome. Dn.

F. Schur. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses. Klein Ann. XXVII. 163-172.

Auf geometrischem Wege hat Killing in seinem Werke über nicht-euklidische Raumformen bewiesen, dass jeder n-dimensionale Raum (M_n), welcher eine Schar von ebenen M_{n-1} enthält, in einem M_{n+1} deformirt, d. h. ohne Aenderung der Linien-Elemente abgebildet werden kann. In obiger Arbeit giebt nun der Verfasser analytisch ausgeführte Beispiele solcher Deformationen. Er beginnt mit Untersuchungen über den Ausdruck des Linienelementes in den Räumen constanten positiven Krümmungsmasses, giebt dann Sätze über das Vorkommen von Räumen constanten negativen Krümmungsmasses in höheren Räumen und gelangt hinsichtlich der Deformation zu dem allgemeinen Resultate, dass ein M_n in einem M_{n+1} nur unter besonderen Bedingungen deformirt werden kann, während speciell ein constant positiv gekrümmter M_n stets deformirbar ist, und die Deformation eines constant negativ gekrümmten M_n in einem ebenen M_{2n-1} auf das Biegungsproblem einer Rotationsfläche im gewöhnlichen Raume zurückgeführt werden kann. Schg.

P. Cassani. Ricerche geometriche negli spazi superiori. Ven. Ist. Atti (6) IV. 227-241.

Die mehr andeutende als ausführende Arbeit beschäftigt sich zuerst mit dem Grade der Unendlichkeit des Vorkommens linearer Räume in eben solchen von höherer Dimensionenzahl. Unter „linearer Reihe" von Elementen $(S_{s+1,n-1})$ versteht der Verfasser den Inbegriff aller linearen Räume von gleicher Dimensionenzahl, welche im n-dimensionalen Raume durch denselben s-dimensionalen hindurchgehen. In diesem Ausdruck sind also die Bezeichnungen Büschel, Netz, Schar, u. s. w. als specielle Fälle enthalten. Sodann werden mit besonderer Berücksichtigung des vierdimensionalen Raumes die Schnittgebilde projectivischer linearer Reihen untersucht. Auf verwandte Arbeiten von Veronese, Cremona u. A., welche die hier vorkommenden Fragen gestreift oder teilweise behandelt haben, ist Rücksicht genommen.

Schg.

P. Cassani. Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 482-484.

Der Chasles'sche Satz, nach welchem der gemeinsame Punkt dreier Osculationsebenen einer kubischen Raumcurve in der durch die drei Berührungspunkte bestimmten Ebene liegt, wird hier auf Normalcurven n^{ter} Ordnung im n-dimensionalen Raume unter der Voraussetzung, dass n eine ungerade Zahl ist, ausgedehnt. Der Verfasser bedient sich zu diesem Zweck eines gleichen analytischen Verfahrens, wie es Cremona und Beltrami zur Untersuchung jener Curven angewandt haben. Hieran schliesst sich die Bemerkung, dass auch Focalsysteme nur in Räumen von ungerader Dimensionenzahl vorkommen können. Ist n eine gerade Zahl, so ist nur eine reciproke Focalbeziehung möglich, in der Weise, dass einem Strahle ein Raum von möglichst grosser Dimensionenzahl entspricht.

Schg.

F. Bertini. Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad n dimensioni. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 855-862.

Es wird der folgende Satz der dreidimensionalen Geometrie auf das n-dimensionale Gebiet ausgedehnt: Drei Gerade liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn jede Gerade, welche zwei von ihnen in beliebigen Punkten schneidet, auch die dritte schneidet. Schg.

R. Hoppe. Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf n Dimensionen. Hoppe Arch. (2) III. 277-289.

Die erweiterten Sätze gehören der Krümmungstheorie an. Es wird zuerst die Krümmung einer n-Dehnung (N) innerhalb einer linearen $(n+1)$-Dehnung analytisch ausgedrückt. Sodann wird die Bedingung aufgesucht, unter welcher bei orthogonalen Parametern die entsprechende Parameterlinie Kürzeste ist. Weitere Sätze betreffen Scharen solcher Kürzesten. Schliesslich ergiebt sich, dass die Krümmung von N durch Biegung nicht verändert wird, wenn n eine gerade Zahl ist. Schg.

F. Aschieri. Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di spezie qualunque. Lomb. Rend. (2) XIX. 167-173.

Diese Arbeit schliesst sich an eine andere desselben Verfassers an: Sulle trasformazioni omografiche in uno spazio lineare S_{n-1} di spezie $(n-1)$, und dehnt die Begriffe der Polarsysteme, der reciproken und projectivischen Gebilde und Correspondenzen auf das n-dimensionale Gebiet aus, wobei am Schluss die Nullsysteme besondere Berücksichtigung finden. Schg.

W. Peddie. The theory of contours and its applications in physical science. Edinb. M. S. Proc. IV. 25-28, 61-64.

Eine „Contour“ wird, wie folgt, definirt: „Die Contour eines n-dehnigen Gegenstandes, der in einer Ausdehnung von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung vorhanden ist, ist der Schnitt desselben mit einem n-dehnigen Gegenstande, wenn in jedem seiner Punkte

eine gewisse Grösse constant ist". Beispiele von Contouren mit Erläuterungen ihres Gebrauches werden gegeben. Gbs. (Lp.)

E. Cesaro. Alcune misure negli iperspazii. Batt. G. XXIV. 49-55.

Zum Behufe einiger Anwendungen auf die Theorie der Wahrscheinlichkeiten verallgemeinert Herr Cesaro in dieser Arbeit einige Formeln der gewöhnlichen elementaren Massgeometrie für die entsprechenden Gebilde des n-dimensionalen Raumes, indem er hierbei das Bernoulli'sche Schlussverfahren der vollständigen Induction benutzt. Zunächst findet er den Ausdruck für die Länge der Mittellinien eines $(n+1)$-Flachs dieses Raumes. Unter Einführung der Voraussetzung, dass dieses Polyeder regelmässig ist, ergiebt sich sein Volumen nach dem Ausdrucke $\frac{c^n}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$, worin c die Seite bedeutet; ein Resultat, welches Clifford in ähnlicher Absicht wie Herr Cesaro schon aufgestellt hatte. (Vgl. Mathematical Papers by W. K. Clifford. London. 1882. S. 605). Danach geht der Verfasser zur Aufsuchung des Inhaltes der Hypersphäre vom Radius R im n-dehnigen Raum über und findet ihn gleich

$$\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}R^n}{2.4\dots n} \quad \text{oder} \quad \frac{2(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}R^n}{3.5\dots n},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. Nach Clifford (l. c. p. 606) und Herrn G. Cantor (Math. Ann. XXI. 58, wo jedoch ein Zahlencoefficient fehlt) lassen sich beide Ausdrücke bezw. zu einem vereinigen in der Form:

$$\frac{R^n\{\Gamma(\frac{1}{2})\}^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)} \quad \text{oder} \quad R^n\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{n\Gamma(\frac{1}{2}n)}.$$

Im Verfolg der Forschungen ermittelt der Verfasser die Aenderung der Summe der Quadrate der Abstände eines beweglichen Punktes im n-dehnigen Raume von den Ecken eines regelmässigen $(n+1)$-Flachs und beweist einen ganz einfachen Ausdruck für das Trägheitsmoment eines regelmässigen $(n+1)$-Flachs im n-dehnigen Raume in Bezug auf seinen Schwerpunkt.

La. (Lp.)

C. SEGRE. Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani. Torino Atti. XXI. 95-115.

Unter den Mannigfaltigkeiten n^{ter} Ordnung von $i+1$ Dimensionen, welche in einem Raume von d Dimensionen enthalten sind (und nicht in einem weniger ausgedehnten Raume) sind sehr bemerkenswert die aus ∞^1 linearen Räumen zu i Dimensionen bestehenden, welche man gewöhnlich durch das Symbol $S_i - F_{i+1}^n$ bezeichnet. (Vgl. Veronese, Klein Ann. XIX. 226; F. d. M. XIII. 1881. 485). Der Fall $i=1, d=n+1$ ist zuerst durch Herrn Veronese (l. c. 224ff.) und vollständiger durch Herrn Segre erforscht worden in dem Aufsatze: „Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque“ (Torino Atti XIX; F. d. M. XVI. 1884. 604). Der Fall $i = 2, d = n+2$ ist der Gegenstand der beachtenswerten Abhandlung, die zum Berichte vorliegt; der allgemeinere Fall eines beliebigen i und $d = n+i$ kann nach einer Bemerkung des Herrn Segre in ganz ähnlich verlaufender Art erledigt werden.

Wir wollen eine in S_{n+2} enthaltene Mannigfaltigkeit $S_2 - F_3^n$ mit F benennen. Ihre ∞^1 Ebenen bilden eine rationale Reihe; jede geradlinige Fläche von der Ordnung $m \gtreqless n$, welche zu F gehört, ist eine rationale normale; von derselben Art ist jede auf F liegende Curve von der Ordnung $\mu < n$, falls sie nicht in einem Raume liegt, welcher eine geradlinige Fläche von F enthält. Die Mannigfaltigkeit F kann stets durch n projectivische Büschel von S_{n+1} erzeugt werden (cf. Veronese, l. c. 224-225). Drei rationale Normalcurven oder auch eine rationale Normalcurve und eine rationale Normalfläche, zwischen denen eine eindeutige Beziehung besteht, ergeben als Ort der ihre entsprechenden Elemente verbindenden Ebenen eine Mannigfaltigkeit $S_2 - F_3^n$; umgekehrt kann jede Mannigfaltigkeit dieser Art nach einer der beschriebenen Weisen erzeugt werden.

Ist m' das Minimum der Ordnung einer geradlinigen Fläche von F, m'' dasjenige einer ihrer Curven, so ist:

$$m' \gtreqless \tfrac{1}{3}n,\ m'' \gtreqless \tfrac{2}{3}n,\ \text{folglich } 2m' \gtreqless m'';\ \text{ferner } 2m'' \gtreqless n+m'$$

Die Betrachtung der Zahlen m' und m'' führt zu einer Klassificirung der Mannigfaltigkeiten $S_2 - F_3^n$. Jede derartige Mannigfaltigkeit wird durch zwei Zahlen m', m'' (ausser n) gekennzeichnet; sie enthält im allgemeinen eine einzige Minimalcurve und eine einzige geradlinige Minimalfläche, von denen die erste auf der anderen liegt. Ausnahmen finden in den folgenden drei Fällen statt: 1) $m'' = 2m'$; denn dann giebt es ∞^1 Minimalcurven, welche eine lineare Schar auf der einzigen geradlinigen Minimalfläche bilden. 2) $2m'' = n + m'$; denn dann giebt es ∞^1 geradlinige Minimalflächen, welche durch die einzige Minimalcurve gehen. 3) $m' = \frac{1}{3}n$; denn dann giebt es ∞^2 Minimalcurven und ∞^2 geradlinige Minimalflächen. Ein bemerkenswertes Beispiel dieses letzteren Falles liefert die Annahme $n = 3$.

Eine Gruppe von μ Ebenen der Mannigfaltigkeit F besteht aus unabhängigen Ebenen (d. h. gehört einem $S_{3\mu-1}$ an), wenn $\mu \leqq m' + 1$; dieselbe gehört einem $S_{2\mu+m'}$ an, welcher die Minimalcurve enthält, wenn $m' + 1 \leqq \mu \leqq m'' - m'$; sie gehört einem $S_{\mu+m''+1}$ an, wenn $m'' - m' < \mu \leqq n - m''$; sie gehört endlich einem S_{n+2} an, wenn $\mu > n - m''$.

Ist $n - m' \leqq m \leqq n$, so giebt es auf F $\infty^{3m-2n+2}$ geradlinige Oberflächen m^{ter} Ordnung, welche nicht durch die Minimalcurve gehen; sie bilden eine lineare Schar, aus welcher jedes Individuum durch r Gerade und $3m - 2n - 2\nu + 2$ Punkte bestimmt wird. Ist hingegen $n + m' - m'' \leqq m < n - m$, so giebt es auf F $\infty^{2m-n-m'+1}$ geradlinige Oberflächen m^{ter} Ordnung, welche alle durch die Minimalcurve gehen; sie bilden eine lineare Schar, aus welcher jedes Individuum durch r Gerade und $2m - n - m' - 2\nu + 1$ Punkte bestimmt wird.

Die Coordinaten der Punkte von F lassen sich folgendermassen durch drei Parameter λ, μ, ν ausdrücken:

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1, & x_1 = \lambda, & \ldots, & x_{m'} = \lambda^{m'}, \\ x_{m'+1} = \mu, & x_{m'+2} = \lambda\mu, & \ldots, & x_{m''+1} = \lambda^{m''-m'}\mu, \\ x_{m''+2} = \nu, & x_{m''+3} = \lambda\nu, & \ldots, & x_{n+2} = \lambda^{n-m''}\nu. \end{array}$$

Folglich sind die Gleichungen von F: $0 =$

$$\left| \begin{array}{llllll} x_0, x_1, \ldots, x_{m'-1}, & x_{m'+1}, & x_{m'+2}, \ldots, & x_{m''}, & x_{m''+2}, & x_{m''+3}, \ldots, x_{n+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{m'}, & x_{m'+2}, & x_{m'+3}, \ldots, & x_{m''+1}, & x_{m''+3}, & x_{m''+4}, \ldots, x_{n+2} \end{array} \right|.$$

Daraus folgt, dass F keine anderen absoluten Invarianten besitzt als die Zahlen m', m'', welche ihre Species bestimmen.

Wir nehmen auf F nun t_0 Punkte P_0, t_1 Gerade P_1, t_2 Ebenen P_2 an, wo die Zahlen t_0, t_1, t_2 den Bedingungen unterliegen:

$$t_0 + 2t_1 + 3t_2 = n - 1,\ t_2 \overline{\gtrless} m',\ t_1 + 2t_2 \overline{\gtrless} m'',\ 2t_1 + 3t_2 \overline{\gtrless} n - 1,$$

von denen die letzte eine Folge der ersten ist. Diese Punkte, Geraden, Ebenen bestimmen einen $(n-2)$-dimensionalen linearen Raum O_{n-2}; wenn wir aus ihm die Mannigfaltigkeit F auf unseren Raum projiciren, so gelangen wir zu einer eindeutigen Abbildung der Mannigfaltigkeit selbst. Aendert man die Zahlen t_0, t_1, t_2 ab, so ändert sich auch die Abbildung; das Minimum ihrer Ordnung ist im allgemeinen $n - m''$, wird jedoch $n - m'' + 1$, wenn auf F unendlich viele geradlinige Minimalflächen vorhanden sind. Unter den Eigenschaften der Abbildung von F (No. 19 und 20 der Originalarbeit) wollen wir nur die hervorheben, dass die Ebenen von F durch die Ebenen eines Büschels abgebildet werden. Wenn man eine dreidehnige Mannigfaltigkeit in zwei verschiedenen Weisen auf unseren Raum projicirt, so gelangt man bekanntlich (vgl. No. 37 der Veronese'schen Abhandlung: La superficie omaloide normale di quarto ordine etc. F. d. M. XVI. 1884. 733) zu einer eindeutigen Verwandtschaft zwischen zwei Räumen. Durch Anwendung dieser Bemerkung auf die Mannigfaltigkeit F stellt der Verfasser eine bemerkenswerte derartige Verwandtschaft her, deren charakteristische Eigenschaften er in der letzten Nummer seiner schönen Abhandlung durchspricht.

La. (Lp.)

P. Del Pezzo. Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni.
Nap. Rend. XXV. 176-180.

Bekanntlich bestehen (Vgl. z. B. Veronese, Klein Ann. XIX; F. d. M. XIII. 1881. 485) für jeden Punkt P einer Curve eines n-dimensionalen Raumes merkwürdige lineare Räume von $1, 2, \ldots$ Dimensionen, welche die Curve bezw. in $2, 3, \ldots$ mit P zusammenfallenden Punkten schneiden. In der zu besprechenden Arbeit

hat Herr Del Pezzo eine Verallgemeinerung dieser Begriffe auf die Oberflächen F_2^m von der Ordnung m und auf die Mannigfaltigkeiten F_i^m derselben Ordnung von i Dimensionen aus dem Raume von n Dimensionen S_n angestrebt; diese Verallgemeinerung hatte schon Herrn Caporali beschäftigt, aber die Bemerkungen desselben wurden erst jetzt nach seinem Tode veröffentlicht.

Nachdem er die Existenz des F_2^m in einem ihrer Punkte berührenden S_2 ermittelt und einige sich hier anschliessende Theoreme durch eine Schlussweise von r auf $r+1$ bewiesen hat, gelangt er zu dem folgenden Satze, welcher für die Oberflächen die gestellte Frage löst: Jedem Punkte P einer Oberfläche F_2^m entspricht ein linearer Raum S_ω von $\omega = \frac{1}{2}(r-1)(r+2)$ Dimensionen (ein r-fach berührender Raum), welcher die Eigenschaft besitzt, dass jeder in der Oberfläche durch einen S_{n-1} gemachte, durch S_ω hindurchgehende Schnitt in P einen r-fachen Punkt besitzt, während jeder durch S_ω gehende S_{n-2} die Oberfläche in $m-r^2$ Punkten ausser in P schneidet. Die Räume, welche aus S_ω die dem Punkte P unendlich nahen Punkte der Oberfläche projiciren, bilden eine normale Kegelmannigfaltigkeit von $\omega+2$ Dimensionen und von der Ordnung r. Allgemein hat man den folgenden Satz: Für jeden Punkt P einer Mannigfaltigkeit F_i^m giebt es einen linearen Raum S_ω von

$$\omega = \frac{1}{i!}(r+2)(r+3)\cdots(r+i+1)-1$$

Dimensionen (ein r-fach berührender Raum), so dass jeder in der Oberfläche durch einen Raum von $n-\varrho$ Dimensionen gemachte und durch S_ω gehende Schnitt in P einen r^ϱ-fachen Punkt hat.

Wir wollen bemerken, dass die i-dimensionalen, eine F_i^m berührenden Räume im allgemeinen unabhängig sind. Beispielsweise besteht diese Eigenschaft im allgemeinen für die Berührungsebenen einer F_2^m. Eine Ausnahme von dieser Regel bietet die von Herrn Veronese untersuchte Oberfläche (Vgl. F. d. M. XVI. 733); denn diese ist die einzige aus S_4, deren Berührungsebenen sich paarweise treffen. La. (Lp.)

P. Del Pezzo. Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni. Nap. Rend. XXV. 205-213.

Diese Arbeit knüpft an zwei andere desselben Verfassers an: „Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n+1$ dimensioni" (F. d. M. XVII. 1885. 514) und „Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni" (S. den vorangehenden Bericht); ihr Ziel ist die Erforschung der Projectionen der Mannigfaltigkeiten linearer Räume. Sie besteht aus drei Paragraphen; in den beiden ersten ergründet der Verfasser die Projectionen der Oberflächen und wendet seine Ergebnisse auf den Beweis einiger wichtiger Sätze an; im dritten verallgemeinert er diese Betrachtungen auf die Mannigfaltigkeiten einer beliebigen Anzahl von Dimensionen. Wir wollen die Hauptsätze der Abhandlung des Herrn Del Pezzo auszugsweise hersetzen, doch dürfen wir die Bemerkung nicht unterdrücken, dass manche Schlussfolgerungen des Verfassers nicht völlig einwurfsfrei sind, und dass in seiner Darstellung die Form zuweilen ungemein vernachlässigt ist.

Eine zweidehnige Oberfläche F_2^m von der Ordnung m des Raumes von n Dimensionen S_n wird projicirt aus h_1 ihrer Punkte P_1, h_2 ihrer zweifach berührenden S_2, h_3 ihrer dreifach berührenden $S_5, \dots, h_r$ ihrer r-fach berührenden $S_{\frac{1}{2}(r-1)(r+2)}$ auf einen Raum von $n-\sum_{i=1}^{i=r}\frac{1}{2}i(i+1)h_i$ in eine Oberfläche von $n-\sum_{i=1}^{i=r}r^2h_r$, welche h_1 Gerade, h_2 Kegelschnitte, h_3 kubische Raumcurven, $\dots, h_r$ rationale Curven der Ordnung r enthält, welche die Bilder der Punkte P und der Berührungspunkte der zweifach berührenden S_2, der dreifach berührenden $S_5, \dots$, der r-fach berührenden $S_{\frac{1}{2}(r-1)(r+2)}$ vorstellen. Macht man insbesondere die Projection auf unseren Raum, so kann man aus den bekannten Eigenschaften der Oberflächen Sätze über die Oberflächen von S_n erschliessen. Beispielsweise ergeben die Kenntnisse hinsichtlich der Geometrie auf gewissen Oberflächen unseres Raumes uns Einblick in die Geometrie auf einer Oberfläche von S_n. Merkwürdig ist es, dass, wenn die Projection von F_2^m auf unseren Raum geradlinig ist,

F_2^m es auch ist. Ferner ist es merkwürdig, dass, wenn m über einer gewissen Grenze liegt, die F_2^m von S_{m-p+1} alle geradlinig sind; dasselbe tritt für die F_2^m von S_n ein, wenn bei constant gehaltenem n die Zahl m unter einer gewissen Grenze liegt, oder wenn bei constantem m die Zahl n oberhalb einer gewissen Grenze liegt.

Diese Sätze lassen sich verallgemeinern. Indem wir wegen des Theorems, welches die Beziehung zwischen einer Mannigfaltigkeit der Ordnung m von i Dimensionen F_i^m aus S_n und einer ihrer Projectionen herstellt (eine Erweiterung des Theorems über die F_2^m, das wir eben angeführt haben), den Leser auf die Abhandlung selbst verweisen, wollen wir die folgenden Sätze wiedergeben, deren Analoga für die F_2^m schon angeführt sind. Wird eine Mannigfaltigkeit F_i^m aus S_n auf einen S_{i+1} in eine aus $\infty^1 S_{i-1}$ bestehende Mannigfaltigkeit projicirt, so setzt sie sich auch aus $\infty^1 S_{i-1}$ zusammen. Ist $m+i-n$ constant und liegen m, n über gewissen Grenzen, oder auch ist n constant und liegt m unter einer gewissen Grenze, oder endlich ist m constant und liegt n über einer gewissen Grenze, so bestehen alle F_i^m von S_n aus $\infty^1 S_{i-1}$. Beispielsweise bestehen die F_{i+1}^m von S_{m+i} aus $\infty^1 S_i$ mit Ausnahmen der Kegel, welche die Oberfläche F_2^4 des Herrn Veronese aus einem S_{i-2} projiciren.

Zum Schlusse geben wir den Wortlaut des folgenden Theorems, für welches der Verfasser einen einfachen analytischen Beweis beibringt: Wenn eine Mannigfaltigkeit F_{n-1}^m des Raumes S_n einen S_{n-k} enthält, so begreift sie eine doppelte Mannigfaltigkeit $F_{n-2k}^{[(m-1)^k]}$ in sich. La. (Lp.)

V. Schlegel. Ueber Entwickelung und Stand der n-dimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der vierdimensionalen. Leipzig. Engelmann.

Dieser zuerst in der „Leopoldina“ erschienene, inhaltreiche Aufsatz giebt eine klar abgefasste geschichtliche Uebersicht über alle den vier- oder n-dimensionalen Punktraum betreffenden

Untersuchungen. Dass hiermit allen Mathematikern, deren Arbeiten diesen Untersuchungen nahe stehen, ein willkommenes Nachschlagebuch geboten ist, dürfte schon daraus hervorgehen, dass der Verfasser ein literarisches Register von nicht weniger als 86 Büchern und Abhandlungen zusammengestellt hat, welche teils kurz berührt, teils, dem wesentlichsten Inhalt nach, besprochen werden. Scht.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen.

W. Dyck. Beiträge zur Analysis situs II. Leipzig Ber. 53-69.

Der Verfasser setzt hier seine Untersuchungen (cf. F. d. M. XVII. 523) über den Zusammenhang zwischen der Grundzahl einer Fläche und der Kronecker'schen Charakteristik eines gewissen Functionensystems fort, indem er zunächst noch einmal, in systematischerer und zugleich allgemeinerer Weise, als das erste Mal, den Begriff der Grundzahl (Charakteristik) einer Fläche (Mannigfaltigkeit) rein geometrisch aufbaut. Den Eingang bildet die Bestimmung der Charakteristik „linearer" Mannigfaltigkeiten, als deren einfachste Vertreter im Gebiete von einer resp. zwei, drei Dimensionen das begrenzte Stück einer Geraden, das Innere einer geschlossenen sich nicht selbst durchsetzenden ebenen Curve, resp. räumlichen Fläche erscheinen.

Das Entstehen eines solchen „Elementargebildes" zählt jedesmal $+1$, das Verschwinden -1. Jede „Punktirung" einer Strecke erhöht die Charakteristik um 1; das Gleiche gilt für einen geschlossenen Raum, während bei der ebenen Fläche ein Abzug von 1 stattfindet. Entsprechend wächst bei der ebenen Fläche die Charakteristik um 1 durch das Auftreten einer „Querlinie", nimmt aber beim Raume um 1 ab.

Endlich erteilt für den Raum eine „Querfläche" der Charak-

teristik einen Zuwachs von 1. Das allgemeine Gesetz für höhere lineare Mannigfaltigkeiten ist daraus leicht zu entnehmen. Aus den linearen Flächen und Räumen erwachsen „geschlossene" Mannigfaltigkeiten M_2 und M_3, indem man sich eine paarweise Zuordnung und Vereinigung der Begrenzungs-Curven, resp. -Flächen gegeben denkt. Auch auf diese Mannigfaltigkeiten ist der Begriff der Charakteristik sofort übertragbar, und es zeigt sich zugleich, dass die letztere Anzahl immer dieselbe bleibt, wie man sich die betreffende Mannigfaltigkeit auch entstanden denkt. Es gilt nämlich der allgemeine Satz, dass die Charakteristik einer aus beliebig vielen getrennten Teilen bestehenden Mannigfaltigkeit sich aus der Summe der Teilcharakteristiken zusammensetzt.

Der zweite Teil der Note beschäftigt sich mit dem allgemeinen Nachweis, dass, sobald die bez. Mannigfaltigkeit durch eine Gleichung $f = 0$ gegeben vorliegt, die Charakteristik derselben sich mit der Kronecker'schen Charakteristik des durch f und seine ersten Differentialquotienten gebildeten Functionensystems deckt.

Als eine interessante Anwendung ergiebt sich die Existenz je zweier Anzahlrelationen zwischen den „besonderen" (d. h. Doppel- resp. Knoten-) Punkten eines beliebigen einfach-unendlichen Systems von ebenen Curven resp. Flächen. My.

M. Feil. Ueber Euler'sche Polyeder. Wien. Ber. XCIII. 868-898.

Der Verfasser liefert hier einen wichtigen Beitrag zu der mit den Listing'schen Untersuchungen eng zusammenhängenden Lehre von den topologischen Eigenschaften der Polyeder. Dieser Beitrag besteht in der Bestimmung der Mannigfaltigkeit der Auflösungen der mehrfachen Zusammenhänge (Anastomosen) oder der Cyklosen an cyklomatischen Diagrammen von der Form der Kantensysteme Euler'scher Polyeder durch aufeinanderfolgende Querschnitte (successive Dialysen). Scht.

J. Krejči. Ueber gleichkantige Polyeder vom krystallographischen Standpunkte. Prag. Ber. 1885. 120-139.

Unter gleichkantigen Polyedern versteht der Verfasser solche Gestalten, welche von gleichen Flächen und gleichen Kanten begrenzt sind. Man kann wegen der Isometrie der Raumverhältnisse alle diese Polyeder auf das isometrische oder reguläre Krystallsystem beziehen und findet nach dem allgemeinen Krystallgesetze, dass nur solche gleichkantige Polyeder an Krystallen erscheinen, deren Indices, auf den Würfel als Grundgestalt bezogen, rational sind. Hierbei ergiebt sich, dass den beiden Bedingungen zugleich, nämlich der Gleichkantigkeit und der Rationalität, nur eine beschränkte Anzahl von Gestalten entspricht, die hier ausführlich beschrieben werden. Scht.

C. Hossfeld. Die reguläre Einteilung des Raumes bei elliptischer Massbestimmung. Schlömilch Z. XXXI. 310-316.

Der Verfasser löst durch Aufstellung von Bedingungen, welchen die sechs Flächenwinkel eines Tetraeders genügen müssen, die Aufgabe, den constant positiv gekrümmten Raum durch Systeme vollständiger grösster Kugelflächen auf alle Arten in eine endliche Anzahl congruenter Tetraeder zu zerlegen. Alle diese Fälle, ohne Ausnahme, lassen sich übrigens auch durch Verallgemeinerung und Specialisirung auf einfache Weise aus den vom Referenten in seiner „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“ (1883) gegebenen homogenen Ausfüllungen beliebig gekrümmter Räume ableiten. Zur Literaturübersicht sei der Abhandlung des Verfassers noch die Notiz entnommen, dass das Problem der congruenten Raumteilung bei nichteuklidischer Massbestimmung durch functions- und gruppentheoretische Betrachtungen für zweidimensionale Räume von Klein und Poincaré, für den hyperbolischen dreidimensionalen Raum von Dyck behandelt worden ist. Schg.

V. Schlegel. Projectionsmodelle der vier ersten vierdimensionalen Körper. Darmstadt. Brill.

V. Schlegel. Ueber Projectionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper. Waren.

Letztere Schrift erläutert das Princip der Darstellung vierdimensionaler Gebilde durch Projection auf den Raum, nach welchem die vier angekündigten Modelle zur Darstellung der regelmässigen, einzeln von fünf Tetraedern, von acht Hexaedern, von 16 Tetraedern, von 24 Oktaedern begrenzten Figuren ausgeführt sind. Jede dieser vier durch Drähte und Seidenfäden als Kanten vor Augen gestellten Projectionen besteht aus einem, die ganze Figur umschliessenden Seitenpolyeder und dem nach innen zu in natürlicher Folge des Angrenzens sich aufbauenden übrigen Teile des Polyedernetzes. Ausführlich dargelegt ist das Princip in des Verfassers Schrift: „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“. Nova Acta acad. Leop. Carol. XLIV. F. d. M. 1883. XV. 463. H.

Fr. Meyer. Ueber algebraische Knoten. Edinb. Proc. XIII. 931-946.

Der Aufsatz betrifft die Theorie der algebraischen Curven, besonders derer von der vierten und fünften Ordnung, von topologischem Gesichtspunkte aus betrachtet und so mit der Theorie der Knoten in Verbindung gebracht. Die Arbeit schliesst mit drei Tafeln von „Stellenschemata“ für sechs Doppelpunkte und für Curven von der vierten und fünften Ordnung.

Cly. (Lp.)

A. B. Kempe. Notes on knots on endless cords. Edinb. Proc. XIV. 36-37.

Cly.

T. P. Kirkman. Examples upon the reading of the circle or circles of a knot. Edinb. Proc. XIII. 693-698.

Fortsetzung früherer Untersuchungen. Cly.

M. Klose. Ueber zwei einander gleichzeitig ein- und umbeschriebene Fünfecke. Schlömilch Z. XXXI. 61-63.

Zu der von Möbius gemachten Entdeckung von der Existenz zweier Tetraeder, welche einander gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind, giebt der Verfasser ein Analogon aus der Geometrie der Ebene, welches in einer bereits von Desargues gezeichneten Figur dargestellt ist. Möbius hatte schon bewiesen, dass, ebensowenig wie Dreiecke, auch ebene Vierecke nicht einander gleichzeitig ein- und umgeschrieben sein können, auf Vielecke von grösserer Seitenzahl aber die Untersuchung nicht ausgedehnt. Der Verfasser zeigt, dass bereits Fünfecke eine derartige Lagenbeziehung haben können. Der ebene Schnitt einer durch fünf Punkte bestimmten räumlichen Configuration von 10 Geraden und 10 Ebenen liefert eine ebene Configuration von 10 Punkten und 10 Geraden, welche auf sechs verschiedene Arten als zwei einander gleichzeitig ein- und umgeschriebene Fünfecke aufgefasst werden kann. Zu jedem gegebenen ebenen Fünfeck kann man auf unendlich viele Arten ein zugeordnetes ebenes Fünfeck construiren, so dass das eine dem anderen ein- und umgeschrieben zugleich ist. Rdt.

F. N. Cole. Klein's Ikosaeder. Newcomb Am. J. IX. 45-61.

Diese Arbeit charakterisirt zuerst die Stellung, welche Klein's „Vorlesungen über das Ikosaeder" (S. F. d. M. XVI. 1884. 61) in dem Rahmen seiner übrigen Arbeiten einnehmen, und bezeichnet dieses Werk als charakteristisch für die durch Clebsch inaugurirte Richtung der deutschen Mathematik. Sodann giebt der Verfasser eine eingehende Darlegung des im ersten Teile des Klein'schen Werkes befolgten Gedankenganges, wobei er überall die Hauptpunkte und die mannigfachen Beziehungen der darin niedergelegten Ideen zu den verschiedensten Zweigen der Mathematik hervorzuheben bestrebt ist. Beim zweiten Teile beschränkt sich der Verfasser auf eine für seinen Zweck ausreichende kurze Inhaltsübersicht. Das Ganze ist eine klar geschriebene und gut orientirende Arbeit. Schg.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

R. C. J. Nixon. Euclid revised, containing the essentials of the elements of plane geometry as given by Euclid in his first six books, with numerous additional propositions and exercises. Oxford. Clarendon Press. XIV u 378 S.

In England bilden Euklid's Elemente noch immer das Lehrbuch der elementaren Geometrie, und unter den zahlreichen, den Bedürfnissen moderner Prüfungen angepassten Ausgaben, welche in neuerer Zeit erschienen sind, muss der vorliegenden ein hoher Platz eingeräumt werden. Während die Anordnung und die Methode der Euklidischen Sätze beibehalten sind, ist die Sprache durch die Einführung der neueren technischen Ausdrücke und die Ausscheidung unnötiger Phrasen bedeutend vereinfacht worden. Jedem Buche ist ein Anhang von Zusätzen, Ergänzungssätzen und Uebungen zugefügt worden. Wir neigen der Meinung zu, es wäre besser gewesen, die Zusätze an ihrem üblichen Platze zu belassen. Die Behandlung der Proportion stützt sich hauptsächlich auf De Morgan's „Connexion of number and magnitude“ und ist eine lichtvolle Darstellung eines Teiles des Euklidischen Werkes, der nach dem gewöhnlichen Gefühle so schwer ist, dass er in den meisten Fällen durch eine rein algebraische Behandlung ersetzt wird. Der allgemeine Anhang enthält Abschnitte über Maxima und Minima, Schnittpunkte mehrerer Geraden und Gerade durch mehrere Punkte, Aehnlichkeitspunkte, Kreisbüschel, Berührungsaufgaben, Inversion, harmonische Eigenschaften, Pol und Polare, und die Behandlung ist gemeiniglich gut. Zahlreiche Uebungen sind ausgesonnen, um den Fortschritt festzustellen und das Nachdenken des Schülers zu fördern. Der Druck und das Papier sind gute Proben von der Leistung der Clarendon Press. Gbs. (Lp.)

A. Ströll. Forme geometriche. Primi elementi di geometria scritti per il primo corso delle scuole reali. Vienna. A. Hölder. VI + 46 S. gr. 8°.

A. Ströll. Elementi di geometria scritti per il secondo, terzo e quarto corso delle scuole reali. Vienna. A. Hölder. X + 248 S. gr. 8°.

Beide Bücher sind für östreichische Realschulen italienischer Zunge geschrieben, und daher entspricht ihr Inhalt den für diese Lehranstalten geltenden Bestimmungen. Das zweite umfassendere Werk behandelt die ganze elementare Geometrie, nämlich nach einer kurzen Einleitung zuerst die Planimetrie (S. 4-179), dann die Stereometrie (S. 180-235), endlich in einem kurzen Anhange die Elemente der Orthogonalprojection. Die 228 Figuren sind in den Text gesetzt, und den einzelnen Abschnitten sind zahlreiche Uebungsaufgaben angehängt, die fortlaufend numerirt sind; die letzte Aufgabe ist No. 1124.

Der Standpunkt des Buches ist derjenige der älteren französischen Lehrbücher, wie z. B. Lacroix. Die neuere Geometrie ist nicht berücksichtigt worden; so fehlt z. B. die Betrachtung harmonischer Punktreihen und Strahlenbüschel, daher auch die Lehre von den polaren Eigenschaften des Kreises. Dagegen handelt ein Capitel der Planimetrie nach elementarer synthetischer Methode von den ersten Eigenschaften der einzelnen Kegelschnitte, Parabel (S. 153 - 159), Ellipse (160 - 168), Hyperbel (169-179). Die schwierigeren Partien der elementaren Geometrie, in welchen der Einfluss der neueren Arbeiten sich hätte bemerkbar machen können, sind unberührt geblieben von den über sie entstandenen Meinungsverschiedenheiten. So beweist der Verfasser im § 55 S. 19 den Lehrsatz: „Durch einen Punkt lässt sich zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen“. Auf S. 79 wird im § 206 gezeigt, wie man zwischen zwei gegebenen Strecken immer ein gemeinschaftliches Mass finden kann.

Das erstgenannte kleinere Werkchen ist für den ersten Unterricht in der Formenlehre bestimmt und hat aus dem grösseren Lehrbuche alle Definitionen und Anschauungssätze nebst den

zugehörigen Figuren wörtlich in sich aufgenommen, behandelt daher in zwei Teilen wie jenes die Planimetrie und die Stereometrie. Lp.

K. Gallien. Lehrbuch der Mathematik für höhere Schulen. Berlin. Weidmann'sche Buchhdlg. 74, 98, 72 S.

Dieses Buch enthält drei Teile: Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Das mathematische Pensum eines Gymnasiums oder Realgymnasiums ist in diesem Buche klar und übersichtlich dargelegt, so dass es dem Lernenden neben dem Schulunterrichte gute Dienste leisten kann. Auch sind Constructionsaufgaben zur Uebung dem planimetrischen und stereometrischen Teile beigegeben. Was das Aeussere des Buches anbetrifft, so ist der Druck vortrefflich, und auch die Figuren sind sehr gut. Mz.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie, Ausgabe A und B. Potsdam. Stein. 298 S.

A ist die siebzehnte verbesserte Auflage des bekannten Lehrbuches, in welcher Abschnitt XIII (Einleitung in die Kreisberechnung) eine ebenso erwünschte wie didaktisch gerechtfertigte Aenderung erfahren hat. Es ist nämlich am Anfang des Abschnitts im § 198 dasjenige zusammengestellt, was durchaus nötig ist, um dem Schüler bei der ersten Durchnahme die Annäherung der dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygone anschaulich zu machen, während der strenge und mühsame Beweis, dass der Kreis die gemeinschaftliche Grenze dieser Annäherung sei, zwar unmittelbar in den beiden folgenden Paragraphen folgt, aber unbeschadet des systematischen Zusammenhangs zunächst übergangen und später bei reiferer Einsicht des Schülers nachgeholt werden kann. Diese und andere ähnlich zu behandelnde Sätze hat der Verfasser äusserlich durch einen Stern kenntlich gemacht. B ist ein Separatabdruck der beiden ersten Kurse, „um solchen Schulen, welche ihr geometrisches

Pensum mit der Kreisberechnung abschliessen und auf die beiden letzten Kurse verzichten, ein abgekürztes ihren Zwecken dienendes Schulbuch zu bieten". Lg.

Ernst und Stolte. Lehrbuch der Geometrie I. Teil: Planimetrie. Strassburg i. E. R. Schultz u. Comp. 107 Seiten.

Die Verfasser haben in einzelnen Abschnitten den Lehrstoff sehr beschränkt, so sind z. B. die Sätze von der Proportionalität der Strecken, die ganzen harmonischen Beziehungen, Pol und Polare am Kreis mit inbegriffen, auf 4½ Seiten, die Kreisberechnung auf nur einer halben Seite abgemacht. Entsprechend dieser Kürze sind die Beweise fast durchweg nur angedeutet durch Hinweis auf die betreffenden Nummern oder durch die blosse Anschauung gegeben; die indirecten Beweise sind beschränkt, incommensurable Strecken überhaupt nicht erwähnt. Einen unverhältnismässig grossen Raum, fast den fünften Teil des systematischen Pensums (sechs Seiten), beansprucht der letzte Abschnitt von den Kreisbüscheln, Kreisbündeln und der Kreisverwandtschaft, der sonst in Elementarbüchern nicht behandelt wird. Im zweiten Teil folgen 1000 Aufgaben, die „nicht nach allgemeinen Gesichtspunkten, sondern dem Systeme entsprechend so geordnet sind, dass häufig durch Lösen derselben später folgenden Sätzen vorgearbeitet wird". Da dieser Teil auch die Fundamentalaufgaben und andere wichtige Sätze, wie die von Menelaus, Ptolemaeus u. a. enthält, so findet dadurch der systematische Teil seine notwendige Ergänzung. Lg.

L. Wöckel. Geometrie der Alten in einer Sammlung von 856 Aufgaben. Nürnberg. Fr. Korn. VIII u. 115 S.

Das Buch ist neu bearbeitet, verbessert und in der 13ten Auflage herausgegeben von Th. E. Schröder. Die Tendenz desselben erhellt aus dem Titel. Der stufenweise Gang der Construction ist durch blosses Verweisen mittelst Ziffern auf die früheren hierher

gehörigen Aufgaben angedeutet und dadurch aller Text zur Lösung nebst Figurentafeln erspart worden. Den Aufgaben sind 73 Lehrsätze der ebenen Geometrie ohne Beweis vorausgeschickt.

Lg.

A. Wiegand. Planimetrie I. Cursus 13. Auflage. Halle a/S. Schmidt. 99 Seiten.

Es werden Congruenz und Gleichheit der Figuren und die Kreissätze bis zu den ein- und umgeschriebenen regulären Polygonen behandelt. In einem Anhange finden sich Materialien zur Uebung für Schüler und eine Aufgabe als Musterbeispiel methodisch durchgearbeitet, wobei dem Referenten besonders die von anderen vernachlässigte Determination gefällt. Lg.

F. Behl. Die Darstellung der Planimetrie nach inductiver Methode zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbstunterrichte. Hildesheim. A. Lax. VIII u. 159 S.

In diesem Werke ist die elementare Planimetrie dargestellt, soweit sie in die mittleren Klassen eines Gymnasiums oder eines Realgymnasiums gehört; und es sind ausserdem zahlreiche Uebungsaufgaben und Uebungssätze, deren Behandlung dem Leser überlassen ist, mitgegeben. Die Methode dieses Buches weicht aber von derjenigen der meisten andern, die den gleichen Stoff behandeln, darin ab, dass die einzelnen Sätze nicht jedesmal vorangestellt und darauf bewiesen werden; sondern dass stets nach Annahme bestimmter Voraussetzungen eine Betrachtung auf einen Satz hinführt, der also, wenn er ausgesprochen wird, auch schon durch das Vorangehende bewiesen ist. Der Herr Verfasser setzt diese heuristische Methode in einem Vorwort genauer auseinander, und giebt auch eine Probe, in welcher Weise ein Lehrsatz nach seiner Ansicht entwickelt werden soll. Bei Repetitionen und Umkehrungen von Sätzen ist aber, wie der Herr Verfasser anmerkt, die gewöhnliche Art der Darstellung anzuwenden. Mz.

A. Stegmann. Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage herausgegeben von J. Lengauer. Kempten. J. Kösel. 217 S.

Der Inhalt dieses Buches ist durch den Titel hinreichend bezeichnet. Es ist die Planimetrie, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird. Das Buch ist vollständig, reichhaltig; die Beweise sind klar und bündig; ferner enthält das Buch eine grosse Zahl von Uebungsaufgaben. Der Druck und die Figuren lassen nichts zu wünschen übrig. Mz.

E. R. Müller. Planimetrische Constructionsaufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung für höhere Schulen. Methodisch bearbeitet. Oldenburg. G. Stalling. VIII u. 66 S.

In diesem kleinen 66 Octavseiten zählenden Buche ist eine Menge planimetrischer Aufgaben methodisch zusammengestellt, und die Lösungen derselben sind teils vollständig, teils andeutungsweise gegeben. Es kommen zuerst Aufgaben ohne Verhältnisse, und zwar meistens Dreiecksaufgaben, später Kreisaufgaben; dann folgen Aufgaben mit Verhältnissen. Auch hier sind wieder vornehmlich Dreiecksaufgaben und später das Berührungsproblem des Apollonius behandelt. Den Schluss bilden vermischte Aufgaben, wie z. B. in einen Kreisabschnitt ein Quadrat zu zeichnen u. dgl. m. Figuren sind nicht beigegeben, aber mit genügender Deutlichkeit beschrieben. Auch finden sich im Vorwort einige Winke über die Behandlung dieses Unterrichtszweiges.

Mz.

E. Bonsdorff. Lärobok i elementar-geometri. Öfversättning från finskan. Helsingfors. 192 S. 8°.

Lehrbuch der elementaren Geometrie. Uebersetzung aus dem Finnischen.

E. Bonsdorff. Geometrisia ja trigonometrisia laskuesimerkkiä oppikouluja varten. Helsingfors. 137 S. 8°.

Geometrische und trigonometrische Rechnungsaufgaben für die Schulen.

E. Bonsdorff. Geometriska och trigonometriska räkneuppgifter. Öfvers. från finskan. Helsingfors. 135 S. 8°.

Geometrische und trigonometrische Rechnungsaufgaben. Uebersetzung aus dem Finnischen.

A. Sannia ed E. d'Ovidio. Elementi di geometria. 6ª edizione interamente rifatta. Napoli. B. Pellerano.

Da von diesem Buche unverzüglich eine neue Ausgabe erscheinen soll, so verschieben wir die Besprechung auf das nächste Jahr. La. (Lp.)

Schlundt und Ludwig. Die wichtigsten Sätze der Planimetrie. Pr. Gymn. Greiz. 20 S. 8°.

Aufzählung der wichtigsten planimetrischen Sätze und Aufgaben ohne die zugehörigen Beweise. Lp.

F. Porta. Complementi di algebra e geometria per l'ammissione all' Accademia militare. Torino. Bocca.

La.

V. Murer. Osservazioni ed esempii sulla risoluzione dei problemi di geometria. Besso Per. I. 65-89.

Obgleich das Thema dieses Artikels nicht neu ist und man nichts darin findet, was wesentlich merkwürdig oder neu ist, so glauben wir dennoch, dass der Verfasser sehr wohl daran gethan hat, eine so wichtige Frage von neuem zu behandeln wie die der Darstellung der Regeln für die geometrischen Untersuchungen. Nur hätten wir an manchen Stellen seiner Auseinandersetzung klarere Ausdrücke gewünscht, solche, die weniger falschen Deutungen von Seiten derer zugänglich sind, welche

das Studium der Wissenschaft beginnen (vgl. die Noten zu p. 71-73). Ausserdem sind wir nicht, wie Hr. Murer, der Meinung, dass die gewöhnlichen Lehrbücher der elementaren Geometrie analytisch verfahren; sie können dies nur für einen Beobachter zu thun scheinen, der mehr auf die typographische Anordnung als auf den Grund der Dinge sieht. La. (Lp.)

Th. Harmuth. Textgleichungen geometrischen Inhalts. Pr. Wilhelmsgymn. Berlin.

Referat auf S. 55. Lp.

H. C. E. Childers. Note on Euclid II, 11. Edinb. M. S. Proc. IV. 60.

Gbs.

O. Schlömilch. Ueber Ungleichungen und deren geometrische Anwendungen. Hoffmann Z. XVII. 1-12.

Es handelt sich um Grenzbestimmungen bei der Lösung folgender Aufgaben: Ein neues Dreieck zu zeichnen aus 1. den Seitenabschnitten $s-a$, $s-b$, $s-c$, 2. den Höhen, 3. den Schwerlinien, 4. den Abständen des Umkreiscentrums von den Seiten, 5. den Abständen des Inkreiscentrums von den Ecken eines gegebenen Dreiecks. Durch die Arbeit soll ein Beitrag zur Ausfüllung der Lücke gegeben werden, welche sich in den Lehrbüchern der Algebra bei der Behandlung von Ungleichungen findet. Lg.

H. Simon. Ueber gewisse Dreiecks-Transversalen. Hoffmann Z. XVII. 410-421.

Das Ergebnis der Arbeit ist folgendes: Sind über den Seiten des Dreiecks ABC einander ähnliche Dreiecke BCP, CAQ, ABR in homologer Lage errichtet, und zwar entweder alle nach aussen oder alle nach innen, so schneiden sich die Transversalen AP, BQ, CR stets in einem Punkt, wenn die Dreiecke gleichschenklig sind und die Seiten BC, CA, AB zu Grundlinien haben; haben

die Dreiecke aber ungleiche Basiswinkel, so treffen sich die Transversalen für äussere Dreiecke niemals in einem Punkte, für innere nur unter gewissen Bedingungen. Lg.

A. Schiappa Monteiro. Note sur le triangle isoscèle. Teixeira J. VIII. 51-58.

Der Verfasser giebt zwei neue Beweise des bekannten Satzes: Wenn zwei Mittellinien eines Dreiecks gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig. Aus diesem Satze folgert er darauf einige neue Sätze aus dem Gebiete der Elementargeometrie.

Tx. (Hch.)

A. Strnad. Analytische Dreiecksübungen. Casop. XV. 259. (Böhm.)

Betrifft meistenteils Quadrate, welche über Dreiecksseiten construirt sind, wobei Determinanten in ausgiebigster Weise benutzt werden. Std.

M. Weidenholzer. Teilung einer Geraden nach dem goldenen Schnitt. Hoppe Arch. (2) IV. 106-107.

Statt $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ wird $x = \frac{2a}{1+\sqrt{5}}$ construirt. Lg.

O. Schlömilch. Ueber die Abstände eines Punktes von drei Geraden. Schlömilch Z. XXXI. 64.

Sind u, v, w die Abstände eines Punktes P im Innern eines Dreiecks von den Seiten desselben und A', B', C' die Fusspunkte der Winkelhalbirenden, so ist das Dreieck aus u, v, w reell, eine Gerade oder imaginär, je nachdem P im Innern, auf dem Umfange oder ausserhalb des Dreiecks $A'B'C'$ liegt. Lg.

R. Heger. Ueber die Abstände dreier Punkte von einer Geraden. Schlömilch Z. XXXI. 191-192.

Es wird als Correlat des vorigen Satzes von Schlömilch die Frage beantwortet: Wie muss eine Gerade gelegen sein, damit die von den Ecken eines Dreiecks ABC auf dieselbe gefällten Lote u, v, w die Seiten eines Dreiecks bilden? Lg.

R. Hoppe. Ein Vierecksatz; F. August. Beweis dieses Satzes. Hoppe Arch. (2) IV. 330.

Der Flächenschwerpunkt, der Eckenschwerpunkt und der Diagonalenschnittpunkt liegen in einer Geraden, deren Abschnitte sich wie 1 zu 3 verhalten. Lg.

F. Schiffner. Lehrsätze vom Sehnenviereck. Hoppe Arch. (2) IV. 325.

Es handelt sich um solche Sehnenvierecke, deren Diagonalen normal sind und sich in einem festen Punkt P schneiden. Die vier Sätze sind ohne die (leichten) Beweise angeführt. Lg.

B. Sporer. Ein geometrischer Satz. Hoppe Arch. (2) IV. 323-324.

„Sind zwei sich senkrecht kreuzende Strecken gegeben und gehen durch deren Endpunkte die Seitenpaare eines Rechtecks, so ist der Ort für den Schwerpunkt des Rechtecks ein Kreis, und die Diagonalen desselben gehen alle durch zwei feste Punkte des Kreises, die Rechtecke sind also alle unter sich ähnlich." Von diesem Satze wird erst eine Verallgemeinerung bewiesen und dann werden noch zwei specielle Fälle angeführt. Lg.

E. Collignon. Note sur les polygones fermés. (Application de la statique à la géométrie.) Nouv. Ann. (3) V. 497-510.

Es ist eine bekannte Aufgabe der elementaren Geometrie, ein ebenes oder windschiefes Polygon von ungerader Seitenanzahl aus den gegebenen Mitten der n Seiten zu finden. Der Verfasser knüpft die Lösung an die Auffindung des Schwer-

punktes von n Massen; er legt nämlich, der Reihe nach, den Mitten der Seiten 1, 3, 5, ..., n die Masse je $+m$, den Mitten der Seiten 2, 4, 6, ..., $n-1$ je $-m$ bei. Dadurch wird der erste Endpunkt der ersten Seite der Schwerpunkt dieses Massensystems und ist als solcher leicht zu construiren. Durch Anwendung anderer Sätze über den Schwerpunkt auf die so festgesetzten Massen der Seitenmitten eines Polygons von ungerader oder gerader Anzahl der Ecken gelangt Hr. Collignon zu einer Reihe von Lehrsätzen über geschlossene Polygone. Lp.

Dziwinski. Zerlegung gleicher Figuren in entsprechend congruente Elemente. Lemberg. (Polnisch.)

Es sind zwei inhaltsgleiche ebene Figuren gegeben; man soll sie durch Schnitte in entsprechend congruente Dreiecke zerlegen. Die elementar-geometrische Lösung dieser Aufgabe beginnt mit dem einfachsten Falle zweier inhaltsgleichen Dreiecke ACD, DCB ($AD = DB$, A, D, B auf einer Geraden) und schreitet fort zu beliebigen ebenen Figuren. Dn.

W. Harvey. Notes on Euclid. Edinb. M. S. Proc. IV. 17-20.

Aus den Mittelpunkten der (alle nach aussen, oder alle nach innen) über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks beschriebenen Quadrate zieht man gerade Linien senkrecht zu den Seiten und ebenso auch nach den Ecken des Dreiecks. Einige Eigenschaften der so entstandenen Figuren werden angegeben.

Gbs. (Lp.)

W. Peddie. To transform a rectangle into a square. Edinb. M. S. Proc. IV. 24.

Gbs.

M. Baker. Aire du triangle. Mathesis VI. 203-205.

Mn.

L. Maleyx. Méthode élémentaire pour calculer le rapport de la circonférence au diamètre. Nouv. Ann. (3) V. 5-30.

Der Verfasser geht davon aus, dass Archimedes bei seiner Methode, aus den Umfängen regulärer Polygone zwei Grenzen für π zu berechnen, weder den Radius constant gelassen hat, noch auch Kreise verglichen hat, die Polygonen von constantem Umfange zugehören. Der Verfasser zeigt dann, dass die Anwendung der von Archimedes befolgten Methode leichter und einfacher ist, als die Anwendung der beiden eben erwähnten, üblichen Methoden. Die verschiedenen Teile des Rechnungsweges werden ausführlich beschrieben und an einem Beispiel erläutert. Schliesslich findet der Verfasser aus dem Durchmesser eines 1536-Ecks, dessen Seite 1 ist, für π zwei Grenzen, die sich nur um $\frac{7}{10^{12}}$ unterscheiden.

Scht.

L. Maleyx. Étude sur la méthode suivie par Archimède pour déterminer approximativement le rapport de la circonférence au diamètre. Paris. Gauthier-Villars.

Weitere Durcharbeitung der Ideen, welche der Verfasser in der Januarnummer der Nouv. Ann. desselben Jahres entwickelt hat, besonders eine Vereinfachung in der Darlegung der Rechnungsmethoden. (Siehe voranstehendes Referat.) Lp.

S. Günther. Die geometrischen Näherungsconstructionen Albrecht Dürer's. Pr. Studienanst. Ansbach. 8°. 31 S

Von der Ueberzeugung ausgehend, dass es für Schüler grossen Wert habe, Näherungsconstructionen kennen zu lernen und sich über deren Genauigkeitsgrad ein Urteil zu bilden, führt der Herr Verfasser diejenigen bezüglichen Rechnungen, welche sich in Albrecht Dürer's „Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien Ebnen und gantzen Corporen“, 1525, finden, in elementarer Weise aus und begleitet diese Ausführung mit interessanten historisch-litterarischen Notizen. Behandelt werden die Construction des regelmässigen Fünfecks, Siebenecks, Neunecks, Elfecks und Dreizehnecks, die Winkel-

trisection, Umformungen mit Erhaltung des Flächeninhaltes, approximative Kreisquadratur, das delische Problem. M.

M. F. Bretschneider. Construction einer näherungsweisen Rectification des Kreises. Hoppe Arch. (2) III. 447-448.

Auf fünf Decimalen genau ist $\pi = \frac{13}{50}\sqrt{146}$, woraus die Proportion folgt $2\pi : 13 = \sqrt{11^2+5^2} : 25$. Lg.

Geometrischer Schlüssel zur Rectification der Kreislinie. Meiningen. Keyssner. 12 S.

A. Beyssell. Zwei Kreissätze. Hoppe Arch. (2) III. 335-336.

Legt man durch einen der Schnittpunkte zweier Kreise zwei Linien, so ist das Verhältnis ihrer Abschnitte zwischen den beiden Peripherien unabhängig von den Radien der Kreise, nämlich gleich dem Verhältnis der Sinus der Winkel, welchen die Geraden mit der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise bilden; sind diese Winkel gleich, so sind demnach auch die betreffenden Abschnitte gleich. Lg.

A. Strnad. Ueber Simson's Gerade. Casop. XV. 114. (Böhm.)

Der Verfasser leitet 13 Sätze, diese Gerade betreffend, ab, von denen er bisher anderwärts keine Erwähnung gefunden, die er also für neu zu halten sich berechtigt glaubt. Der erste lautet: Der von zwei Simson'schen Geraden M_1, M_2 eingeschlossene Winkel ist dem Peripheriewinkel gleich, welcher den zugehörigen Peripheriepunkten m_1 und m_2 entspricht (bekannt, Red.) u. s. w. Std.

J. Lange. Der Feuerbach'sche Satz. Hoppe Arch. (2) III. 329-330.

Eine Modification des von Herrn Schröter im siebenten Bande der Math. Ann. gegebenen Beweises für den Satz, dass der

einem Dreieck zugehörige Feuerbach'sche Kreis der neun Punkte den dem Dreieck einbeschriebenen Kreis berührt. Scht.

E. Lemoine. Note sur le cercle des neuf points. Nouv. Ann. (3) V. 122-127.

Wenn α, β, γ die homogenen Coordinaten eines Punktes O sind, so heissen die Punkte O_a, O_b, O_c dem Punkte O associirt, wenn ihre Coordinaten bezw. $-\alpha, \beta, \gamma$; $\alpha, -\beta, \gamma$; $\alpha, \beta, -\gamma$ sind. Mit Hülfe dieses Begriffs behandelt der Verfasser die Gleichungen, die sich auf die vier Berührungskreise eines Dreiecks beziehen. Die Coefficienten dieser Gleichungen erscheinen in eleganter Form als Functionen der Radien der vier Berührungskreise. Dabei wird Bezug genommen auf die von Gerono (Nouv. Ann. 1865) gefundenen Constructionen der vier Berührungspunkte, in denen der Feuerbach'sche Kreis der neun Punkte von den vier Berührungskreisen berührt wird. Scht.

W. Godt. Zur Figur des Feuerbach'schen Kreises. Hoppe Arch. (2) IV. 436-440.

Der Verfasser bestimmt auf der Peripherie des Umkreises eines Dreiecks die Punkte, deren jeder von den drei Ecken drei Entfernungen hat, so dass die eine Entfernung gleich der Summe der beiden andern ist. Von diesem Ausgangspunkte aus gelangt der Verfasser zu dem Satze, dass der Feuerbach'sche Kreis die vier Berührungskreise berührt, und findet zugleich, dass die Verbindung jedes der vier Berührungspunkte mit den Seiten-Mitten drei Strecken liefert, von denen immer eine gleich der Summe der beiden andern ist. Von weiteren Sätzen, die der Verfasser gewinnt, sei folgender hervorgehoben: Die vier Berührungskreise eines Dreiecks berühren jede Seite in vier Punkten, die paarweise gleichen Abstand von der Mitte der Seite haben. Schlägt man nun um die Mitte einen Kreis durch einen dieser Berührungspunkte, so ist die zu ihm und dem Feuerbach'schen Kreise gehörige Potenzlinie die ausser den drei Dreiecksseiten vor-

handene vierte gemeinsame Tangente der entsprechenden Berührungskreise. Scht.

A. Artzt. Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind, nebst einer Anwendung auf die Gerade der zwölf harmonischen Punktreihen und ihre beiden Gegenbilder, die Ellipse und den Kreis der zwölf harmonischen Punktsysteme (Kreis Brocard's). Pr. Gymn. Recklinghausen. 28 S. 4° u. 1 Taf.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der Programmabhandlung von 1884 und geht von folgenden Sätzen aus. Ein Dreieck $\alpha\beta\gamma$ von constanter Form sei mit dem Dreieck ABC gleichwendig (d. h. in der Drehungsrichtung ABC und $\alpha\beta\gamma$ übereinstimmend) und ihm so umschrieben, dass A auf $\beta\gamma$, B auf $\gamma\alpha$, C auf $\alpha\beta$ liegt, dann schneiden sich die drei Kreise αBC, βCA, γAB in einem Punkt O, der für alle möglichen Lagen von $\alpha\beta\gamma$ derselbe bleibt und der Schar $\alpha\beta\gamma$ als Nulldreieck angehört. Ist in ähnlicher Weise $\alpha'\beta'\gamma'$ umschrieben und mit ABC gegenwendig, so hat man die „Zwillingsscharen" $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ mit den „Zwillingspunkten" O und O'. Derartige Zwillingsscharen lassen sich entsprechend den sechs Permutationen von A, B, C je sechs aufstellen. Die Eigenschaften derselben und ihrer Nulldreiecke O und O' bilden den Gegenstand der Untersuchung des ersten Teils. Als bemerkenswert treten folgende hervor: Jeder Schar $\alpha\beta\gamma$ gehört als Maximum dasjenige $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ an, dessen Seiten auf OA, OB, OC senkrecht stehen. Sind $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ und $\alpha'_0\beta'_0\gamma'_0$ zwei Zwillingsmaxima, so ist die Summe ihrer Inhalte constant, nämlich $\alpha_0\beta_0\gamma_0 + \alpha'_0\beta'_0\gamma'_0 = 4ABC$. Ist P der Winkelgegenpunkt von O (d. h. $\angle\, OAB = PAC$, $OBC = PBA$), so erscheinen die Seiten der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ von O aus unter demselben Winkel, wie die entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC von P aus, und die Maximumdreiecke der zu O und P gehörigen Scharen verhalten sich wie die Radien ihrer Umkreise. Der zweite Teil ist eine Anwendung einiger allgemeiner Resultate des ersten und enthält eine Untersuchung von 48 ausgezeichneten Punkten des Dreiecks

ABC, welche wie folgt definirt werden: 1. Die sechs Punkte *O*, aus denen die Seiten von *ABC* unter dessen Winkeln resp. deren Supplementen erscheinen; desgl. diejenigen sechs Punkte *S*, aus denen jene Seiten unter den Winkeln desjenigen Dreiecks erscheinen, welches aus den Schwerlinien von *ABC* gebildet ist, so dass *O* und *S* Nulldreiecke von gleichwendig umschriebenen Dreiecken sind. 2. Die sechs Winkelgegenpunkte *P* von *O* und diejenigen *T* von *S*. 3. Die zweimal sechs Punkte O' und S' von denselben Eigenschaften wie in 1, welche Nulldreiecke von gegenwendig umschriebenen Dreiecken sind. 4. Die sechs Winkelgegenpunkte O'' von O' und diejenigen S'' von S'. Diese 48 Punkte verteilen sich zu je 12 auf vier Linien: a. Die Gerade *G*, auf welcher die Seiten von *ABC* von den in ihren Gegenecken an den Kreis *ABC* gelegten Tangenten geschnitten werden, enthält die Punkte O'' und S''. b. Die Ellipse *E*, welche dem Dreieck *ABC* umschrieben ist und seinen Schwerpunkt *S* zum Centrum hat, enthält die Punkte O' und S'. c. Der Kreis *K*, dessen einer Durchmesser das Centrum *M* des Kreises um *ABC* mit dem Winkelgegenpunkt *K* vom Schwerpunkt *S* verbindet, enthält die Punkte *P* und *T*. d. Die Curve C^4, deren Punkte die Winkelgegenpunkte des Kreises *K* sind, enthält die Punkte *O* und *S*. Der Kreis *K* in c. ist der sogenannte Brocard'sche, dessen Literatur in den letzten Jahren erschrecklich angewachsen ist. Es ist ein Verdienst der vorliegenden Arbeit, die gemeinsame Quelle der jenen Kreis betreffenden Sätze aufgedeckt zu haben. Lg.

Uhlich. Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks. Pr. Fürstenschule Grimma. 34 S. 4° u 1 Taf.

Der Herr Verfasser giebt im ersten Teile seiner Arbeit eine Geschichte des interessanten Punktes *M*, für den die Summe seiner Entfernungen von den Ecken des Dreiecks *ABC* ein Minimum ist. Dieselbe zeigt in lehrreicher Weise, wie notwendig es ist, bei derartigen wissenschaftlichen Arbeiten die Literatur

zu verfolgen. Obwohl seit 1750 bedeutende Mathematiker das vorliegende Problem von den verschiedensten Gesichtspunkten aus bearbeitet hatten, konnte Sachse 1875 diesen merkwürdigen Punkt noch für neu erfunden halten. Folgende Eigenschaften dieses Minimum-Punktes M werden besonders hervorgehoben und ihre Entdeckung historisch verfolgt: 1. Von M aus gesehen erscheinen die Seiten des Dreiecks ABC gleich gross. 2. Setzt man auf die Dreiecksseiten nach aussen hin gleichseitige Dreiecke mit den Spitzen X, Y, Z und den Mittelpunkten U, V, W auf, so schneiden sich AX, BY, CZ in M und zwar so, dass das Minimum $MA + MB + MC = AX = BY = CZ = k$ ist; UVW ist gleichseitig. 3. Setzt man ebenso die gleichseitigen Dreiecke nach innen auf, sind X', Y', Z' die Spitzen und U', V', W' die Mittelpunkte, so gehen auch AX', BY', CZ' durch einen Punkt M' und es ist $AX' = BY' = CZ' = k'$; auch $U'V'W'$ ist gleichseitig, $UVW - U'V'W' = ABC$, und diese drei Dreiecke haben denselben Schwerpunkt; $k^2 + k'^2 = a^2 + b^2 + c^2$. 4. Dasjenige gleichseitige Dreieck, dessen Seiten auf MA, MB, MC in ABC senkrecht stehen, ist das grösste dem ABC umgeschriebene gleichseitige Dreieck. 5. Ist L der Winkelgegenpunkt von M und sind A', B', C' die Fusspunkte der von L auf BC, CA, AB gefällten Lote, so ist $A'B'C'$ das kleinste dem ABC eingeschriebene gleichseitige Dreieck. Im zweiten Teil giebt der Verfasser selbständige Untersuchungen, indem er die gleichseitigen Dreiecke durch beliebige aber ähnliche mit den Winkeln ξ, η, ζ ersetzt, so dass an der Ecke A beiderseits ξ, bei B η, bei C ζ angetragen ist. Er zeigt, dass die Umkreise dieser drei Dreiecke sich in einem Punkte O so schneiden, dass $OA \sin\xi + OB \sin\eta + OC \sin\zeta = AX \sin\xi = BY \sin\eta = CZ \sin\zeta$ ist. Haben U, V, W und U', V', W' ähnliche Bedeutung wie oben in 4, so ist auch hier $UVW - U'V'W' = ABC$. Die Seiten des grössten dem ABC umgeschriebenen Dreiecks von der Form $\xi\eta\zeta$ stehen auf OA, OB, OC senkrecht, und die Seiten jedes andern umgeschriebenen Dreiecks von derselben Form bilden mit OA, OB, OC gleiche Winkel. Ist O' der Winkelgegenpunkt von O und zieht man von O' unter gleichem Neigungswinkel ψ' gegen die Seiten 3 Transversalen, so hat das Fusspunktendreieck constante Gestalt;

dasselbe ist ein Minimum für $\psi' = 90^0$. Die Uebereinstimmung dieser allgemeinen Sätze mit den obigen speciellen liegt auf der Hand. In den letzten Paragraphen 18 bis 25 werden noch weitere interessante Folgerungen gezogen, indem *O* in die Lagen der übrigen merkwürdigen Punkte (Höhenpunkt, Um- und Inkreiscentrum etc.) versetzt wird. Lg.

O. Schlömilch. Ueber gewisse merkwürdige Punkte im Dreieck. Schlömilch Z. XXXI. 251.

Sind A_1, B_1, C_1 die Gegenpunkte vom Umkreiscentrum *M* eines Dreiecks *ABC* in Bezug auf die Seiten, so gehen AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt *O*, von dem einige Eigenschaften angegeben werden. Der Satz ist nicht neu, vergl. Hoffmann Z. XIV. 270 und XV. 32, wo auch hervorgehoben wird, dass *O* Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises sowohl für *ABC* als für $A_1B_1C_1$ ist. Lg.

B. Sporer. Geometrische Sätze. Schlömilch Z. XXXI. 43-49.

Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet der bekannte Satz: Die Umkreise der vier aus vier geraden Linien gebildeten Dreiecke schneiden sich in einem Punkt, nämlich dem Brennpunkt der Parabel, welche die vier Linien berührt; dieser Punkt liegt auch mit den Mittelpunkten jener vier Kreise auf einem Kreise („Mittelpunktkreis"). Interessante Folgerungen erhält man, wenn man die vier Linien als Tangenten eines Kreises oder als zwei Seiten eines Dreiecks mit den zugehörigen Höhen annimmt; im letzteren Falle steht die Figur im engen Zusammenhang mit dem Feuerbach'schen Kreise. Schliesslich werden die Beziehungen untersucht, welchen die Mittelpunktkreise und die Brennpunkte der berührenden Parabeln unterworfen sind, die zu je vier von fünf geraden Linien gehören. Lg.

H. Lieber. Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'schen Punkt. Pr. Realgymn Stettin. 14 S. 4°.

„In der Arbeit sind keine wesentlich neuen Untersuchungen enthalten. Hauptzweck derselben ist, eine übersichtliche Zusammenstellung der bisher gefundenen Eigenschaften des Grebe'schen Punktes und der sogenannten Gegenmittellinie zu geben.“ Der Herr Verfasser war zu dieser Arbeit besonders berechtigt und geeignet, da er seit einer Reihe von Jahren das Aufgaben-Repertorium in der Hoffmann'schen Zeitschrift redigirt, in welchem namentlich die Herren Artzt, Fuhrmann, Stoll, Stegemann, Emmerich u. a. hierher gehörige Aufgaben und Resultate veröffentlicht haben. Vom Verfasser sind nur einige Aufgaben den Sätzen hinzugefügt und mehrere Beweise vereinfacht. Die ersten 12 Nummern handeln über die Gegentransversalen im allgemeinen, die folgenden 20 über die Gegenmittellinie im besonderen, die übrigen 25 über den Grebe'schen Punkt. Bei den letzteren sind auch die Autoren der Sätze namhaft gemacht und einzelne literarische Notizen beigefügt. Die Zusammenstellung wird allen denjenigen, welche sich nicht aus den Originalarbeiten unterrichten können, ein willkommenes Hülfsmittel sein.

Lg.

P. H. Schoute. Over een nauwer verband tusschen hoek en cirkel van Brocard. Amst. Versl. en Meded. (3) III. 22-38.

Hauptsächlich handelt es sich um den Kreis von Brocard und die Eigenschaften des Dreiecks, welche damit in Verbindung stehen. Zunächst wird auf die Untersuchungen von Artzt und Casey über diesen Gegenstand hingewiesen und dann eine einfachere Bestimmung des genannten Kreises gegeben. Sie folgt aus den folgenden Sätzen: Nach dem Winkel von Brocard, welcher zu dem Fusspunktendreieck des Punktes P gehört, ordnen sich die Punkte der Ebene in Kreise, die einen Büschel bilden. Zu diesen Kreisen gehören der umgeschriebene Kreis und auch der Kreis von Brocard nach dem Satz: Dieser Kreis ist der geometrische Ort des Punktes, dessen Fusspunktendreieck im Winkel von Brocard mit dem gegebenen Dreieck übereinstimmt. Eine Anzahl von Folgerungen, welche auf die Lemoine'sche

Gerade Bezug haben, werden aus diesen Sätzen abgeleitet. Die Behandlungsweise ist teils analytisch, teils synthetisch. Die vollständige Litteratur des Gegenstandes wird angeführt. G.

R. Tucker. Some properties of a quadrilateral in a circle, the rectangles under whose sides are equal. Ed. Times. XLIV. 125-135.

Der Verfasser sucht die Eigenschaften des Brocard'schen Kreises auf das Viereck auszudehnen und findet unter Voraussetzung eines Kreisvierecks mit den Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ folgende Sätze: Damit es zwei Brocard'sche Punkte P und P' giebt, für welche

$$PAB = PBC = PCD = PDA = \varphi = P'BA = P'AD \text{ etc.}$$

ist, muss $ac = bd$ sein. Schneiden sich dann PA und $P'B$ in F, PD und $P'A$ in G, PB und $P'C$ in H, PC und $P'D$ in K, so liegen $PP'FGHK$ auf dem Brocard'schen Kreise des Vierecks; auf demselben Kreise liegt auch das Umkreiscentrum O von $ABCD$ und der Schnittpunkt E der Diagonalen AC und BD. OE ist ein Durchmesser, daher halbirt der Kreis auch die Diagonalen AC und BD. E entspricht dem Grebe'schen Punkt beim Dreieck. Zieht man durch E zu a, b, c, d Parallelen, welche der Reihe nach b, c, d, a in S, V, W, N und d, c, b, a in X, T, R, Q schneiden, so sind die Vierecke $SVWN$ und $XTRQ$ dem gegebenen $ABCD$ ähnlich. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Lote von E auf a, b, c, d, so sind deren Fusspunkte die Ecken eines Tangentenvierecks, dessen Inkreiscentrum E ist. Am Schlusse finden sich literarische Notizen. Herr Neuberg teilt dem Verfasser u. a. mit, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Ausdrücken $d:\sin A$, $b:\sin B$, $b:\sin C$, $c:\sin D$ proportional sind, und dass $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c} = \frac{\delta}{d} = \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ ist, wodurch neue Analogien mit den Brocard'schen Punkten des Dreiecks hergestellt sind. (Vgl. den Bericht über die einschlägigen Untersuchungen des Herrn Neuberg unter dem Titel „Sur le quadrilatère harmonique" in Mathesis V, F. d. M. XVII. 1885. 549ff.). Lg.

G. Tarry. Sur les figures semblables associées. Mathesis VI. 97-100, 148-151, 196-203.

Die Eigenschaften des Dreiecks hinsichtlich der Brocard'schen Punkte und Kreise können aus der allgemeinen Theorie eines Systems dreier direct ähnlicher Figuren hergeleitet werden (Mathesis II. 73; F. d. M. XIV. 1882. 458). Indem der Verfasser nunmehr eine beliebige Anzahl ähnlicher Figuren betrachtet, dehnt er manche Eigenschaften des Dreiecks auf gewisse Vielecke aus, die sogenannten harmonischen Polygone. Wir führen im Folgenden einige der neuen von Hrn. Tarry bewiesenen Sätze an: 1. In n zugeordneten Figuren (d. h. direct ähnlichen Figuren, die zwei Gruppen von je n Geraden enthalten, welche sich bez. in zwei Punkten schneiden) ist das aus n beliebigen homologen Geraden gebildete Vieleck mit dem Vieleck perspectivisch, welches die Aehnlichkeitspunkte zu Ecken hat. 2. Eine harmonische Linie (d. h. eine Linie $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, die einem Kreise so einbeschrieben ist, dass die Geraden A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1} in n zugeordneten Figuren homolog sind) kann durch Inversion in eine regelmässige Linie transformirt werden.

Mn. (Lp.)

E. Lemoine. Note sur quelques points remarquables du plan du triangle ABC. Journ. de Math. spéciales. 3 S.

Es handelt sich um die vier Punkte Θ_1, Θ_a, Θ_b, Θ_c, welche von Hrn. Lemoine zuerst 1873 in der Assoc. franç., später 1883 in dem Journ. de Math. spéc. behandelt sind. Zieht man durch Θ_1 Parallelen zu jeder der drei Seiten, so schneiden diese Parallelen jeweilig die beiden anderen Seiten in solchen Punkten, welche die Ecken eines dem Inkreise umgeschriebenen Sechsecks sind. Ebenso verhalten sich Θ_a, Θ_b, Θ_c zu den Ankreisen. Beschreibt man um ABC dasjenige Dreieck $A_1B_1C_1$, dessen Seiten mit denen von ABC parallel sind, ferner um $A_1B_1C_1$ ebenso das Dreieck $A_2B_2C_2$, so ist Θ_1 das Inkreiscentrum von $A_2B_2C_2$.

Lp.

LEMOINE et NEUBERG. Note sur la géométrie du triangle. Mathesis VI. 55-57, 73-75.

Beiträge zur neueren Geometrie (Punkte von Lemoine, Brocard, Tarry, Hyperbel von Kiepert, u. s. w.) Mn. (Lp.)

E. LEMOINE. Propriétés relatives à deux points du plan d'un triangle qui se déduisent d'un point quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine. Mathesis, suppl. III. 27 S.

Aus der Ass. Franç. Congrès de Grenoble (F. d. M. XVII. 1885. 547).

Ausser dem im Titel bezeichneten Gegenstande behandelt der Verfasser auf acht inhaltsvollen Seiten die Geschichte der neueren Dreiecksgeometrie. Mn. (Lp.)

Aufgaben über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks, über die mit ihnen zusammenhängenden Kreise u. dgl. m. nebst den zugehörigen Lösungen von W. J. BARTON, J. BEYENS, H. BROCARD, B. CHAKRAVARTI, A. H. CURTIS, R. F. DAVIS, T. GALLIERS, A. GORDON, W. J. GREENSTREET, W. H. H. HUDSON, R. KNOWLES, DE LONGCHAMPS, P. A. MACMAHON, S. MARKS, G. B. MATHEWS, W. J. MCCLELLAND, W. J. C. MILLER, A. MUKHOPÂDHYÂY, J. NEUBERG, NILKANTA, E. PERRIN, B. H. RAU, S. ROBERTS, CH. A. SCOTT, T. C. SIMMONS, A. F. THEODOSIUS, R. TUCKER, W. VOYSON finden sich in Ed. Times XLIV. 31, 44-45, 53-54, 54-55, 86-87, 107, 113-114, 120-121; XLV. 22-23, 27-28, 44, 49-50, 57, 58, 72, 73-74, 83-84, 87, 91-92, 97-98, 98-100, 115-116, 116-117, 119-120, 122, 124.

Lp.

R. LACHLAN. Orthogonal systems of circles. Mess. XVI. 98-109.

Unter einem orthogonalen System von Kreisen versteht man

gewöhnlich ein System von vier Kreisen, von denen jeder die drei anderen rechtwinklig schneidet. Die Haupteigenschaften eines solchen Systems sind: 1. Ihre Mittelpunkte stehen in der Beziehung zu einander, dass jeder der Höhenschnitt für das aus den anderen drei gebildete Dreieck ist. 2. Die Summe der Quadrate ihrer reciproken Radien ist Null. 3. Bezeichnet man die Kreise mit (1, 2, 3, 4), so wird die Potenz irgend welcher anderen Kreise gegeben durch:

$$\pi_{x,y} = \frac{\pi_{x,1} \cdot \pi_{y,1}}{\pi_{1,1}} + \frac{\pi_{x,2} \cdot \pi_{y,2}}{\pi_{2,2}} + \frac{\pi_{x,3} \cdot \pi_{y,3}}{\pi_{3,3}} + \frac{\pi_{x,4} \cdot \pi_{y,4}}{\pi_{4,4}}.$$

In diesem Aufsatze definirt der Verfasser als orthogonale Systeme zwei Systeme, jedes von vier Kreisen, von folgender Beschaffenheit: Ist eins der beiden Systeme gegeben, so wird das zweite abgeleitet, indem man für je drei der gegebenen den Orthogonalkreis construirt. Zwei solche Systeme haben, wie sich nun zeigt, eben so einfache Eigenschaften wie die oben erwähnten für den besonderen Fall, wenn die beiden Systeme identisch sind. Gewisse besondere Fälle, bei denen einige der Kreise zu Punkten werden, finden einzeln ihre Erledigung. Glr. (Lp.)

J. A. Serret. Trattato di trigonometria. Versione italiana con aggiunte per cura di Luigi Fenoglio. Parte I. Trigonometria piana e sferica. Torino. Paravia.

Diese neue Uebersetzung ist nach der sechsten französischen Ausgabe angefertigt und enthält die vier ersten Capitel derselben, welche den elementaren Teil des Werkes ausmachen. Der zweite Teil mit den beiden letzten Capiteln wird später erscheinen.

La. (Lp.)

F. Porta. Goniometria e trigonometria piana. II. edizione. Torino. Bocca.

F. Porta. Trigonometria sferica. Torino. Bocca.

La.

A. KLEYER. Lehrbuch der Goniometrie. (Winkelmessungslehre.) Stuttgart. Julius Maier.

J. ALISON. Trigonometrical mnemonic. Edinb. M. S. Proc. IV. 88.

Die fundamentalen Beziehungen zwischen den trigonometrischen Functionen desselben Winkels werden erörtert.

Gbs. (Lp.)

D. BESSO. Sull' errore nel calcolo del seno d'un angolo colle tavole e sopra un noto teorema di goniometria. Besso Per. I. 122-126.

Der bekannte goniometrische Satz ist folgender: Das Verhältnis $\frac{\sin a}{a}$ nimmt ab, wenn a das Intervall $0^\circ \dots 180^\circ$ durchläuft. Vermittelst dieses Satzes wird eine obere Grenze des Fehlers eines durch Interpolation berechneten Sinus bestimmt. Sind a, $a+d$ die Grenzen, zwischen welchen der gegebene Winkel liegt, und ist d_1 die auf den Einheitsradius bezogene Länge des Bogens d, so ist die obere Grenze $\frac{d_1^3}{16}+\frac{d_1^2}{8}\sin(a+d)$. Aus dem zu Grunde gelegten Satze werden auch zwei Zusätze abgeleitet. Der erste kann so ausgesprochen werden: Das Verhältnis zweier Seiten eines Dreiecks liegt zwischen 1 und dem Verhältnisse ihrer Gegenwinkel. Der zweite lautet: Unter allen auf einer Kugelfläche liegenden, zwei bestimmte Punkte derselben verbindenden Kreisbogen, ist der 180° nicht überschreitende Hauptkreisbogen der kürzeste.

Vi.

H. SEIPP. Beiträge zur Kenntnis der Eigenschaften des ebenen Dreiecks. Halle. H. W. Schmidt. IV + 87 S. gr. 8° u. 3 Taf.

Eine Hauptrolle in der vorliegenden Arbeit spielt die Gerade g, welche im spitzwinkligen Dreieck die Fusspunkte der

von einem Höhenfusspunkt auf die nicht zugehörigen Seiten gefällten Lote verbindet. Es werden in den beiden ersten Abschnitten Lagenbeziehungen und metrische Relationen zwischen g und andern Stücken des Dreiecks aufgestellt, die sich bereits in trigonometrischen Aufgabensammlungen, z. B. von Reidt und Gallenkamp, finden, wo allerdings für g der halbe Umfang des Höhenfusspunktendreiecks gesetzt wird und die entsprechenden Resultate auch für stumpfwinklige Dreiecke richtig angegeben sind. Die folgenden Abschnitte behandeln einige Kreise, die mit dem Höhendreieck und der Geraden g in Verbindung stehen, sowie andere Distanzrelationen, z. B. zwischen den Ecktransversalen nach den Berührungspunkten der ein- und angeschriebenen Kreise. Der Verfasser benützt bei der Herleitung seiner Sätze Dreiliniencoordinaten, einfache elementar-geometrische Betrachtungen dürften aber überall ausreichen. Dass er die Feuerbach'sche Schrift über den Gegenstand erst kennen gelernt hat, als seine Arbeit bereits im Entwurfe fertig war, giebt er selbst in der Vorrede an. Lg.

R. Tucker. The „sine-triple-angle" circle. Mess. XVI. 125-126.

Auf den Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC werden Punkte D und D', E und E', F und F' so angenommen, dass $\angle AEF = A = \angle AF'E'$, $\angle BFD = D = \angle BD'F'$, $\angle CDE = C = \angle CE'D'$ ist. Die beiden Dreiecke DEF, $D'E'F'$ haben denselben umgeschriebenen Kreis und

$$DD' : EE' : FF' = \sin 3A : \sin 3B : \sin 3C.$$

Auch andere Eigenschaften werden bewiesen. Glr. (Lp.)

K. Schwering. Ueber Dreiecke, deren einer Winkel das Vielfache eines anderen ist. Pr. Gymn. Coesfeld. 5 S. 4°.

In einem Dreiecke sei $\beta = m\alpha$, also $\gamma = \pi - (m+1)\alpha$, m eine ganze Zahl; dann ist

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin m\alpha : \sin(m+1)\alpha.$$

Um Dreiecke zu finden, in denen unter dieser Bedingung die

Seiten rationale Zahlen sind, entwickelt der Verfasser $\sin nx : \sin x$ nach Potenzen von $2\cos x$, setzt $2\cos\alpha = p:q$ (p und q relativ prim) und erhält dadurch:

$$a = q^m,$$
$$b = q\left\{p^{m-1} - \frac{m-2}{1}p^{m-3}q^2 + \frac{(m-3)(m-4)}{1\,.\,2}p^{m-5}q^4 - \cdots\right\},$$
$$c = p^m - \frac{m-1}{1}p^{m-2}q^2 + \frac{(m-2)(m-3)}{1\,.\,2}p^{m-4}q^4 - \cdots,$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\alpha < \frac{\pi}{m+1},\ 2q\cos\frac{\pi}{m+1} < p < 2q.$$

Für die Fälle $m = 2, 3, 5$ werden die Beispiele mit den kleinsten Zahlen ausgerechnet, ferner auch ein Dreieck, für welches $\alpha:\beta = 2:3$. Lp.

K. Schwering. Angebliche Dreiteilung eines Winkels.
Pr. Gymn. Coesfeld. 3 S. 4°.

Die vom verstorbenen Volksschullehrer Averdieck herrührende Construction lautet wie folgt: Um den Scheitelpunkt C des zu teilenden Winkels beschreibe man einen Kreisbogen mit beliebigem Radius, der die Schenkel in A und B treffe; man ziehe die Sehne AB, ferner das Lot CF von C auf AB. Auf dem Kreisbogen nehme man einen Punkt D beliebig, ziehe CD, AD, FD. Ein Kreisbogen um A mit AD als Radius treffe CD in E; die Parallele durch E zu DF treffe AB in K, dann soll AK die Sehne des Drittels vom Winkel ACB sein.

Herr Schwering zeigt, dass die Construction für zwei Lagen des Punktes D richtig ist und für Punkte zwischen diesen beiden Lagen eine gute Näherung giebt. Lp.

E. Lampe. Angenäherte Trisection eines Winkels mit Zirkel und Lineal. Kronecker J. C. 364.

Der Herr Verfasser verbindet die Endpunkte des gedrittelt gegebenen Kreisbogens $AD = 6\alpha$ mit dem Mittelpunkt O; und, wenn Q der Halbirungspunkt des Bogens AD ist, so möge QO den Kreis zum zweiten Male in R treffen. Sind nun B und C

die Teilpunkte der Trisection von AD, also Bogen $AB = 2\alpha$, Bogen $BC = 2\alpha$, so werden A, B, C, D mit R verbunden, wodurch bei R drei gleiche Winkel entstehen; auch werden B und C mit O verbunden, so dass man bei O gleichfalls drei gleiche Winkel erhält. Verbindet man aber A, B, C, D mit einem zwischen O und R liegenden Punkte P des Radius OR, so entstehen bei P drei Winkel APB, BPC, CPD, von denen der mittlere gleich β, und jeder der äusseren gleich γ gesetzt wird; und es ist dann $\beta-\gamma$ von Null wenig verschieden. Es wird daher auf OR derjenige Punkt P gesucht, für welchen diese Differenz ein Maximum ist; und es zeigt sich, dass dieses Maximum mit α schnell abnimmt. Hierauf gründet der Herr Verfasser seine Construction und erwähnt, dass Aehnliches auch für die Multisection Geltung hat. Mz.

K. Heinze. Genetische Stereometrie. Bearbeitet von F. Lucke. Leipzig. Teubner. XII u. 194 S.

Verfasser versteht unter „Stereometrie“ die specielle Körpermessungslehre, als deren wichtigste Aufgabe er die Inhaltsberechnung bezeichnet. Durch „genetisch“ soll folgendes angedeutet werden: Ein „Centralkörper“, der als Verallgemeinerung des Prismatoids aufzufassen ist in der Art, dass die Kanten auch krummlinig sein können, und dass er der Simpson'schen Regel genügt, wird an die Spitze gestellt. Aus ihm werden dann die von dem System umfassten Körperformen (die Ecken müssen in zwei parallelen Endflächen liegen, der Mantel kann aber auch krummflächig zweiten Grades sein) durch successive Specialisirung entwickelt und durch Anwendung der Simpson'schen Regel berechnet, nachdem die letztere zuvor auf dem umgekehrten Wege vom Speciellen zum Allgemeinen bewiesen worden ist. Eingehender hat sich Referent über das Buch ausgesprochen in Hoffmann Z. XVIII. 81. Hk.

P. Cassani. Stereometria e sezioni coniche. Torino. Bocca.
La.

H. Thieme. Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschlusse an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. Leipzig. B. G. Teubner. VI + 92 S. 8°.

Der Verfasser bietet im vorliegenden Werkchen eine in 14 Paragraphen nach dem Inhalte geordnete Sammlung von Uebungsaufgaben aus der Stereometrie, welche sich nicht auf die Berechnung von Volumen, Flächen und Strecken beziehen, sondern die Fähigkeit der Zergliederung räumlicher Anschauung durch geometrische Constructionen und durch das Beweisen stereometrischer Lehrsätze fördern sollen. Vorbereitet durch Arbeiten des im Titel genannten verstorbenen Mathematikers, ist die Sammlung aber doch grösstenteils durch den Verfasser zusammengestellt worden. In ihrer Art ist sie augenblicklich wohl die einzige, und da sie durch Reichhaltigkeit und Sorgfältigkeit der Behandlung ausgezeichnet ist so ist sie den Lehrern der Stereometrie zu empfehlen. Gegen das Vorwort ist vielleicht zu bemerken, dass die rein geometrischen Uebungsaufgaben der Stereometrie nicht in dem Masse vernachlässigt sind, wie es die Aeusserungen des Verfassers vermuten lassen. Von älteren Werken enthält die Jacobi'sche Ausgabe der van Swinden'schen Elemente der Geometrie auf S. 436-480 eine Sammlung solcher Aufgaben, von denen viele für das vorliegende Buch noch hätten benutzt werden können. Unter den neueren Lehrbüchern ist z. B. Hauck's Ausgabe von Kommerell's Lehrbuch der Stereometrie sowohl in der ganzen Veranlagung auf die Ausbildung der räumlichen Anschauung hin gearbeitet, als auch mit vielen interessanten und mit dem Lehrstoff geschickt verknüpften Aufgaben gleicher Natur versehen, und dieser Gesichtspunkt einer „systematischen Anleitung zur constructiven Lösung stereometrischer Aufgaben" wird in der Vorrede von Hrn. G. Hauck ausdrücklich hervorgehoben. Lp.

A. Kleyer. Lehrbuch der Körperberechnungen. Stuttgart. Julius Maier.
Erstes Buch. Zweite Auflage VIII + 232 S. gr. 8°.
Zweites Buch. VIII + 528 S. gr. 8°.

Beide Bücher bilden Teile von „Dr. Kleyer's Mathematisch-technisch-naturwissenschaftlicher Encyklopädie zum Gebrauch an niederen und höheren Schulen sowie zum rationellen Selbststudium nach eigenem System bearbeitet". Dieses System besteht in der grösstmöglichen Breite und Ausführlichkeit sowie in der unausgesetzten Wiederholung der bei der Lösung von Aufgaben vorkommenden Sätze, so dass z. B. das vollständige Multiplicationsschema für $8{,}75 \times 4{,}75$ oder die Berechnung von $\sqrt{3}$ auf drei Decimalen abgedruckt wird. Gemäss dem Plane des Verfassers enthalten die beiden Bücher nur Aufgaben, deren Lösung keine Kenntnis der Trigonometrie erfordert; für solche Aufgaben ist nämlich ein drittes Buch bestimmt. Das erste Buch soll die Lehren über die Berechnung der Prismen, Pyramiden, Cylinder, Kegel und Kugel, ferner der fünf regelmässigen Platonischen Körper bringen, das zweite dagegen 772 Aufgaben aus der Praxis und über die gegenseitigen Beziehungen und Verbindungen dieser Körper und anderer aus ihnen zusammengesetzter, eine Trennung, die nicht immer streng durchführbar ist. Es ist hier nicht möglich, auf die Mängel der Methode und der Darstellung der Lösungen näher einzugehen, die auf den schwächsten Standpunkt mathematischer Vorbildung fortwährend Rücksicht nehmen. Die Bücher sind ja für den grossen Markt ungeschulter Leser geschrieben, auf welchem der Erfolg entscheidet. Indes soll wenigstens ein sprachliches Curiosum erwähnt werden. Die Wörter Polyeder, Rhomboeder, Rhomboidaldodekaeder gebraucht der Verfasser gegen die Abstammung und gegen die übliche Sprache als Masculina, die Wörter Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder aber richtig als Neutra. Lp.

P. Seelhoff. Flächen- und Körperberechnung. Bremen. Heinsius.

Das Buch ist zum Gebrauche für Navigationsschulen geschrieben und für andere Zwecke nicht geeignet. Den grösseren Teil (60 Seiten) nehmen Aufgaben aus der Arithmetik ein, den kleineren (40 Seiten) die Flächen- und Körperberechnung. Jedem Paragraphen sind Regeln und Formeln beigedruckt, nach welchen die entsprechenden Beispiele gerechnet werden sollen. Lg.

W. Burkhardt. Lehrbuch der Stereometrie. Leipzig. Gressner & Schramm. VI u. 133 S.

A. Brenner. Die Flächen- und Körperberechnung mit besonderer Berücksichtigung der Aufgaben aus dem Gewerbsleben. Freising. Datterer. 40 S.

Halsted, Théorèmes de Descartes et d'Euler. Mathesis. VI. 121-122.

Mn.

A. Faifofer. Dimostrazione di una proposizione fondamentale nella teoria dell'equivalenza. Besso Per. I. 13-15.

R. De Paolis. Sopra una proposizione fondamentale della teoria dell'equivalenza. Besso Per. I. 44-46.

Bei der Darstellung der Theorie von der Gleichheit geometrischer Gebilde hat Herr De Paolis es als ein Axiom hingestellt, dass „ein Teil eines Polygons oder Polyeders dem Ganzen nicht gleich sein kann". Nach dem Wunsche des Herrn Faifofer soll dieser Satz zu einem Lehrsatze erhoben werden, dessen Beweis er angiebt. In der zweiten oben citirten Note beweist jedoch Herr De Paolis, dass das Schlussverfahren des Herrn Faifofer nicht folgerichtig ist. Demnach muss der angeführte Satz noch unter den Axiomen stehen bleiben. La. (Lp.)

D. Besso. Corollarii e generalizzazione di un teorema d'Eulero sul quadrilatero. Besso Per. I. 53-56.

Das betreffende Euler'sche Theorem lautet: Die Summe der Quadrate der vier Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat der Strecke, welche ihre Mitten verbindet. Nachdem Herr Besso dasselbe bewiesen und darauf hingewiesen hat, dass sein Beweis nicht voraussetzt, dass das Viereck ein ebenes sei, zieht er aus dem obigen Satze Folgerungen hinsichtlich der (ebenen oder windschiefen) Polygone, der Prismen, deren Basis ein Viereck ist, u. s. w. La. (Lp.)

R. Hoppe. Analytischer Beweis zweier Sätze von regelmässigen Pyramiden und Polyedern. Hoppe Arch. (2) IV. 441-443.

1. Die Summe der Projectionen der Seitenkanten einer n-seitigen regelmässigen Pyramide auf eine beliebige Gerade ist gleich der n-fachen Projection der Höhe. 2. Die Summe der Projectionen der Eckradien eines regelmässigen Polyeders auf eine beliebige Gerade ist $\doteq 0$. Lg.

Malet, T. C. Simmons, Neuberg. Solutions of questions 8047, 8116. Ed. Times XLIV. 28-29, 53.

Zieht man durch die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ vier Parallele, welche die Gegenflächen der betreffenden Ecken in A', B', C', D' schneiden, so ist das Volumen des Tetraeders $A'B'C'D'$ dreimal so gross wie das von $ABCD$. Diesen von Herrn Malet vorgelegten, von Herrn Simmons bewiesenen Satz erweitert Herr Neuberg zu folgendem: Der Ort eines Punktes M, für welchen die Geraden AM, BM, CM, DM die Flächen des Tetraeders $ABCD$ in solchen Punkten $A'B'C'D'$ schneiden, dass Tetraeder $A'B'C'D' = 3ABCD$ ist, besteht aus der Ebene im Unendlichen und einer Fläche dritter Ordnung. Ist bei der analogen Aufgabe für das Dreieck $A'B'C' = 2ABC$, so besteht der Ort für M aus der Geraden im Unendlichen und derjenigen um ABC beschriebenen Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte von ABC zusammenfällt. Lp.

J. Wolstenholme, D. Biddle. Solution of question 8081. Ed. Times. XLIV. 22-24.

Bei einem Tetraeder *ABCD* seien die Kanten *DA*, *DB*, *DC* bezw. mit a, b, c, analog *BC*, *CA*, *AB* mit a', b', c', die diesen Kanten gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, α', β', γ' bezeichnet. Ist dann

$$a'+b'+c' > a'+b+c > a+b'+c > a+b+c',$$

so folgen daraus die Ungleichungen:

$$\alpha'+\beta'+\gamma' > \alpha'+\beta+\gamma > \alpha+\beta'+\gamma > \alpha+\beta+\gamma';$$

aus

$$a+a' > b+b' > c+c' \quad \text{ferner} \quad \alpha+\alpha' > \beta+\beta' > \gamma+\gamma'.$$

Endlich wird die Reihenfolge der Kanten nach ihrer Grösse untersucht, wenn jene fünf Ungleichungen zwischen den Kanten bestehen, sowie die Bedingung dafür, dass die Reihenfolge der Kanten mit derjenigen der Gegenwinkel übereinstimmt, Letzteres für den Fall, dass alle Winkel spitz sind. Lp.

J. Wolstenholme, B. H. Rau, A. M. Nash. Solution of question 7570. Ed. Times XLIV. 101-102.

Bei einem Tetraeder *ABCD* sei gesetzt $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$; die Gegenkanten seien bezw. $BC = a+x$, $CA = b+x$, $AB = c+x$. Ferner bezeichne man zur Abkürzung

$$a+b+c = s, \quad -a+b+c = s_1, \quad a-b+c = s_2, \quad a+b-c = s_3,$$
$$ab+ac+bc = C_2, \quad abc = C_3.$$

Die Summe der Flächenwinkel bei A, B oder C sei $180^\circ + 2S$; dann ist

$$\cos S = \frac{4C_3+(s_1+x)(s_2+x)(s_3+x)+2x(s+x)^2}{(s+x)\{(s+3x)(s_1+x)(s_2+x)(s_3+x)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Summe der Flächenwinkel bei D sei $180^\circ + 2S'$; dann ist

$$\cos S' = \frac{(s+x)\{4C_2-s(s+x)\}-4C_3}{\{(s+x)^2(s_1-x)(s_2-x)(s_3-x)\}^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{Lp.}$$

D. Besso. Sul tetraedro a facce eguali. Besso Per. I. 1-12.

Unter den besonderen Tetraedern giebt es ein sehr bemer-

kenswertes, von welchem nämlich je zwei Gegenkanten einander gleich sind; seine Seitenflächen und Ecken sind ebenfalls gleich; es kann mithin als das räumliche Analogon zum gleichseitigen Dreiecke angesehen werden. Der Aufsatz des Hrn. Besso bezweckt eine Erforschung dieses Gebildes. Der Verfasser beweist mehrere interessante Eigenschaften, unter ihnen manche, die von Hrn. Schmidt in der Abhandlung „Das gleichseitige Tetraeder" (Schlömilch Z. XXIX. 321-342, F. d. M. XVI. 1884. 500) ermittelt worden sind. La. (Lp.)

J. Neuberg. Mémoire sur le tétraèdre. Belg. Mém. C. XXVII. 1-72.

Als Supplement V zur Mathesis besprochen in F. d. M. XVII. 1885. 565. Mn.

S. Roberts. Solution of question 8089. Ed. Times. XLIV. 79-80.

A, *B*, *C*, *D* seien die vier Ecken eines Tetraeders. Drei Kugeln (1), (2), (3) werden so angenommen, dass (1) die Fläche *ABD* in *B* berührt und durch *C* geht, (2) *ABC* in *C* berührt und durch *D* geht, (3) *ACD* in *D* berührt und durch *B* geht. Dann schneiden sich die drei Kugeln in einem Brocard-Punkte der Basis *BCD* und in einem Punkte der Umkugel von *ABCD*. Der letztere und der sofort zu erwähnende entsprechende Punkt liegen auf ein und derselben Kugel, die durch den Brocard-Kreis von *BCD* geht. Nimmt man die Flächen und Gegenecken in umgekehrter Folge, so erhalten wir einen entsprechenden Punkt; nimmt man ferner alle vier Flächen der Reihe nach als Basis, so erhält man vier Paare entsprechender Punkte auf der Umkugel. Lp.

R. Lachlan. On systems of circles and spheres. Lond. R. S. Proc. XL. 242-245, Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 481-625.

Diese umfangreiche Abhandlung ist in drei Teile gegliedert: Teil I handelt von Kreisen in einer Ebene, Teil II von Kreisen

auf der Oberfläche einer Kugel, Teil III von Kugeln. Die Behandlungsmethode ist diejenige, welche in zwei Aufsätzen unter Clifford's „Mathematical Papers" etwa aus dem Jahre 1868 angedeutet ist; doch bemerkt der Verfasser, dass die darin enthaltenen Ueberlegungen grossenteils mit den von Hrn. Darboux in verschiedenen Aufsätzen von 1869-72 ausgesprochenen Gedanken zusammentreffen.

Im ersten Capitel von Teil I ist der Nachweis für eine allgemeine Relation zwischen den „Potenzen" von zwei beliebigen Gruppen von fünf Kreisen erbracht. Die Definition der „Potenz zweier Kreise" als Verallgemeinerung der Steiner'schen Potenz einer Geraden und eines Kreises rührt von Darboux her, jedoch ist die Definition ein wenig abgeändert, um den Fall mit einzuschliessen, in welchem einer der Kreise (oder beide) eine Gerade wird. Für zwei Kreise ist die Potenz das Quadrat der Abstände beider Mittelpunkte, vermindert um die Summe der Quadrate der Radien, und das grundlegende Theorem ist:

$$\Pi\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10\end{pmatrix} = 0,$$

d. h. man betrachte irgend zwei Zusammenstellungen von Kreisen, bezw. 1, 2, 3, 4, 5 und 6, 7, 8, 9, 10; dann ist die aus den Potenzen 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10; 2.6, 2.7, ...; 5.6, 5.7, ..., 5.10 gebildete Determinante gleich Null. Im zweiten Capitel wird die Definition erweitert, so dass sie sich auf gewisse Systeme von Kegelschnitten anwenden lässt. Dies wird praktisch aus der Abhandlung Casey's „On bicircular quartics" (Dublin Trans. 1867) benutzt. In Capitel III wird das allgemeine Theorem für mehrere interessante Kreissysteme specialisirt. Capitel IV erörtert die Aufgabe, einen Kreis zu construiren, der drei gegebene Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet, und die Kreise, welche mit dem aus drei Kreisen gebildeten Dreiecke zusammenhängen und dem Umkreise, dem Inkreise, den Ankreisen, dem Feuerbach'schen Kreise eines geradlinigen Dreiecks entsprechen, werden besprochen. Im fünften Capitel werden die Potenz-Coordinaten eines Punktes oder Kreises definirt und die Gleichungen von Kreisen etc. erledigt. Es

zeigt sich, dass zwei einfache Bezugs-Systeme von Coordinaten bestehen, eins aus vier Orthogonalkreisen (schon von Clifford erwähnt, den fünf Orthogonalkugeln von Casey und Darboux entsprechend), das andere aus zwei Orthogonalkreisen und ihren beiden Schnittpunkten gebildet (von H. Cox, Quart. J. XVIII. 74-121, F. d. M. XIV. 1882. 588) angegeben. Im Capitel VI wird die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Potenz-Coordinaten discutirt, es folgt in Capitel VII die Anwendung auf die Klassification der bicircularen biquadratischen Curven. Diese Theorie wird in Capitel VIII weiter entwickelt.

Im zweiten Teile werden fast alle im ersten Teile gewonnenen Ergebnisse, gelegentlich mit unbedeutenden Abänderungen, auf den Fall der Kleinkreise auf einer Kugel und der sphärischen Kegelschnitte ausgedehnt.

Im dritten Teile wird dieselbe Folge wie im ersten festgehalten. Die meisten Ergebnisse des dritten Capitels in jenem werden auf die analogen Kugelsysteme ausgedehnt. Obgleich sich indessen zeigt, dass eine Gruppe von Kugeln vorhanden ist, welche der Umkugel eines Tetraeders entspricht, und obgleich mehrere analoge Theoreme für die Inkugel und die Ankugeln correspondiren, so ist doch nichts dem Feuerbach'schen Satze analog. Capitel IV entspricht genau jenem Capitel in Teil I, und im Capitel V wird gezeigt, dass die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Potenz-Coordinaten eine Cyklide darstellt. Die Zurückführung derselben jedoch auf ihre einfachste Gestalt bietet einige Schwierigkeiten. Capitel VI bringt eine kurze Klassification der Cykliden in der Ordnung, wie sie bei der Discussion der allgemeinen Gleichung vorkommen. Endlich im Capitel VII werden einige zerstreute Sätze durchgenommen, wie z. B. die Bestimmung für den Ort der Mittelpunkte der doppelt berührenden Kugeln, d. h. die Focal-Kegelschnitte.

Cly. (Lp.)

T. R. Terry, R. Lachlan. Solution of question 7987. Ed. Times. XLIV. 51-52.

Von vier Kugeln mit den Radien a, b, c, d berührt jede

die drei anderen von aussen; eine fünfte mit dem Radius r berührt alle vier von aussen; dann ist

$$\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r}\Sigma\frac{1}{a} + \Sigma\frac{1}{a^2} - \Sigma\frac{1}{ab} = 0.$$

Lp.

E. Fauquembergue. Détermination du nombre maximum de sphères égales qui peuvent toucher à la fois une autre sphère de même rayon. Mathesis. VI. 124-125.

S. Günther. Versuch einer schulmässigen Behandlung der Lehre von den Kreisen des sphärischen Dreiecks. Hoffmann Z. XVII. 241-249.

Es werden die wichtigsten Eigenschaften des Umkreises und der Berührungskreise eines Kugeldreiecks elementar-analytisch abgeleitet und dabei durch Grenzbetrachtungen der Zusammenhang der stereometrischen mit den planimetrischen Formeln hergestellt. So liefert z. B. der Ausdruck für $\sin r$ im Raum den bekannten planimetrischen Satz $abc = 4r\Delta$, derjenige für $\operatorname{tang}\varrho$ den andern $\varrho\left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right) = a\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}$ u. s. w.

Lg.

G. Loria. Intorno ad alcune relazioni fra distanze. Besso Per. I. 33-43.

Elementarer Beweis für die Relationen zwischen vier Punkten einer Ebene oder Kugelfläche und zwischen fünf Punkten des Raumes; es folgen einige ganz einfache Anwendungen.

La. (Lp.)

C. Spitz. Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie nebst vielen Beispielen über deren Anwendung zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Dritte Aufl. Leipzig. C. F. Winter'sche Verlagsh. VIII. 175 S.

Die erste Auflage dieses Lehrbuches erschien 1865, die zweite 1875. Es zerfällt in fünf Abschnitte. I. Von den Gebilden auf der Kugelfläche im allgemeinen. II. Von den Eigenschaften der sphärischen Dreiecke und Vielecke. III. Entwickelung der Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreiecks. (A. zwischen vier, B. zwischen fünf, C. zwischen sechs Elementen). IV. Vom Flächeninhalte der sphärischen Dreiecke. V. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Auflösung verschiedener Aufgaben; S. 95 bis 175, also fast die Hälfte des Buches. Die vorliegende dritte Auflage ist nach Angabe des Verfassers mit geringen Ausnahmen ein reiner Abdruck der zweiten Auflage. Durch Benutzung neuerer Werke (z. B. Baltzer, Spieker) würde sich die Darstellung oft haben vereinfachen lassen, so u. a. die Berechnung des Inhaltes etc. Lp.

M. Jenkins. Note on the sine-equation in spherical trigonometry. Mess. XVI. 37-39.

Die Sinus-Regel $\sin A:\sin a = \sin B:\sin b = \sin C:\sin c$ ist mit einem Mangel behaftet, von welchem der Cosinussatz $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ frei ist, nämlich dass sich aus ihr Stücke zwischen 0 und π finden lassen, welche nicht mit Notwendigkeit ein eigentliches sphärisches Dreieck bilden können. Der Verfasser findet, dass diesem Mangel durch die Anwendung folgender Regel, die er beweist, abgeholfen wird: In jedem sphärischen Dreiecke sind jede Seite und ihr Gegenwinkel entweder von derselben Art oder im Werte näher an $\frac{1}{2}\pi$ als die übrigen Seiten und übrigen Winkel des Dreiecks.

Glr. (Lp.)

R. Badia. Del circolo circoscritto ed inscritto e dei circoli ex-inscritti in un triangolo sferico. Besso Per. I. 46-50.

Anwendungen der Elemente der sphärischen Trigonometrie zum Beweise einiger Beziehungen zwischen den trigonometrischen Tangenten der Radien der im Titel angegebenen Kreise.

La.

W. J. Mc Clelland. Solution of question 7977. Ed. Times XLIV. 112-113.

Um ein sphärisches Dreieck aus den drei Höhen p, q, r zu berechnen, setzt der Verfasser

$$\sin a \sin p = \sin b \sin q = \sin c \cdot \sin r = 2n.$$

Zur Auffindung von n dienen die Formeln:

$$P = \{(\operatorname{cosec} p + \operatorname{cosec} q + \operatorname{cosec} r)^2 - 1\}^{\frac{1}{2}},$$
$$Q = \{(-\operatorname{cosec} p + \operatorname{cosec} q + \operatorname{cosec} r)^2 - 1\}^{\frac{1}{2}},$$
$$R = \{(\operatorname{cosec} p - \operatorname{cosec} q + \operatorname{cosec} r)^2 - 1\}^{\frac{1}{2}},$$
$$S = \{(\operatorname{cosec} p + \operatorname{cosec} q - \operatorname{cosec} r)^2 - 1\}^{\frac{1}{2}}.$$

Danach folgt

$$\frac{16}{n^2} = (P+Q+R+S)(P+Q-R-S)(P-Q+R-S)(P-Q-R+S).$$

Lp.

A. v. Oppenheim. Die sphärische Trigonometrie und analytische Geometrie in dem für die kön. kais. Kriegsschule vorgeschriebenem Umfange. Wien. Seidel & Sohn.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

A. Sumni. Teoria generale delle rappresentazioni prospettiche e dei metodi di descrizione grafica dello spazio a tre dimensioni. Saggio di geometria descrittiva teorico-pratica. Milano. Tip. degli Ingegneri. (Estratto dal Periodico „Il Politecnico", Ottobre-Novembre 1886). 36 S. u. 9 lith. Taf.

Die Arbeit bezweckt eine systematische Darlegung der verschiedenen in der darstellenden Geometrie benutzten Verfahrungsarten. Den Ausgangspunkt liefert die Bemerkung, dass sehr viele der von dieser Wissenschaft gestellten Aufgaben sich wie folgt fassen lassen: Es seien (explicit oder auch nicht) die Pro-

jectionen eines räumlichen Gebildes von zwei bestimmten Centren aus auf zwei gegebene Ebenen gemacht; seine Projection aus einem gegebenen Punkte auf eine dritte gegebene Ebene zu finden. Das erste Capitel des Aufsatzes enthält einige allgemeine Bemerkungen über die Lösung dieser Aufgabe und ihre Anwendungen auf die folgenden besonderen Fälle, denen man am häufigsten in der Praxis begegnet:

I. Wenn zwei Parallel-Projectionen gegeben sind, eine Central-Projection zu finden (Aufgabe der Linear-Perspective), oder eine neue Orthogonal-Projection (Aufgabe der Axonometrie), oder endlich eine schiefe Projection (schiefe Perspective).

II. Wenn zwei Perspectiven gegeben sind, daraus eine dritte zu bestimmen, oder auch eine Orthogonal-Projection zu finden (Aufgabe der Photogrammetrie nach Hrn. Hauck).

Diese Andeutungen werden genügen, um zu zeigen, wie viele Berührungspunkte das Thema dieses Teiles der Arbeit von Hrn. Suini mit den drei Jahre vorher von Hrn. Hauck veröffentlichten Untersuchungen hat (Kronecker J. XCV, F. d. M. XV. 1883. 501). Wir wollen nicht dabei verweilen, dass wir sie alle aufzählen, sondern nur bemerken, dass die von Hrn. Hauck systematisch angewandte trilineare Beziehung zwischen drei Ebenen seine Darstellung eleganter und in wissenschaftlicher Beziehung interessanter macht.

Im ersten Capitel hat Hr. Suini angenommen, dass die beiden zur Bestimmung des räumlichen Gebildes geeigneten Projectionen auf zwei beliebige Ebenen gemacht sind. Aber am Anfange des zweiten bemerkt er, dass man in der Praxis nur eine einzige Ebene hat. Setzt man daher voraus, dass die beiden Projectionen nicht aus zwei verschiedenen Centren auf dieselbe Ebene gemacht sind, so muss entweder eine der beiden Projectionen ihrerseits auf die Ebene der anderen, oder allgemeiner müssen alle beide auf eine neue Ebene projicirt werden. Aus den verschiedenen Arten der Ausführung dieser Hülfsconstruction entspringen die verschiedenen bekannten Methoden des geometrischen Zeichnens. Folgendes sind die gebräuchlichsten:

I. Monge'sche Methode: Orthogonal-Projectionen auf zwei senkrechte Ebenen und Niederschlagen der einen von ihnen auf die andere.

II. Verallgemeinerte Monge'sche Methode: Projectionen auf zwei schiefwinklige Ebenen, parallel zu den Linien des senkrechten Querschnitts.

III. Axonometrische Methode: Orthogonal-Projection auf eine beliebige Ebene des Raumes aus den beiden Monge'schen Projectionen.

IV. Perspective nebst Ikonographie: Central-Projection eines Gebildes und einer seiner Orthogonal-Projectionen auf dieselbe Ebene.

V. Schiefe Projection nebst Ikonographie: Parallel-Projection eines Gebildes und einer seiner Orthogonalprojectionen auf dieselbe Ebene.

VI. Orthogonal-Projection und geometrischer Schatten. Orthogonal- und Parallel-Projection eines Gebildes auf dieselbe Ebene.

Im dritten Capitel handelt der Verfasser von den Projectionen, welche man „unica" genannt hat (eine solche ist die Central-Projection, welche Hr. Fiedler gründlich untersucht hat), und zeigt sehr leicht, dass sie in Wahrheit doppelte Projectionen sind, deren Theorie aus derjenigen der allgemeinen, früher besprochenen Methoden abgeleitet wird. Im letzten Capitel macht er einige sehr einfache Bemerkungen über die Anwendungen der vorangehenden Betrachtungen auf die Schattenconstructionen.

La. (Lp.)

A. Mannheim. Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de la géométrie cinématique. 2[e] édition. Paris. Gauthier-Villars.

K. Pelz. Beiträge zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. Prag. Ber. 1885. 648-661.

Der Aufsatz behandelt im Anschluss an des Verfassers frühere Mitteilungen „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie“ (Wien. Ber.) verschiedene auf die Kugel bezügliche Aufgaben in orthogonal-axonometrischer Projection. Es wird zuerst die Schlagschattencurve ins Innere einer hohlen Halbkugel construirt unter besonderer Ermittelung der Tangenten in den Randpunkten und der Axen der Projectionsellipse. Hierauf folgt die Bestimmung des Schlagschattens einer Vollkugel auf eine Coordinatenebene und auf eine beliebige Ebene, mit sehr hübschem Satz über die Axen der Projectionsellipse. Eine Schlussbetrachtung handelt über die Bestimmung der Axenlängen eines Kegelschnittes unter verschiedenen Voraussetzungen. Hk.

J. MANDL. Der Pohlke'sche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben. Wien. Ber. XCIV. 60-65.

Es wird zunächst die Construction der Contour der schiefen Projection eines Ellipsoids aus den (beliebig gewählten) schiefen Projectionen oa, ob, oc von drei conjugirten Radien desselben durchgeführt. Diese Contour kann nun auch als schiefe Projection einer Kugel angesehen werden, für welche oa, ob, oc die schiefen Projectionen dreier zu einander senkrechten Radien sind. Nachdem so der Pohlke'sche Lehrsatz bewiesen ist, folgt dessen Verallgemeinerung für ein schiefwinkliges Axenkreuz mit ungleichen Axenlängen. Hk.

G. HOLZMÜLLER. Der Gauss'sche Fundamentalsatz der orthographischen Axonometrie. Hoffmann Z. XVII. 492-498.

Für den im zweiten Teile der Gauss'schen Werke S. 309 sich findenden Satz: „Sind die complexen Werte der orthographischen Projection von drei gleich langen und unter einander senkrechten Graden a, b, c, so ist $aa+bb+cc=0$“ wird ein

Beweis gegeben, der nur die ersten Elemente der darstellenden Geometrie und der Streckentheorie beansprucht. Die Vorbegriffe der Streckentheorie werden vorausgeschickt, die nötigen Operationen der darstellenden Geometrie ausführlich beschrieben und dann mit Hülfe des bewiesenen Satzes einige Fundamentalaufgaben der Axonometrie einfach gelöst, z. B.: Von der orthographischen Projectionszeichnung eines Würfels seien die Kanten *OA* und *OB* nach Länge und Richtung gegeben; die Würfelzeichnung soll vollendet werden. Lg.

G. Hauck. Ueber die Definition der Perspective. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Zeichenlehrer XIII. No. 33. 494-498.

Der Artikel ist eine Erwiderung auf einen Aufsatz des Herrn Gehler, der in Heft 31 u. 32 derselben Zeitschrift erschienen war. Dort war Herrn Hauck der Vorwurf gemacht, dass er durch seine Aufsätze über „Subjective Perspective“ auf dem interessanten, einer wissenschaftlichen Behandlung voll und ganz fähigen Gebiete der Perspective alle Logik aus dem Felde geschlagen hätte. Der auf dem Gebiete der darstellenden Geometrie hoch angesehene Verfasser hatte seine Gedanken über die subjective Perspective schon in den Jahren 1879 ausgesprochen und dann den Gegenstand in mehreren Aufsätzen weiter behandelt, namentlich in seinem Buche: „Die malerische Perspective, ihre Praxis, Begründung und ästhetische Wirkung (Berlin 1882).“ Die Quintessenz der subjectiven Perspective besteht in den folgenden, auf den physiologischen Gesetzen des Sehens beruhenden drei Hauptsätzen: 1) Die scheinbare Grösse eines Gegenstandes steht in umgekehrtem Verhältnis zu seiner Entfernung vom Auge. 2) Jede gerade Linie des betrachteten Gegenstandes erscheint dem Auge wieder als gerade Linie. 3) Tritt ein Conflict zwischen Satz 1 und Satz 2 ein (wie z. B. bei einer frontal gestellten Säulenreihe mit aufgelegtem horizontalen Balken, wo gemäss Satz 1 die dem Auge näheren Mittelsäulen grösser erscheinen als die entfernteren Ecksäulen rechts und links und demgemäss der aufgelegte Balken gebogen er-

scheinen müsste), so findet im allgemeinen ein Ausgleich zu Gunsten von Satz 2, also im Sinne eines geradlinigen Sehens statt. Scht.

C. Chizzoni. Corso completo di prospettiva lineare conforme ai programmi degli Istituti di belle arti. Con 152 silografie intercalate nel testo. Milano. Hoepli. X u. 232 S.

Wie der Titel es anzeigt, wendet sich dieses Lehrbuch der Perspective besonders an die Künstler. Doch hat der Verfasser nicht die durchweg praktische, von manchen Schriftstellern beliebte Methode befolgen wollen, und ohne auch das streng theoretische Verfahren anderer Autoren zu wählen, hat er mit glücklichem Erfolge ein Buch verfasst, welches den Künstlern eine rationelle Lösung von Aufgaben aus der Perspective ermöglicht, welche ihnen vorkommen können. Da wir hier uns auf eine ausführliche Besprechung eines Buches von dieser Gattung nicht einlassen können und doch eine Vorstellung von dem in ihm enthaltenen Stoffe geben möchten, so wollen wir die Titel der Abschnitte, in welche es eingeteilt ist, abdrucken.

Einleitung. Teil I. Perspective auf einer Verticalebene (Gemälde). II. Perspective von oben nach unten und umgekehrt. III. Perspective der in ebenen Spiegeln reflectirten Körper. IV. Untersuchung der Schatten. V. Zeichnen nach der Natur. VI. Umgekehrte Aufgabe zu derjenigen von der Perspective.

Wir wollen diese kurze Anzeige nicht schliessen, ohne Hrn. Hoepli unsere besondere Anerkennung für die schöne Ausstattung des Chizzoni'schen Buches auszusprechen, durch welche die Verbreitung unter den Künstlern wahrscheinlich erscheint.

La. (Lp.)

G. Schreiber. Lehrbuch der Perspective. 3. Aufl. Leipzig. Öhmigke. XXII u. 212 S.

Die 3. Aufl. dieses beliebten, die malerische Seite der Per-

spective besonders hervorhebenden Lehrbuches ist ein unveränderter Abdruck der 1874 erschienenen 2. Aufl. Hk.

FAUSER. Grundzüge der freien geometrischen Perspective. Progr. d. K. Realgymn. Stuttgart.

Nachdem zunächst die Principien der „freien Perspective" hinsichtlich der Darstellung und Bestimmung von geraden Linien und Ebenen in allgemeinster Form unter besonderer Berücksichtigung specieller Lagen klargestellt sind und die allgemeine Theorie der Teilungspunkte behandelt ist, folgt die Besprechung der auf metrische und situelle Raumconstructionen bezüglichen Fundamentalaufgaben. Diesen schliessen sich angewandte Aufgaben an, die sich auf die Abbildung von Prisma, Pyramide, Kreis, Schraubenlinie, Umdrehungskörper und zwar in beliebiger Stellung im Raum beziehen. Im Druck hat sich eine grössere Zahl sinnstörender Fehler eingeschlichen, welche vom Verfasser durch Versendung eines hektographirten Correcturblattes teilweise berichtigt worden sind. Hk.

M. PELIŠEK. Ueber eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation. Prag. Ber. 302-314.

Die Theorie der dioptrischen Bilder wird auf Grund der Listing'schen Construction in bekannter Weise (vgl. z. B. H. Hankel, Elemente der projectiv. Geom.) geometrisch dargestellt, indem die Bilder von Punkten, Geraden und Ebenen construirt und die Eigenschaften der Collineationsverwandtschaft zwischen Object und Bild discutirt werden. Hk.

M. PELIŠEK. Untersuchungen der Wirkungen perspectivischer Darstellungen. Prag. Ber. 360-390.

Ein Versuch, die perspectivischen Randverzerrungen und was damit in Zusammenhang steht, dadurch zu erklären, dass die Beziehung zwischen Object und Linsenbild keine streng geome-

trische Raumcollineation ist, sondern von derselben mit zunehmender Entfernung von der Axe mehr und mehr abweicht, und dass demzufolge die Netzhautbilder nicht genau übereinstimmen mit geometrisch-perspectivischen Bildern. Das Auge wird als photographische Camera aufgefasst, für deren empfindliche Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung — wenn auch nicht gleiche, so doch — genügende Perceptionsfähigkeit stillschweigend angenommen wird. Referent kann dem Erklärungsversuch, bei welchem wesentliche Momente des Sehprocesses ausser Acht gelassen werden, nicht zustimmen. Dass seine eigenen diesbezüglichen Untersuchungen (s. z. B. „die malerische Perspective" Berlin 1882) sowie die durch dieselben hervorgerufene Discussion dem Verfasser unbekannt geblieben sind, bedauert er um so mehr, als der Aufsatz manche treffende Einzelausführung enthält, die den Anschauungen des Referenten nahe kommen. Hk.

M. Pelíšek. Ueber perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung. Prag. Ber. 290-298.

Verfasser erklärt de la Gournerie's Art, ein räumliches Object aus dessen perspectivischem Bild von excentrischem Standpunkt aus zu restituiren für „falsch" und spricht sich für die Restitution durch das mit dem Original affine System aus. Die bezüglichen Ausführungen des Herrn Wiener (Darst. Geom. I. § 561 u. f.) sowie des Referenten (Schlömilch Z. XXVII. 236) scheinen dem Verfasser entgangen zu sein. Hk.

M. Pelíšek. Grundzüge der Reliefperspective. Prag. Ber. 434-450.

Der Aufsatz giebt einen kurzen und verständigen Abriss der Reliefperspective. Dieselbe wird definirt durch die Bedingungen der Collinearität und Centrität und bestimmt durch das Centrum nebst vier Paaren entsprechender Punkte. Unter dieser Voraussetzung werden zunächst die wichtigsten Sätze der centrischen Collineation abgeleitet; hierauf werden die Fundamentalaufgaben

sowohl durch Rechnung als durch Construction in orthogonalen Projectionen gelöst. Hk.

O. Löwe. Ausgewählte Capitel aus der darstellenden Geometrie zum Gebrauch bei Constructionsübungen. Heft I. Durchdringungen unregelmässiger Polyeder. 2. Aufl. Clausthal. Brauns. 20 S.

Das Heft giebt auf neun Tafeln mit Text Beispiele der Durchdringung von Prismen und Pyramiden in Grund- und Aufriss, ohne irgendwie Neues zu bieten. Der Satz mit sämtlichen Druckfehlern und typographischen Mängeln ist identisch mit der 1880 erschienenen ersten Auflage. Hk.

F. Kommerell. Aufgaben aus der descriptiven Geometrie. Zusammengestellt von H. Böcklen. Tübingen. Fues. VI u. 32 S.

Die zuerst im Tübinger Gymnasialprogramm 1869 von Kommerell veröffentlichten Uebungsaufgaben aus der descriptiven Geometrie sind in neuer Auflage vom Herausgeber nach bestimmten Rubriken (gerade Linien und Ebenen — Dreikant — Polyeder — Kugel — Kegel und Cylinder — Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid — Schraubenlinie und Wulst) geordnet und mit Auflösungen oder Andeutungen hierzu unter teilweiser Benutzung der Kommerell'schen Lösungen versehen worden. Vorangestellt ist eine Einleitung mit den notwendigsten Hülfssätzen und Vorbereitungsaufgaben. Hk.

G. Holzmüller. Einführung in das stereometrische Zeichnen. Leipzig. Teubner 102 S.

Der Zweck des Buches ist, für das stereometrische Zeichnen eine Auswahl von Uebungsaufgaben zu geben, die sich auch ohne die breiteren Grundlagen der darstellenden Geometrie bewältigen lassen möchten. Es handelt sich demgemäss weder um

eine systematische Einleitung in die darstellende Geometrie, noch wollen die eingestreuten mathematischen Erläuterungen als strenge Beweise gelten. Als Darstellungsmittel ist die Cavalierperspective (im weiteren Sinn) und die Projection in Grund- und Aufriss gewählt. Anhangsweise erfährt die Centralprojection eine kurze Besprechung. Die Constructionen beziehen sich auf die regulären Polyeder, die Formen des regulären Krystallsystems, Durchdringung zweier Prismen in specieller Lage, Kreis, Rotations-Cylinder und -Kegel (mit Rechtecksteilung und Spiralnetz), Kugel (mit kartographischen Aufgaben), Kegelschnitte, Wulst, Flächen zweiter Ordnung. Hk.

J. Kajetan. Technisches Zeichnen für das Kunstgewerbe. I. Das geometrische Zeichnen. Wien. Graeser. 59 S.

Das zur Unterstützung des bezüglichen Vortrages an der Vorbereitungsschule der K. K. Kunstgewerbeschule in Wien geplante Werk giebt in seinem I. Heft die Fundamental-Sätze und -Constructionen der Planimetrie (einschliessl. Ellipse, Parabel, Kreisbogenovale, jonische Schnecke u. s. w.) ohne Beweise, in einer für die Bedürfnisse des constructiven Zeichnens praktischen Form, mit Andeutungen über die Verwertung der einzelnen Constructionen zu Zeichenübungen mit Beziehung auf Motive des kunstgewerblichen Fachzeichnens. Hk.

J. Böhm. Die zeichnende Geometrie. 3. Aufl. Nürnberg. Korn.

Das Büchlein ist für den propädeutischen Unterricht in der geometrischen Formenlehre an Präparandenschulen und Handwerkszeichenschulen bestimmt und erstreckt sich auf die planimetrischen Fundamentalconstructionen, reguläre Vielecke, Massstäbe, Kreisbogenlinien, Ellipse, architektonische Elementarformen. Hk.

P. Cassani. La projezione stereoscopica. Ven. Ist. Atti (6) III. 1835-1848. 1885.

Sind die relativen Lagen zweier Augpunkte O_1 und O_2 zur Bildebene gegeben, so ist die Lage eines Punktes oder einer Geraden im Raum bestimmt durch die beiden Centralprojectionen von O_1 und O_2 aus; eine Ebene ist bestimmt durch ihre Bildspur und die zwei Projectionen eines in ihr liegenden Punktes. Unter Voraussetzung dieser Bestimmungsweise werden die stereometrischen Fundamentalconstructionen mit Punkten, Geraden und Ebenen descriptiv ausgeführt. Die im ersten Abschnitt behandelten situellen Constructionen, zu welchen nur die Kenntnis der Bildspur Ω von $O_1 O_2$ erforderlich ist, gestalten sich sehr einfach und fruchtbar für projectivische Beziehungen. Die im zweiten Abschnitt behandelten metrischen Aufgaben werden in ihrer descriptiven Lösung ziemlich umständlich. Zur Vereinfachung wird $O_1 O_2$ senkrecht zur Bildebene angenommen, und wird die Lage der Augpunkte bestimmt durch Punkt Ω und die zwei Augdistanzen ΩO_1 und ΩO_2. Die beigegebenen Figuren stimmen mehrfach nicht zum Text. Doch ist dieser auch ohne Figuren leicht verständlich. Verfasser, welcher die Urheberschaft der Methode dem verstorbenen General Giorgio Manin zuschreibt, findet die Bedeutung derselben weniger auf praktischem als auf pädagogischem Gebiete. Hk.

C. Rodenberg. Ableitung der Polareigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten auf darstellend-geometrischem Wege. Klein. Ann. XXVI. 557-565.

Die Abhandlung lehrt die constructive Festlegung der Polarenflächen zu einer gegebenen Grundfläche in einem Raume von beliebiger Ausdehnung. Die Polarendefinition für den 2-dimensionalen Raum E wird zunächst wie folgt gegeben: Zieht man durch den Pol P eine Gerade im 3-dimensionalen Raum und legt aus zweien ihrer Punkte die Projectionskegel an die gegebene Grundcurve C^n, so durchsetzen sich diese in einer 3-dimensionalen Curve C^{nn}, welche in die C^n und eine Restcurve $C^{n(n-1)}$ zerfällt. Die letztere schneidet E in $n(n-1)$ Punkten, welche die Be-

rührungspunkte der von P an C^n gelegten Tangenten vorstellen. Unter allen Flächen des von den zwei Projectionskegeln gebildeten Büschels zerfällt eine in die Ebene E und eine Restfläche $(n-1)^{ter}$ Ordnung, welche E in einer Curve P^{n-1} schneidet. Dieselbe geht durch die $n(n-1)$ Berührungspunkte und stellt die erste Polare von P in Bezug auf C^n vor. Durch wiederholte Anwendung derselben Definition erhält man die ganze Polarenreihe. Dieses Verfahren lässt sich nun leicht auf eine $(p-1)$-dimensionale Fläche im p-dimensionalen Raum übertragen. Es wird dann gezeigt, dass der Schnitt einer Polare mit einem den Pol enthaltenden ebenen Raum von weniger Dimensionen auch Polare des ebenen Schnittes der Grundfläche ist. Nachdem ferner nachgewiesen ist, dass in hinreichend ausgedehnten Räumen jede Polare durch eine gewisse Curve, bezw. Punktgruppe, die sie mit der Grundfläche gemein hat, vollkommen definirt ist, folgt der Beweis für die allgemeine Giltigkeit der polaren Reciprocitätsbeziehung: dass, wenn die r^{te} Polare eines Punktes P durch einen Punkt Q geht, auch die $(n-r)^{te}$ Polare von Q durch P geht. Hk.

C. Cranz. Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Curven und Flächen 2. O. Stuttgart. Metzler. VIII u. 90 S.

Die Schrift bezweckt, mit der synthetischen Darstellung der Krümmungsverhältnisse von Curven und Flächen 2. O. eine Ergänzung zu den bekannten grösseren Lehrbüchern der projectivischen Geometrie zu geben. Ausgehend von der Collineation zwischen einem Kegelschnitt und seinem Krümmungskreis in einem Punkt gelangt Verfasser zum Steiner'schen und Pelz'schen Satz und entwickelt die wichtigsten und einfachsten Constructionen des Krümmungsmittelpunktes. Die gewonnenen Resultate werden dann im 2. Teil verwertet zur synthetischen Ableitung des Meusnier'schen und Euler'schen Satzes für eine Fläche 2. O.; woran sich eine Uebersicht über die Krümmungsverhältnisse der einzelnen Typen dieser Flächen schliesst. Den Schluss bildet

die Vorführung der Nabelpunkte in ihrer Beziehung zu den Focalkegelschnitten, unter Beschränkung auf die blosse Zusammenstellung der Resultate. Hk.

H. Picquet. Construction des points doubles de la projection de la courbe d'intersection de deux cônes ou cylindres du second degré. Considérations sur le théorème de Desargues. Nouv. Ann. (3) V. 163-168.

H. Picquet. Rectification. Nouv. Ann. (3) V. 284-286.

Die im ersten Aufsatze vorgetragene Construction stimmt, wie Verfasser im zweiten Aufsatz selbst anerkennt, im wesentlichen überein mit der von Lefèvre gegebenen (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 521). Sie beruht auf dem Satze, dass ein Kegelschnittbüschel von einer Geraden nach einer Involution geschnitten wird. Die Bedeutung dieses Satzes wird im Anschluss erörtert. Der zweite Aufsatz giebt noch eine Verallgemeinerung der Construction. Hk.

A. Larmor. On the geometrical theory of perspective. Quart. J. XXI. 339-366.

Verfasser bezeichnet Figuren, die man sonst centrisch-collinear nennt, als in „completer Perspective" befindlich. Nachdem zunächst einiges über die verwandtschaftlichen Beziehungen solcher Figuren beigebracht ist, werden Kegelschnittseigenschaften in bekannter Weise aus Kreiseigenschaften abgeleitet, indem das Collineationscentrum in den Kreismittelpunkt und auf die Kreisperipherie verlegt wird. Erst nach Vollendung seiner Arbeit ist Verfasser gewahr geworden, dass Poncelet (Propr. proj.) „had travelled over similar ground". Schliesslich werden die gewonnenen Sätze auf den Raum übertragen, wobei namentlich die Beziehungen zwischen den acht Kreisen, die auf einer Kugel drei gegebene Kreise berühren, mit collinearer Verallgemeinerung für eine Fläche 2. Ordnung und nachheriger Degeneration zu doppelt berührenden Kegelschnitten zur Erörterung kommen. Hk.

J. VÁLYI. Zur Lehre vom perspectiven Tetraëder. Hoppe Arch. (2) III. 441-445.

Es wird zunächst bewiesen, dass zwei Tetraeder, deren Elemente einander paarweise zugeordnet sind, perspectivisch liegen, wenn je zwei entsprechende Kanten sich schneiden, ausgenommen den Fall, wo beide Tetraeder eine Seite und die gegenüberliegende Ecke gemeinsam haben. Weiter werden die Bedingungen festgestellt, unter welchen zwei Tetraeder sich in mehrfacher (zweifacher und vierfacher) perspectiver Lage befinden, je nachdem das paarweise Entsprechen der Eckpunkte verschieden angeordnet wird. Hk.

ED. DEWULF. Étude sur les surfaces gauches. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 189-200.

Errichtet man auf einer Mantellinie einer windschiefen Regelfläche in ihrem Centralpunkt c eine Senkrechte cp gleich dem zugehörigen Parameter, so erscheint, vom Endpunkt p aus gesehen, die Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten μ und μ' der Mantellinie unter einem Winkel gleich dem von den Tangentialebenen in μ und μ' gebildeten. Ein solcher Punkt p wird daher vom Verfasser „centre perspectif" (von Mannheim: „point représentatif") genannt. Hievon ausgehend, entwickelt Verfasser zunächst die Fundamentalsätze über windschiefe Flächenelemente, betrachtet dann die Eigenschaften der centres perspectifs bei zwei windschiefen Regelflächen mit gemeinsamer Mantellinie, ferner bei einem System von Regelflächen, die eine Mantellinie gemeinsam haben und sich in den nämlichen zwei Punkten derselben berühren, und schliesst mit der Anwendung auf das System von Normalenflächen für Leitcurven, die durch den nämlichen Punkt der Leitfläche gehen. Hk.

A. MANNHEIM. Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée etc. Jordan J. (4) II. 5-48.

Bericht in Abschnitt VIII, Cap. 5, C.

Neu. Nouvelle construction de la courbe d'ombre propre d'une surface de révolution et de la tangente en un point quelconque de cette courbe. S. M. F. Bull. XIV. 103-106.

Die vorgetragene einfache Construction eines auf beliebigem Parallelkreis liegenden Punktes der Eigenschattencurve beruht auf folgendem Gedanken: Dreht man den durch den Curvenpunkt *m* gehenden Meridian in die Lage des Hauptmeridians und dreht gleichzeitig den Lichtstrahl um den nämlichen Drehungswinkel, so ist seine Verticalprojection in der neuen Lage parallel der Hauptmeridiantangente in *m*. (Bei Centralbeleuchtung fällt der gedrehte leuchtende Punkt in die Hauptmeridiantangente.) Da letztere bekannt ist, so ist auch die gedrehte Lage des Lichtstrahls (bezw. leuchtenden Punktes) und damit die Grösse des Drehungswinkels bekannt. Hk.

H. Picquet. Note sur le conoïde de Plücker. S. M. F. Bull XIV. 68-76.

Darstellung des Plücker'schen Conoids („Cylindroids" der Kinematik) in Grund- und Aufriss, nebst Construction der Tangentialebene in einem Punkt, sowie der Wendeschattencurve für Centralbeleuchtung. Hk.

A. R. Forsyth. Note on a quasi-stereographic-projection due to Gauss. Quart. J. XXI. 376-384.

Der Aufsatz erörtert unter Anlehnung an die Gauss'sche Abhandlung über conforme Abbildung einige Fragen betreffend die praktische Verwendung der Gauss'schen (richtiger Lambert'schen) conformen Kegelprojection. In derselben stellen sich bekanntlich die Meridiane als Strahlen eines Strahlenbüschels dar, deren Winkel das λfache ($\lambda < 1$) der entsprechenden Meridianwinkel betragen; die Parallelkreise bilden sich als concentrische Kreise um das Centrum des Strahlenbüschels ab. Die lineare

Vergrösserung ist längs eines und desselben Parallelkreises constant und nimmt vom Pol aus stetig ab, bis sie ein Minimum erreicht in einem gewissen Parallelkreis, von wo aus sie wieder zunimmt. Die Lage des Minimums-Parallelkreises hängt von dem Werte der Constanten λ ab. λ wird nun (mit verschiedenen Modificationen) stets so gewählt, dass der Minimums-Parallelkreis in die mittlere Partie der Karte fällt. Verfasser, dem sowohl die bezügliche Abhandlung von Lambert („Beiträge" III, 1772) als die späteren einschlägigen Arbeiten (z. B. das Petersburger Kartenwerk von 1862) unbekannt geblieben zu sein scheinen, nimmt an, λ werde so bestimmt, dass die Vergrösserungen in den beiden äussersten Parallelkreisen der Karte gleichen Wert haben, und stellt nun die Frage, ob es möglich ist, dass der Minimums-Parallelkreis genau in die Mitte zwischen die zwei äussersten Parallelkreise 1) auf dem Erdsphäroid selbst — 2) in der Abbildung fällt. Beide Fragen sind, wie vorauszusehen, zu verneinen. Doch sind in einiger Entfernung vom Pol die Abweichungen von der Mitte nicht bedeutend. Hk.

M. Websky. Ueber Constructionen flacher Zonenbogen beim Gebrauch der stereographischen Kugel-Projection. Berl. Ber. 33-38.

Bei stereographischen Constructionen werden häufig die Kreisbogen zu flach, um mit dem Zirkel gezeichnet werden zu können. Man ist dann genötigt, den geforderten Bogen durch Verbinden einer genügenden Anzahl von Punkten, die nach berechneten Coordinaten aufgetragen werden, herzustellen. Die bezügliche rechnerische Aufgabe behandelt Verfasser für folgende drei Fälle: 1) Grosskreis, von dem ein im Tafelkreis liegender Durchmesser und ein Punkt gegeben ist; 2) Grosskreis, von dem zwei nicht diametral liegende Punkte gegeben sind; 3) Kleinkreis, dessen Pol und sphärischer Halbmesser gegeben ist. Alle drei Aufgaben sind bereits von Reusch (s. dessen „Stereographische Projection" Leipzig 1881, S. 6-8 und 12-16) in einfacherer Weise gelöst worden. Hk.

A. LUGLI. Sulla projezione stereografica. Besso Per. I. 144-149, 161-170.

Elementarer Beweis für die wichtigeren Eigenschaften der stereographischen Projection. La.

J. BOTTOMLEY. On the equations and on some properties of projected solids. Manchester Phil. Soc. Proc. XXIII. 63-64.

J. BOTTOMLEY. On the composition of projections in geometry of two dimensions. Manchester Phil Soc. Proc. XXIV. 31-32.

J. BOTTOMLEY. On the projectrices of a circle. Manchester Phil. Soc. Proc. XXV. 233-237.

Anwendung einer neuen Projectionsmethode auf die Geometrie der Körper und Curven. Durch ein Verfahren, die „Zusammensetzung zweier Projectionen“ genannt, kann man aus einem Körper drei andere ableiten mit Axen, die zu drei Ebenen senkrecht sind, und von veränderlichem Volumen, indem die Aenderung eine solche ist, dass die Summe der drei Volumina gleich dem des ursprünglichen Körpers ist. Ebenso können in der Geometrie von zwei Dimensionen aus irgend einem von geraden oder krummen Linien begrenzten Inhalte zwei solche Inhalte abgeleitet werden, dass ihre Summe constant ist. Wenn die ursprüngliche Curve ein Kreis ist, so ist seine abgeleitete Curve, dies ist seine „Projectrix“, eine Ellipse. Gbs. (Lp.)

F. HENRICH. Lehrbuch der Krystallberechnung. Stuttgart. Enke. XV u. 300 S.

Das Buch setzt die Kenntnis der Krystallformen, insbesondere der Naumann'schen Bezeichnungen voraus. Es werden zuerst die Grundgleichungen nach Naumann aufgestellt; hierauf folgt ein kurzer Abriss über die stereographische Projection. Daran schliesst sich die praktische Durchführung der Berechnung

der Hauptformen der sechs Krystallsysteme in einer grossen Anzahl von Beispielen. Am Schluss erfährt die Theorie der Zwillingsbildung eine ausführliche Behandlung. In der Vorführung der zahlreichen Erläuterungsbeispiele liegt die ausgesprochene Tendenz des Werkes. Die stereographische Projection wird hauptsächlich als Veranschaulichungsmittel bei der Berechnung sphärischer Dreiecke benützt; den stereographischen sind parallelprojectivische Bilder beigefügt. Doch kommt das eigentliche Wesen der stereographischen Projection nicht zur Geltung. Die Aufgabe: „Aus den Projectionen zweier grössten Kreise den Winkel zu finden, den die Ebenen dieser Kreise in Wirklichkeit mit einander machen", wird (S. 20) durch Construction der Pole und Bestimmung des Abstandes derselben gelöst, ohne dass das Gesetz der Conformität erwähnt würde.

Hk.

H. Cunynghame. On a new hyperbolograph. Phil. Mag. (5) XXII. 138-139.

Ein Apparat zur Zeichnung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Axen gegeben sind. Die mathematische Eigenschaft, auf welche die Construction des Apparates sich gründet, ist die folgende (vom Verfasser als neu angesehene). Von einem festen Punkte O wird eine Gerade OP gezogen, die eine feste Gerade AB in P trifft; man zieht PQ senkrecht gegen AB. Ist $OP+PQ$ constant, so ist der Ort von Q eine gleichseitige Hyperbel. (Die Linie OPQ wird statt eines Fadens aus einem feinen Stahldrahte gebildet, der bei O um eine Rolle gewunden ist und eine vollständige Windung um eine Rolle bei P macht, die an einem beweglichen ⊤Lineal PQ befestigt ist. Der Draht wird durch ein Gewicht oder eine Feder gerade gehalten.) Gbs. (Lp.)

F. Schiffner. Zur Construction der Ellipse mit Benutzung von Krümmungskreisen. Hoppe Arch. (2) IV. 331-332.

Zu den in bekannter Weise mit Benutzung des umgeschriebenen Rechtecks construirten Krümmungsmittelpunkten der vier Scheitel einer Ellipse werden noch fast eben so einfach vier weitere Ellipsenpunkte mit den zugehörigen Krümmungskreisen ermittelt, wodurch der Verlauf der Ellipse hinreichend genau gegeben ist.

Lg.

Rivelli. I giuochi matematici illustrati. Napoli. Tip. De Angelis.

La.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

Th. Reye. Die Geometrie der Lage. Erste Abteilung. 3te Auflage. Leipzig. Baumgärtner. XIV u. 248 S.

Wie vor 20 Jahren auf den Referenten, so übt noch heute die Reye'sche Geometrie der Lage auf Hunderte von jungen Studirenden durch die Reinheit der Methode einen unwiderstehlichen Zauber aus. Darum ist das Erscheinen der hier vorliegenden dritten Auflage der ersten Abteilung mit Freuden zu begrüssen. Sie übertrifft die erste Auflage um zwei Drittel ihrer Bogenzahl. Die bedeutendste schon in der zweiten Auflage vorgenommene Aenderung besteht in der Hinzufügung einer Sammlung von 223 Aufgaben und Lehrsätzen. Die letzten vier Abschnitte dieser Sammlung enthalten neue Untersuchungen, nämlich über Polvierecke und Polvierseite, sowie über lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten. Die wichtigen Theorien der Büschel, Scharen, Netze und Scharscharen von Kegelschnitten sind durch den Satz von Herrn Stephen Smith, der synthetisch

bewiesen ist, merkwürdig einfach und übersichtlich gestaltet. Der von Staudt'sche Beweis des Fundamentalsatzes der reinen Lage-Geometrie ist unter Benutzung der Polemik, die sich vor mehreren Jahren darüber entsponnen hatte (Klein und Darboux, Math. Ann. Bd. 17), durch einen einwandfreien Beweis ersetzt. Die Holzschnitte sind jetzt neben oder zwischen den Text gesetzt, was den Gebrauch des inhaltreichen Buches viel bequemer macht.

Scht.

Em. Weyr. Die Elemente der projectiven Geometrie. II. Heft. Wien. Braumüller 1887. 1-228.

Dieses zweite Heft der von Emil Weyr verfassten projectiven Geometrie enthält die synthetische Geometrie der Kegelschnitte. (Heft I s. F. d. M. XV. 1883. 518.)

Nach einer Einleitung über Curven und Flächen im allgemeinen und deren grundlegende Eigenschaften werden in den ersten vier Capiteln die Curven zweiter Ordnung und Klasse im Zusammenhang mit dem ein- oder umbeschriebenen Sechs-Eck oder Sechs-Seit behandelt. Dann folgen die Polareigenschaften, darauf die Theorie der projectiven Punkt- und Tangentensysteme und Involutionen. Die Theorie der gemeinschaftlichen Elemente zweier Kegelschnitte und im Zusammenhang damit die Theorie der Büschel und Reihen von Kegelschnitten werden dann soweit behandelt, als diese Theorien mit dem Satz von Desargues in Verbindung stehen. Die metrischen Eigenschaften werden in den letzten Capiteln aus den Eigenschaften der Durchmesser und Axen, sowie der Brennpunkte abgeleitet. Alle diese Capitel sind in grösster Vollständigkeit behandelt, sodass alle Eigenschaften berücksichtigt sind, die sich irgendwie aus den Haupttheorien synthetisch ableiten lassen. So führen z. B. im letzten Capitel die einem Dreiseit einbeschriebenen Kegelschnitte den Verfasser auch zu den Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreises.

C. Cranz. Synthetisch geometrische Theorie der Krümmung von Curven und Flächen 2. O. Stuttgart. J. B. Metzler. VIII + 90 S. 8°.

Referat in Abschnitt VIII, Cap. 4, S. 507.

A. Sannia. Lezioni di geometria projettiva dettate nella R. Università di Napoli. Napoli. B. Pellerano.

Von diesem Buche sind die ersten neun Lieferungen erschienen. Den Bericht verschieben wir, bis es vollständig ist.

La.

G. F. Monteverde. Elementi di geometria proiettiva. Un volume con atlante. Genova. Luigi Boef; Parigi. Gauthier-Villars.

Bericht in Darb. Bull. (2) XI. 186. La.

F. Aschieri. Geometria projettiva. Milano. Manuale Hoepli.

La.

H. Kaiser. Einführung in die neuere analytische und synthetische Geometrie. Wiesbaden. Bergmann. VIII u. 190 S.

F. Amodeo. Sulla storia della geometria. Prelezione al corso libero di geometria projettiva, letta il 24. novembre 1885 nella R. Università di Napoli. Napoli. Tip. dell' Acc. R. delle Scienze.

La.

Th. Reye. Rede über die synthetische Geometrie im Alterthum und in der Neuzeit. Strassburg. 48 S. 8°.

V. Martinetti. Sopra alcune configurazioni piane. Brioschi Ann. (2) XIV. 161-192.

Nach dem Vorgange des Herrn Kantor bezeichnet man mit Cfz. $(q, p)_\mu^\nu$ eine Figur aus μ Punkten und ν Geraden, wenn jede der letzteren q der ersteren Punkte enthält, jeder der Punkte aber p Gerade aussendet. Es ist demnach $\mu:\nu = q:p$. Wird $\mu = \nu$, so bezeichnet man nach Herrn Reye's Vorgange die Configuration mit dem Symbole μ_p. Das von Herrn Reye aufgeworfene Problem, alle Configurationen mit gegebenen Indices aufzustellen, ist bisher nur in sehr speciellen Fällen von Herrn Kantor gelöst worden. Besondere Klassen von Configurationen, über die specielle Voraussetzungen gemacht werden, sind von den Herren Veronese, Reye, Vietor, Jung u. a. untersucht worden. Auch der Verfasser legt eine besondere Voraussetzung über die Natur seiner Configuration zu Grunde. Bekanntlich bezeichnet man als conjugirt in einer Configuration zwei Punkte, die auf einer Geraden derselben liegen, zwei Gerade, die durch einen Punkt derselben gehen, schliesslich einen Punkt und eine Gerade, wenn diese einen zu jenem conjugirten Punkt enthält. Nicht conjugirte Elemente werden als einander fremd bezeichnet; die einer Geraden fremden Punkte, bez. die einem Punkte fremden Geraden bilden den Rest der Geraden, bez. des Punktes. Der Verfasser untersucht nun den Spezialfall, wo Tripel paarweise conjugirter Punkte oder Geraden nicht vorkommen. Dann wird der Rest einer jeden Geraden dieselbe Zahl von h Punkten, der Rest jedes Punktes dieselbe Zahl von k Geraden enthalten, und es ist $h:k = q:p$, wenn nicht beide Zahlen verschwinden. Allgemein gilt der folgende Satz: Gehen von dem Rest des Punktes A ϱ Gerade durch B, so gehen eben so viele Gerade des Restes von B durch A.

Herr Martinetti untersucht nun die Configurationen

$$(3, p)_{3(2p-1)}^{p(2p-1)},$$

bei denen die Restzahlen h und k verschwinden. Solche Configurationen $(3, 5)_{27}^{45}$ und 15_3 werden von den 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung, bez. von 15 geeigneten unter ihnen ausgeschnitten. Herr Martinetti zeigt, dass keine anderen Con-

figurationen dieser Art sich ergeben können. Eine Hauptrolle spielen die Figuren Δ, welche in jeder derartigen Configuration auftreten. Dieselben bestehen aus zwei Ternen unter einander fremder Geraden, die sich in neun Punkten der Configuration durchsetzen. Von einer solchen Figur können zwei nicht conjugirte Gerade willkürlich gewählt werden. Ihre Zahl ist daher gleich $\frac{1}{6}(2p-1)(p-1)^2$. Die Figur Δ umfasst sechs Ternen einander fremder Punkte, die durch die verschiedenen Entwickelungsglieder einer dreigliedrigen Determinante symbolisirt werden können. Der Verfasser unterscheidet positive und negative Ternen je nach dem Vorzeichen des zugehörigen Determinantengliedes. Irgend ein nicht in Δ vorkommender Punkt ist nach den gemachten Voraussetzungen zu allen Punkten einer bestimmten der sechs Ternen conjugirt. Er heisst positiv oder negativ mit Rücksicht auf das Vorzeichen dieser Terne. Jede Configurationsgerade, die von einem Punkte von Δ ausgeht, enthält einen positiven und einen negativen Punkt. Es giebt daher $3(p-2)$ positive und eben so viele negative Punkte. Eine Δ fremde Gerade enthält offenbar drei Punkte mit gleichem Vorzeichen. Zwei Ternen verschiedenen Vorzeichens von Δ hätten nämlich einen Punkt mit einander gemein, der mit zwei Punkten der Δ fremden Geraden ein Tripel conjugirter Punkte bilden würde. Jeder Δ fremden Geraden kann man daher ein bestimmtes Vorzeichen beilegen; da sich schneidende Gerade dasselbe Vorzeichen haben, so giebt es eben so viele positive als negative Gerade.

Da $2(p^2-5p+6)$ die Anzahl der den Punkten von Δ fremden Geraden ist, so giebt es, sobald $p>3$ ist, notwendig positive Gerade unter denselben. Nun gehen von den Punkten derselben $3(p-4)$ Gerade aus, die weder mit ihr selbst zusammenfallen, noch Punkte von Δ enthalten. Es ergeben sich einerseits mindestens $6(p-4)+3$, andererseits genau $3(p-2)$ positive Punkte, so dass

$$3(p-2) \geqq 6(p-4)+3$$

sein muss. Dies gilt aber nur, wenn $p=5$ ist. Auch für $p=4$ kommt man in einen Widerspruch. Denn eine positive Gerade

ergiebt, wenn ihre drei Punkte mit den zugehörigen positiven Ternen von Δ verbunden werden, 9 negative Punkte, während ihre wirkliche Zahl gleich 6 sein müsste. Sonach bleiben, wenn man von $p = 2$ absieht, nur die Annahmen $p = 3, 5$ übrig.

Der Verfasser geht nun zur genauen Untersuchung der Configuration $(3, 5)_{27}^{45}$ über. Die 120 Figuren Δ liegen in 40 Ternen Δ, Δ_1, Δ_2 angeordnet, von denen eine jede alle 27 Punkte umfasst. Δ lässt nämlich 18 Punkte übrig, von denen neun positiv und neun negativ sind. Jeder dieser Punkte aber sendet zwei Gerade aus, die nicht auf Δ sich stützen; dieselben sind entweder beide positiv, oder beide negativ. Demnach bilden die neun positiven Punkte ein System Δ_1, die neun negativen ein zweites Δ_2. Ein System Δ ist durch drei unter sich fremde Punkte eindeutig bestimmt; zwei verschiedene Systeme haben entweder zwei unter sich fremde Punkte oder nur eine Gerade oder endlich zwei conjugirte Gerade gemeinsam, wenn sie nicht einander fremd sind. Die Figuren Δ entsprechen den Triederpaaren, die sich in neun Geraden einer Fläche dritter Ordnung durchsetzen. Interessant ist, wie die den Schläfli'schen Doppelsechsen entsprechenden Figuren zu Tage treten. Δ_1 enthält drei Punkte, zu deren jedem die Punkte einer beliebigen positiven Terne von Δ conjugirt sind. Diese drei Punkte bilden die zu der gegebenen associirte Terne. Die Figur D aus zwei solchen Ternen steht der Figur Δ dualistisch gegenüber. Δ_1 enthält zwei andere Ternen, die mit der soeben herausgehobenen gleiches Vorzeichen besitzen. Jede von ihnen bildet mit der von Δ ein Sextupel unter sich fremder Punkte. Die beiden associirten Ternen, (von denen die zweite auf Δ [illegible] bilden ein zweites Sextupel dieser Art. Es ist nun leic[illegible] jeder Punkt des einen Sextupels zu fünf Pun[illegible] conjugirt ist. Δ und Δ_1 ergeben genau drei Bi[illegible] seits können sechs Punkte auf zehn verschiede[illegible] Ternen zerlegt werden. Infolgedessen ergeben sie[illegible] Figuren.

Nach genauer Beschreibu[illegible] der Cfz. 15_2, [illegible] allgemeinen Figur übrig blei[illegible] die 12 [illegible]

Bisextupels ausschliesst, wendet sich der Verfasser zur Construction der betrachteten Gebilde, wobei ein willkürlich gewähltes System $\varDelta\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 8 & 12\\ 5 & 9 & 13\end{pmatrix}$ den Ausgangspunkt bildet. Wenn es sich zunächst um 15_3 handelt, so können die Punkte 6 und 7, die noch mit 1 auf einer Geraden liegen, beliebig festgesetzt werden. Die Construction ist dann vom zweiten Grade. Natürlich muss es solche Configurationen 15_3 geben, deren sämtliche Punkte auf einer Curve dritter Ordnung liegen. Lässt man 6 und 7 auf irgend eine den Punkten der Figur $\varDelta$ umschriebene Curve dritter Ordnung gelangen, so kann man auch alle übrigen Punkte der Configuration auf dieselbe gelangen lassen. Liegen nämlich die vier Punkte 6, 7, 10, 11, die zu den Geraden 1, 6, 7; 10, 2, 11; 6, 10, 13; 7, 11, 12 der Configuration Veranlassung geben, auf einer Curve dritter Ordnung mit den Punkten der Figur $\varDelta$, so liegen die nun eindeutig bestimmten Punkte 14, 15 der Configuration von selbst auf derselben. Es giebt aber nicht nur drei Lagen von 6, wie Herr Martinetti angiebt (No. 21), für welche 7, 10, 11 sich in der bezeichneten Art anordnen lassen, sondern dies ist für jede Lage von 6 in einer einzigen Art möglich.

Aus irgend zwei derartigen auf der gewählten Curve liegenden Zusatzsystemen von $\varDelta$ kann man ein einziges drittes dergestalt linear ableiten, dass man eine Configuration $(3,5)^{45}_{27}$, die auf der Curve liegt, vor sich hat. Das System $\varDelta$ bestimmt also nicht eine einzige auf der Curve liegende Configuration, wie Herr Martinetti behauptet, sondern liegt in einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit solcher Configurationen.

Der Verfasser wendet sich nunmehr zu den Configurationen $(15+h)_3$, die seiner Hauptvoraussetzung entsprechen. Eine Cfz. 16_3 existirt nicht. Die Betrachtung der Configurationen 17_3 geht von dem Umstande aus, dass wenigstens ein Punkt einen Rest aus zwei conjugirten Geraden besitzt. Mit Hülfe dieses Umstandes kann gezeigt werden, dass nur eine Cfz. 17_3 existirt; die Punkte derselben liegen indessen nicht symmetrisch angeordnet. Es giebt vier Configurationen 18_3. Hierbei kann man davon aus-

gehen, dass für wenigstens einen Punkt der Configuration zwei Gerade des Restes zu den beiden anderen conjugirt sein müssen.

E. K.

H. Schröter. Ueber das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration. Kronecker J. C. 231-257.

Herr Reye hatte im LXXXVI. Bande des Journ. f. Math. S. 209 eine directe synthetische Begründung der Construction gegeben, welche von sechs beliebigen Punkten des Raumes aus zu der merkwürdigen Kummer'schen Configuration der 16 Knotenpunkte und 16 singulären Ebenen einer Kummer'schen Fläche vierten Grades führt. Im Gegensatz zu der eleganten und kurzen, aber doch die Eigenschaften eines Nullsystems voraussetzenden Reye'schen Begründung, giebt Herr Schröter hier eine Herleitung, welche, wie es bei dem elementaren Charakter der Construction wünschenswert ist, nur die elementar-stereometrischen Hülfsmittel benutzt. Zugleich lässt diese Herleitung die vollständige räumliche Configuration in fertiger Form hervortreten, zeigt ihren in sich dualen Charakter und führt endlich auf einige Eigenschaften des Fünfflachs und Sechsflachs, die wohl in dieser Form noch nicht ausgesprochen waren. Die 16 Punkte und 16 Ebenen ergeben sich bei Reye in folgender Weise. Wenn man aus fünf beliebigen Ebenen α, β, γ, δ, ε des Raums die beiden räumlichen Fünfecke

$$(\beta\gamma\delta),\quad (\delta\varepsilon\alpha),\quad (\alpha\beta\gamma),\quad (\gamma\delta\varepsilon),\quad (\varepsilon\alpha\beta);$$
$$(\alpha\gamma\varepsilon),\quad (\gamma\varepsilon\beta),\quad (\varepsilon\beta\delta),\quad (\beta\delta\alpha),\quad (\delta\alpha\gamma)$$

bildet, und die Ecken und Seiten derselben in der angegebenen Reihenfolge sich entsprechen lässt, so wird jede sechste Ebene φ von den entsprechenden Seiten der beiden Fünfecke in Punktepaaren getroffen, deren fünf Verbindungslinien sämtlich durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{f}$ gehen. Wenn man diesen Satz, in dem φ bevorzugt erscheint, so ausspricht, dass α, β, γ, δ, ε bevorzugt werden, so gesellen sich dem Punkte $\mathfrak{f}$ noch weitere

fünf Punkte a, b, c, d, e zu. Diese sechs Punkte geben nun im Verein mit den zehn Ecken der erwähnten beiden Fünfecke die 16 Punkte der Kummer'schen Configuration. Die 16 Ebenen derselben setzen sich aus den sechs Ebenen α, β, γ, δ, ε, φ und gewissen zweimal fünf Verbindungsebenen je dreier von den zehn Ecken der beiden Fünfecke zusammen. Mit den Resultaten dieser Abhandlung stehen die Resultate in engem Zusammenhang, auf welche etwa gleichzeitig Herr F. Klein von ganz anderen Gesichtspunkten aus in den Math. Ann. XXVII. 106 u. f. kommt. Scht.

F. Klein. Ueber Configurationen, welche den Kummer'schen Flächen zugleich ein- und umgeschrieben sind. Klein Ann. XXVII. 106-142.

Referat erfolgt im nächsten Jahrgange. Red.

H. Staigmüller. Die harmonische Configuration. Diss. Tübingen. IV + 43 S. 8°.

Kővári. Ueber ein Deductionsprincip der synthetischen Geometrie. Hoffmann Zt XVII. 161-182.

Der Grundgedanke der Arbeit ist folgender: Diejenigen planimetrischen Relationen, welche eine Gleichheit zweier, aus Strecken oder Sinussen gebildeten Producte aussprechen, sind (im allgemeinen) das Resultat der Anwendung des Sinussatzes auf Dreiecksketten, wo unter „Dreieckskette“ ein System von Dreiecken zu verstehen ist, deren jedes wenigstens mit einem andern (sei es an einer Seite oder einem Winkel) zusammenhängt. Das Verfahren wird erläutert an dem verallgemeinerten Satz des Menelaos, an dem Fundamentalsatz vom Vierstrahl, der von einer Transversalen in einer projectivischen Punktreihe geschnitten

wird, an dem von Möbius herrührenden Theorem: „Das Product aus den Doppelschnittsverhältnissen, nach denen alle Seiten eines ebenen Vielecks von zwei Geraden geschnitten werden, ist der positiven Einheit gleich“, u. a. Lg.

C. Segre. Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux. Kronecker J. C. 317-330.

Das Ziel dieser Note ist die Aufstellung einer Reihe von Sätzen über die Homographien zwischen den Elementen eines geometrischen Grundgebildes erster Stufe mit Hülfe von Schlüssen, welche der reinen Geometrie der Lage angehören. Dies genügt zum Hinweise auf den Zusammenhang zwischen dieser Arbeit und der des Herrn H. Wiener: „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden“. Obgleich der Verfasser die Betrachtung der imaginären Elemente durchaus ausschliesst, so besitzt seine Abhandlung doch Berührungspunkte (sogar gemeinschaftliche Teile) mit seiner anderen: „Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica“; der Grund davon liegt darin, dass die von ihm zur Darstellung der Theorie der imaginären Elementenpaare vorgeschlagene Methode gerade in der Erforschung der binären Homographien ihre Grundlage hat. Ferner hat der Verfasser in dem zu besprechenden Aufsatze auch die, gewisse wichtige Aufgaben betreffenden Constructionen angegeben. Ueberdies hat er von den Schlussweisen und Symbolen systematisch Gebrauch gemacht, welche in der Theorie der Operationen angewandt werden (deren Nutzen schon von Herrn Stephanos bewiesen war in der Abhandlung: „Sur la représentation des homographies binaires par les points de l'espace“. Klein Ann. XXII. 299-368, F. d. M. XV. 1883. 91 ff.). Wenn z. B. die Homographien mit den Buchstaben P, Q, R, ... bezeichnet werden, so ist die PQ die Homographie (das Product von PQ), welche man durch Anwendung von Q nach P erhält, P^{-1} ist die zu P inverse Homographie, u. s. w.

Hiernach wollen wir nun eine kurze Uebersicht über den

Inhalt des Segre'schen Aufsatzes geben. Zwei binäre Homographien, welche wie alle in Rede stehenden demselben Grundgebilde angehören, heissen harmonisch, wenn die beiden Producte $P^{-1}Q$ und $Q^{-1}P$ einander gleich sind. Die so entstehende Homographie ist eine Involution; mithin kann man behaupten, dass, wenn zwei Involutionen harmonisch sind, jede das Product der anderen mit einer Involution ist. Sind P und Q harmonisch, so sind es ihre inversen P^{-1} und Q^{-1} ebenfalls, und dasselbe gilt für die Producte PR, wie auch R beschaffen ist. Nur eine einzige Homographie giebt es, welche zu einer gegebenen Homographie harmonisch ist und zwei gegebene Elementenpaare enthält, oder welche zu zwei gegebenen Homographien harmonisch ist und ein gegebenes Elementenpaar enthält; ihre Construction wird in No. 3 gelehrt. Im allgemeinen giebt es eine einzige Involution, welche zu zwei gegebenen Involutionen harmonisch ist.

Es giebt ∞^1 Involutionen, durch welche die Transformation einer gegebenen Homographie in ihre inverse möglich ist; alle sind zur gegebenen Homographie harmonisch; jede von ihnen ist durch ein Elementenpaar bestimmt. Dagegen giebt es eine einzige Involution I (die Doppelinvolution der Homographie), welche eine gegebene Homographie P in sich selbst transformirt. Das entsprechende Element eines Elementes a in der Involution I ist zu a zugeordnet harmonisch in Bezug auf die dem a in P und in P^{-1} entsprechenden Elemente. Die Doppelelemente von P, falls solche vorhanden sind, bilden auch die Doppelelemente von I. Die Doppelinvolution I einer Homographie P ist von hervorragender Bedeutung, wie dies die folgenden Sätze zeigen: Die zu P harmonischen Involutionen sind es auch zu I; eine Homographie wird durch ihre Doppelinvolution und durch ein Paar entsprechender Elemente bestimmt; die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Homographien vertauschbar sind, besteht darin, dass sie dieselbe Doppelinvolution besitzen; u. s. w.

Wenn zwei beliebige Homographien gegeben sind, so giebt es im allgemeinen ein einziges Paar von Involutionen, welche einander in Bezug auf alle beide entsprechen, dagegen ∞^1, wenn

jene ersteren harmonisch sind. Umgekehrt giebt es ∞^1 Homographien, bezüglich deren zwei gegebene Involutionen I, I' einander entsprechen; diese Homographien bilden zwei zu einander „harmonische Büschel". Zwei Homographien aus demselben Büschel ergeben als Product der einen mit der inversen der anderen eine Homographie, welche I als Doppelinvolution besitzt; zwei Homographien dagegen, welche verschiedenen Büscheln angehören, ergeben als Product der einen mit der inversen der anderen eine zu I harmonische Homographie.

Zwei Homographien bestimmen einen Büschel. Wenn zwei Homographien zu einer dritten harmonisch sind, so sind es alle Homographien des von ihnen bestimmten Büschels ebenfalls. Zwischen den Homographien eines Büschels besteht immer eine Involution. Alle Homographien, welche zwei Homographien (die nicht Involutionen sind) unter einander zum Austausche bringen, bilden einen Büschel; u. s. w.

Es giebt eine einzige Homographie, welche zu drei gegebenen Homographien harmonisch ist; die Construction derselben wird in No. 15 gelehrt.

Bildet man die Homographien auf den Punkten eines Kegelschnittes ab, so gelangt man zu neuen einfachen Beweisen der Theoreme über das Hexagrammum mysticum, worüber am Ende der Note einiges gesagt wird. (Man vergleiche auch No. 18 der schon citirten Arbeit: Le coppie di elementi etc.).

La. (Lp.)

C. Le Paige. Sur les homographies dans le plan.
Belg. Bull. (3) XII. 422-439.

Untersuchung der Verwandtschaften höherer Ordnung vermittelst der Theorie der algebraischen Formen in Liniencoordinaten.

Mn. (Lp.)

R. W. Genese. On a geometrical transformation.
Brit. Ass. Rep. 538-540.

Zwei entsprechende Punkte P, P' werden wie folgt bestimmt: Es seien S, O zwei feste Punkte, XLY eine zu SO senkrechte Ebene. Die Verbindungslinie eines beliebigen Punktes P des Raumes mit O treffe diese Ebene in X; dann trifft eine Parallele XP' zu SO die Linie SP in einem Punkte P', der dem P entspricht. Liegt P auf einer Oberfläche, so liegt P' auf einer anderen von demselben Grade. Ist $SO = OL$, so wird der Charakter der Verwandtschaft involutorisch. Gbs. (Lp.)

C. Le Paige. Sur le nombre des groupes communs à des involutions supérieures marquées sur un même support. Belg. Bull. (3) XI. 121-127.

Die Anzahl $F(m, k, m', k')$ der Gruppen von $k+k'$ Punkten, welche zwei Involutionen $I(m, k)$, $I(m', k')$ gemeinsam haben, beträgt

$$C_{m-k}^{k'} \quad C_{m'-k'}^{k}.$$

Der Verfasser giebt den Beweis für den Fall $k = 2$; danach bemerkt er, dass die allgemeine Formel aus der Recursionsformel sich herleiten lässt:

$$(k+k')F(m, k, m', k') = (m'-k-k'+1)F(m-1, k-1, m', k') \\ + (m-k'-k+1)F(m, k, m'-1, k'-1).$$

Die gefundene Formel gestattet die Aufstellung zahlreicher geometrischer Beziehungen, wofür Herr Le Paige einige Beispiele giebt. Mn. (Lp.)

G. Castelnuovo. Studio dell' involuzione generale sulle curve razionali mediante la loro curva normale. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 1167-1200.

Die zahlreichen schönen Eigenschaften, die Herr Em. Weyr u. a. an den von ersterem eingeführten Involutionen J_k^n n^{ter} Ordnung und k^{ter} Stufe aufgefunden haben, lassen sich aus gewissen einfachen Eigenschaften des allgemeinen Raumes ableiten, wenn man ihre

einzelnen Gruppen als Schnitte der R_{n-1} eines Bündels k^{ter} Stufe mit einer Normalcurve C^n betrachtet, (anstatt als Schnitte der Curven bezw. Flächen eines Netzes, mit ebenen, bezw. räumlichen rationalen Curven).

Demnach hat der Verfasser zunächst einige Haupteigenschaften der Normalcurve C^n zu erweisen. Ein „schneidender Raum R_m“ enthält $m+1$ Punkte der C^n. Die Gesamtheit derselben bildet eine Fläche $(2m+1)^{\text{ter}}$ Dimension, wenn $m < \frac{(n-1)}{2}$ ist. Da ein „schneidender Raum“ R_{n-m-1} genau $\binom{n-m}{m+1}$ schneidende Räume R_m, aber keine weiteren Punkte der Fläche enthält, so ist dieselbe von der $\binom{n-m}{m+1}^{\text{ten}}$ Ordnung. Durch $i+1$ Punkte von C^n gehen $\binom{n-i-m}{m}$ schneidende Räume $(i+m)^{\text{ter}}$ Dimension, welche einen Raum R_{n-2m-i} treffen $\left(m < \frac{n-i}{2}\right)$. Die osculirenden Räume R_i von C^n bilden eine Fläche $(i+1)^{\text{ter}}$ Dimension und $(i+1)(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung, was durch einen Schluss von $(n-1)$ auf n sich erläutern lässt $(i < n-1)$. Durch jeden Punkt gehen ferner, da C^n sich selbst dualistisch gegenübersteht, n osculirende Räume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Die Punkte einer C^n und die zugehörigen Schmiegungsräume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension entsprechen einander in einer einzigen unzweideutig bestimmten reciproken Beziehung des Raumes R_n in sich. Es stellt sich heraus, dass die Beziehung zwischen zwei derartigen besonderen Gebilden, also überhaupt zwischen irgend zwei homologen, eine wechselseitige ist. Man hat es nu[illegible] mit einem eigentlichen Polarsystem im Fall eines geraden n z[illegible] mit einem Nullsystem, im Falle n ungerade ist. In dies[illegible] muss also der Schnittpunkt von irgend n osculirenden [illegible] dem Verbindungsraum ihrer Schmiegungspunkte, dem [illegible] der constituirten Beziehung entspricht, liegen; was ja z[illegible] bekannten Eigenschaft der Raumcurve dritter Ordnung vollkom[illegible] analog ist. Die Möglichkeit, diese Theor[illegible] durch Schlüsse

$n-1$ auf n zu erweisen, beruht auf dem Fundamentaltheorem, nach dem die Tangentenreihe von C^n auf jedem osculirenden R_{n-1} eine auf C^n projectivisch bezogene C^{n-1} bestimmt.

Diese Theoreme werden nun im § 2 auf Involutionen angewendet. Offenbar kann J_k durch $k+1$ vollständige Gruppen, aber auch durch k vollständige und $n-k$ unvollständige zu je $k+1$ Elementen bestimmt werden. Im letzteren Fall wird nämlich der Raum R_{n-k}, in welchem die Träger der vollständigen Gruppen sich treffen, von jedem Raum R_k getroffen, der eine der unvollständigen Gruppen enthält. Diese $n-k$ Punkte bestimmen den „Centralraum" R_{n-k-1} der gesuchten Involution (mit dem jede Gruppe der Involution in einem Raume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension liegt).

Da R_{n-k-1} von $(k+1)(n-k)$ osculirenden R_k getroffen wird, so enthält J_k^n im allgemeinen $(k+1)(n-k)$ $(k+1)$-fache Punkte, deren jeder in einer Gruppe $(k+1)$-fach auftritt. Enthält eine Gruppe übrigens einen l-fachen Punkt, so vertritt er $l-k$ $(k+1)$-fache Punkte. Von den nach der Bezeichnung des Herrn Weyr neutralen Gruppen zu k Punkten enthalten $\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}$ irgend $k-2$ gegebene Elemente, denn diese Anzahl „schneidender" R_k, die R_{n-k-1} treffen, geht von den $k-2$ gegebenen Elementen aus. Jeder einzelne von ihnen enthält eine Gruppe von k Punkten, die in unendlich vielen Gruppen der Involution auftreten. Ebenso treten $2r-k-2$ Punkte von C^n in $\binom{n-r+1}{k-r+2}$ neutralen Gruppen zu r Punkten auf; jede dieser Gruppen bestimmt mit $k-r+1$ willkürlichen Punkten eine Gruppe der Involution.

Es ist evident, dass sich zwei gegebene Involutionen nur in einer dritten Involution durchsetzen können, wenn sie überhaupt gemeinsame Gruppen haben.

Eine Involution J_{n-1}^n besitzt n n-fache Elemente $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, \ldots A_1^{(n)}$. Als eine einfache Consequenz der Polareigenschaften ist folgendes hervorzuheben: Bildet man eine zweite Involution, deren

n-fache Elemente eine Gruppe von J_{n-1}^n ausmachen, so enthält dieselbe die Gruppe $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}$. Ferner gehört, wenn n ungerade ist, diese Gruppe selbst der Involution an.

Sehr interessante Beziehungen ergeben sich zwischen conjugirten Involutionen J_k^n und J_{n-k-1}^n, deren Centralräume nämlich einander conjugirt sind. Es möge hier nur das eine hervorgehoben werden, dass die $(k+1)$-fachen Punkte der ersteren $(n-k)$-fache Punkte der zweiten Involution sind.

Das Hauptinteresse nimmt der dritte Abschnitt (§ 3) in Anspruch, in dem nach einer früher von Kohn entwickelten Methode die gemischte Polargruppe einer Gruppe A von n Punkten definirt wird. k n-fache Punkte $O_0^{(1)}, O_0^{(2)}, \dots, O_0^{(k)}$ und eine Gruppe A bestimmen eine Involution k^{ter} Stufe $\left(\overset{k}{\underset{1}{O}}{}_0, A\right)$, die genau $n-k$ $(k+1)$-fache Punkte M_0 besitzt. Dieselben bilden die gemischte Polare jeder Gruppe von $\left(\overset{k}{\underset{1}{O}}{}_0, A\right)$ hinsichtlich $O_0^{(1)}, O_0^{(2)}, \dots, O_0^{(k)}$. Auf der anderen Seite bestimmen $n-k$ gegebene Punkte unzweideutig die Involution, zu deren Gruppen sie als gemischte Polargruppe von $O_0^{(1)}, \dots, O_0^{(k)}$ gehören. Die gemischte Polargruppe von einer Gruppe zu $m > k$ Punkten von C^n erhält man, wenn man O^n auf irgend eine C^m projectivisch bezieht. Dass wirklich die Fundamentaleigenschaft der gemischten Polare erfüllt ist, wird durch folgende Betrachtung gezeigt. Die osculirenden Räume $O_{n-1}^{(1)}, O_{n-1}^{(2)}, \dots, O_{n-1}^{(k)}$ begegnen sich in einem R_{n-k}, auf dem die osculirenden R_k von C^n eine zu ihr projectivische C^{n-k} bestimmen, während ihre Tangenten in $O_{n-1}^{(1)}$ eine zu ihr projectivische C^{n-1} bestimmen. Von den Gruppen nun, welche der Träger A_{n-1} von A auf C^{n-1} und C^{n-k} bestimmt, e[illegible] die eine der ersten Polargruppe von A hinsichtlich $O_0^{(1)}$, [illegible] der betrachteten gemischten Polargruppe. Entspre[illegible] $P_0^{(2)}, P_0^{(3)}, \dots, P_0^{(k)}$ den Punkten $O_0^{(2)}, \dots, O_0^{(k)}$ auf C[illegible] von den beiden in A_{n-1} enthaltenen Gruppen von C[illegible] die zweite die $(k-1)^{\text{te}}$ gemischte Polare der ersten h[illegible] $P_0^{(2)}, P_0^{(3)}, \dots, P_0^{(k)}$ dar; also entspricht ihr auf C^n die

gemischte Polargruppe, welche hinsichtlich $O_0^{(2)}$, $O_0^{(3)}$, ..., $O_0^{(k)}$ zu der ersten Polargruppe von A hinsichtlich $O_0^{(1)}$ gehört. Hieraus folgt aber, dass man die gesuchte gemischte Polargruppe erhält, wenn man erst die erste Polargruppe hinsichtlich $O_0^{(1)}$ nimmt, von der erhaltenen Gruppe die erste Polargruppe hinsichtlich $O_0^{(2)}$ u. s. f., und es ist klar, dass man die Reihenfolge dieser Operationen willkürlich verändern kann. Selbstverständlich kann man nun auch den Fall in Betracht ziehen, wo einzelne der Punkte $O_0^{(1)}$, ..., $O_0^{(k)}$ zusammenfallen. E. K.

G. Castelnuovo. Studii sulla teoria della involuzione nel piano. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 1559-1594.

Man lasse einen Strahl um O rotiren und nehme hinsichtlich O die Polargruppe jeder Schnittgruppe mit einer vorliegenden C^n (vergl. das vorhergehende Referat). Alle diese Gruppen liegen auf der ersten Polare von C^n hinsichtlich O. Dieselbe hängt in derselben Art von unendlich vielen anderen Curven n^{ter} Ordnung ab. In jedem Büschel, der neben C^n eine Gruppe von n O enthaltenden Strahlen als Curve enthält, kommen nur solche Curven C^n vor. Die zweifache Mannigfaltigkeit von Gruppen, welche diese Curven auf Geraden des bezeichneten Büschels ausschneiden, heisst die ebene Involution $(O, C^n)_1$; die Curven selbst heissen Fundamentalcurven derselben. Die allen Curven gemeinsame erste Polare Δ^{n-1} heisst die Directrix der Involution. Dass man es mit einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu thun hat, ist deswegen klar, weil jede Gerade a zusammen mit einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine Fundamentalcurve ist. Nur die Schnittpunkte beider Gebilde können aber, nach der von dem Verfasser gegebenen Definition, der Directrix angehören.

Es versteht sich, dass zwei Fundamentalcurven in n Gruppen der vorliegenden Involution sich durchsetzen. Berühren sich also zwei Fundamentalcurven in A_1 längs einer von OA_1 verschiedenen Tangente, so haben sie noch $n-1$ weitere Berührungspunkte mit einander gemein. Enthalten zwei Curven A_1 doppelt, so berühren sich dieselben in $n-2$ Punkten der Geraden OA_1.

Eine „Fundamentalcurve von der Ordnung mn" trifft jede Gerade des Büschels O in m Gruppen ihrer Involution. Nun gilt der Lehrsatz, dass jede Gruppe einer Involution mn^{ter} Ordnung erster Stufe m Gruppen einer Involution n^{ter} Ordnung enthält, sobald dies von irgend zwei Gruppen derselben gilt. Hieraus geht hervor, dass der Büschel aus zwei Fundamentalcurven mn^{ter} Ordnung nur Fundamentalcurven enthält. Die erste Polare einer Fundamentalcurve besteht aus der Directrix und aus einer Fundamentalcurve $(m-1)n^{ter}$ Ordnung. Die Fundamentalcurven mn^{ter} Ordnung bilden eine $m\left[\frac{n(m+1)}{2}+1\right]$-fache Mannigfaltigkeit. Irgend eine Curve C^p wird durch eine conjugirte Curve $C^{p(n-1)}$ zu einer Fundamentalcurve pn^{ter} Ordnung ergänzt. Die conjugirte Curve enthält zu jedem Punkte von C^p die conjugirten, die ihn zu einer Gruppe von $(O, C^n)_1$ ergänzen. Beide Curven durchschneiden sich in $p(n-1)$ Punkten der Directrix und dann in $\frac{p(p-1)(n-1)}{2}$ Punktepaaren, von denen jedes in einer Involutionsgruppe vorkommt.

Von besonderem Interesse ist die von Herrn Cremona eingeführte, von Herrn Kohn (Wiener Ber. LXXXIX. 144-172, F. d. M. XVI. 1884. 545) eingehend studirte Satellite der Directrix Δ^{n-1}. Die conjugirte Curve von Δ^{n-1} enthält neben der Directrix selbst eben diese Satellite $S^{(n-1)(n-2)}$. Beide Curven berühren einander in den Berührungspunkten der von O ausgehenden Tangenten von Δ^{n-1}, jede dieser Geraden enthält überdies $(n-3)$ Spitzen der Satellite, die mit dem Berührungspunkte in einer Gruppe liegen. Die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$ Paare von Schnittpunkten sind Berührungspunkte von O ausgehender Doppeltangenten, von denen jede S noch in $n-4$ Doppelpunkten schneidet. Hieraus kann man, weil weitere Doppelpunkte und Spitzen sich nicht finden, Klassen- und Doppeltangentenzahl finden.

§ 2 enthält eine Reihe ähnlicher Sätze über Involutionen $(O, C^n)_2$ zweiter Stufe. Ihre Fundamentalcurven n^{ter} Ordnung haben

die zweite Polare von O, die Directrix des Systems, mit einander gemein; die auf irgend einem Strahle des Büschels O liegenden Gruppen bilden eine Involution J_2^n mit dem $(n-1)$-fachen Elemente O. Lehrsätze, welche die allgemeine Involution $(O, C^n)_r$ betreffen und Verallgemeinerungen der bewiesenen sind, werden im Nr. 18 angegeben.

Im § 3 werden zunächst einige allgemeine Sätze über gemischte Polaren in neuer Fassung gegeben. Als „conjugirt" werden nach Battaglini's Vorgang n Punkte bezeichnet, wenn der letzte in der gemischten Polargeraden der übrigen liegt. Alsdann bilden die Gruppen conjugirter Punkte, welche in einer Geraden liegen, eine Involution J_{n-1}^n, deren n-fache Punkte C^n ausschneidet. Bei ungeradem n ist der letzte der n Punkte zu den $n-1$ ersten conjugirt. Durch r Punkte der Ebene geht eine einzige gemischte r^{te} Polare, deren r Punkte auf einer Geraden liegen. Alle diese Polaren, die zu r Punkten der Geraden gehören, bilden also ein lineares System.

Als neutral hinsichtlich O und P wird eine Curve dann bezeichnet, wenn die zweite gemischte Polare derselben unbestimmt wird. Eine C^3 ist hinsichtlich je zweier conjugirten Punkte ihrer Hessiane neutral. Die erste Polare hinsichtlich P muss dann aus $n-1$ in O sich kreuzenden Geraden bestehen und umgekehrt, die erste Polare hinsichtlich O besteht aus $n-1$ Geraden, die in P sich kreuzen. Hieraus kann aber geschlossen werden, dass die Curve mit unendlich vielen Paaren von Strahlengruppen mit den Centren P und Q zu je einem Büschel gehört, der Erzeugnis projectivischer Involutionen mit den n-fachen Strahlen PQ ist. Die Schnittgruppe mit OP gehört zu der cyklischen Involution mit den n-fachen Punkten O und P. Von den interessanten Eigenschaften, die Herr Castelnuovo erweist, möge hervorgehoben werden, dass alle gemischten r^{ten} Polaren, die zu Gruppen von OP gehören, zu einem Büschel gehören und hinsichtlich O und P neutral sind.

Das Netz aus irgend einer Curve C^n und den hinsichtlich O und P neutralen C^n enthält die Curven, welche dieselbe gemischte Polargruppe hinsichtlich O und P haben. E. K.

Ed. Dewulf. Mémoire sur une transformation géométrique générale dont un cas particulier est applicable à la cinématique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 405-431.

Referat in Abschnitt X, Cap. 2.

A. Pampusch. Ueber doppelinvolutorische Systeme im Raume. Pr. Gymn. St. Stephan. Strassburg, Diss. Strassburg i. E. 52 S. 4°.

Zwei collineare Räume stehen in doppelinvolutorischer Beziehung, wenn eine jede Kette von Punkten 𝔭, 𝔮, 𝔯, 𝔰, in der je zwei auf einander folgende Elemente einander entsprechen, höchstens vier Elemente enthält. (Wegen der allgemeinen Aufgabe der cyklischen Punktgruppe vergl. Herrn Lüroth's Abhandlung, Math. Ann. Bd. XIII., F. d. M. X. 1878. 378). Der Verfasser, der sich auf die Betrachtung reeller collinearer Beziehungen beschränkt, beschreibt zunächst vier verschieden geartete doppelinvolutorische Systeme und zeigt sodann, dass es anders geartete nicht geben kann; diese Systeme sind:

1. Im geschart-doppelinvolutorischen System besteht jede Gruppe aus vier harmonischen Punkten einer Geraden. Alle diese Geraden sind Leitstrahlen eines geschart-involutorischen Systems, und es entsteht auf jeder einzelnen ein System cyklisch-projectivischer Punktgruppen.

2. Beim planar-doppelinvolutorischen System enthält eine Gerade g Paare von Punkten, die bei der collinearen Beziehung sich wechselseitig entsprechen. Jeder Punkt einer anderen Geraden h ist beiden Räumen entsprechend gemein. Von jedem Quadrupel 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 müssen die Gegengeraden 𝔞𝔠 und 𝔟𝔡 sich in einem Punkte von h schneiden, ausserdem aber auf g ein Paar wechselseitig entsprechender Punkte ausschneiden. Die Anordnung in den einzelnen Ebenen des Büschels g ist die bereits von Herrn Schröter behandelte.

3. Das hyperbolisch-doppelinvolutorische System enthält zunächst auf einer Geraden h eine elliptische, auf einer zweiten g eine hyperbolische Involution. Die Ebenen, welche neben h

den einen oder anderen Doppelpunkt der letzteren Involution enthalten, tragen unendlich viele, aber nicht gerade Quadrupel des Systems. Kein anderes Quadrupel liegt in einer Ebene. Während die beiden Gegengeraden $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bd}$ auf g und h Paare der betreffenden Involutionen ausschneiden, werden $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$, sowie $\mathfrak{ad}$ und $\mathfrak{bc}$ durch g und h harmonisch getrennt.

4. Das elliptisch-doppelinvolutorische System enthält ebenfalls zwei Doppelgerade g und h, die aber Träger cyklisch-projectivischer Punktgruppen sind. Die Gegengeraden $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{bd}$ jedes Quadrupels trennen g und h harmonisch. Diejenigen Geraden, welche, von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ausgehend, g und h treffen, gehören zu einer Regelschar und schneiden natürlich zwei der auf g und h liegenden Gruppen aus.

Im dritten Abschnitt (C) werden die doppelinvolutorischen Oberflächen zweiter und die Raumcurven vierter Ordnung, die also den beiden collinearen Räumen gemeinsam sind, näher untersucht. E. K.

G. A. Bordiga. Corrispondenza di polarità negli spazi superiori. Ven. Ist. Atti. (6) III. 2097-2105.

Bei der reciproken Beziehung werden den Punkten, Geraden, Ebenen, ... eines Raumes R^n Räume $(n-1)^{\text{ter}}$, $(n-2)^{\text{ter}}$, $(n-3)^{\text{ter}}$, ... Dimension eines zweiten Raumes R_1^n zugeordnet. Den Gebilden, welche in einem Teilraume R^m von R^n sich vorfinden, entsprechen Gebilde, die den homologen Raum R_1^{n-m-1} enthalten, und umgekehrt.

Liegen R^n und R_1^n in einander, so entspricht jedem Teilraum R^m oder S_1^m, je nachdem er zu R^n oder R_1^n gerechnet wird, der eine oder andere Raum R_1^{n-m-1} bez. S^{n-m-1}. Es gilt nun der Satz, dass der gegebene Raum entweder zu seinen beiden entsprechenden oder zu keinem von beiden incident ist.

In jedem Teilraum R^m oder S_1^m entsteht eine besondere reciproke Beziehung (No. 3), wofern die homologen Räume R_1^{n-m-1} und S^{n-m-1} R^m nicht enthalten. Alsdann kann nämlich jedem Punkte von R^m der Schnitt seines in R_1^n homologen $(n-1)$-dimensionalen Raumes mit R^m zugeordnet werden. Natür-

lich entsteht auch in jedem gewöhnlichen Raume eine reciproke Beziehung, aber keinesweges, wie der Herr Verfasser meint, ein Polarsystem.

Im § 4 bezeichnet der Herr Verfasser als von der zweiten Ordnung, bez. Klasse die beiden dreidimensionalen Ordnungsgebilde, die durch reciproke und in einander liegende Räume vierter Dimension bedingt werden. Das erstere Gebilde wird nämlich sicherlich von jedem gewöhnlichen Raum in einer Fläche zweiter Ordnung getroffen, da diese Eigenschaft, wie der Herr Verfasser zeigt, den Tangentialräumen des zweiten Gebildes zukommt. Auf analoge Weise lässt sich die Berechtigung erweisen, die Ordnungsgebilde in einander liegender reciproker Räume n^{ter} Dimension als Gebilde zweiter Ordnung und Klasse zu kennzeichnen.

Zwei reciproke in einander liegende Räume stehen in Involution, das heisst, jedem Raume R^m entspricht derselbe Raum R^{n-m-1} in R^n und R^n_1, wenn je zwei gegenüber liegende Stücke eines „Pol-Polyedroides" einander zugewiesen sind. Ein solches Polyedroid wird durch irgend $n+1$ nicht in einem R^{n-1} liegende Punkte $\Omega^0_1, \Omega^0_2, \Omega^0_3, \ldots, \Omega^0_{n+1}$ bestimmt, entsprechend sind irgend zwei Räume m^{ter} und $(n-m-1)^{ter}$ Dimension, welche zusammen die $n+1$ Punkte enthalten. Das Pol-Polyedroid ist also das genaue Analogon zum ebenen Tripel und räumlichen Tetraeder conjugirter Punkte. Zwei in Involution liegende reciproke Systeme können zusammen genommen als ein Polarsystem gedeutet werden. Die Ordnungsgebilde derselben gehören einem $(n-1)$-dimensionalen Gebilde zweiter Ordnung und zweiter Klasse, der „Quadratica direttrice" an. Durch ein Pol-Polyedroid und durch ein weiteres Paar entsprechender Gebilde ist das Polarsystem völlig bestimmt.

Den Schluss bildet der folgende Lehrsatz:

Wählt man von zwei Pol-Polyedroiden je zwei Punkte aus und verbindet man je die übrig bleibenden $n-1$ Punkte durch zwei Räume $(n-1)^{ter}$ Dimension, so erhält man Bestimmungsstücke derselben $(n-1)$-dimensionalen Quadratik, eine

Verallgemeinerung zweier bekannten Sätze der Ebene und des Raumes. E. K.

M. Lerch. Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n^{ter} Ordnung k^{ter} Stufe. Prag. Ber. 1885. 597-600.

Im Anschluss an die Arbeit von Hrn. Em. Weyr (Wiener Ber. LXXIX, F. d. M. XI. 1879. 598) bestimmt der Verfasser hier für eine allgemeine Involution n^{ter} Ordnung k^{ter} Stufe die endliche Anzahl merkwürdiger Gruppen vom Typus $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\varrho)$, welche je ein (ν_1+1)-faches, (ν_2+1)-faches u. s. w. bis $(\nu_\varrho+1)$-faches Element besitzen, wo die Bedingungen $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\varrho = k$ und $k+\varrho \gtreqless n$ erfüllt sein müssen. Für diese endliche Anzahl ergiebt sich: $\varrho!(n-k)_\varrho . (1+\nu_1)(1+\nu_2)\ldots(1+\nu_\varrho)$. Den Specialfall $\varrho = k$, $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = 1$, wo also k Doppelelemente auftreten, hatte schon Herr Weyr behandelt. Scht.

R. de Paolis. Sulle involuzioni proiettive. Rom. Acc. Linc. Rend. (4) II$_2$. 335-337.

In zwei aufeinander liegenden projectiven Involutionen von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung fallen die $(m+n-1)^{ten}$ Polaren eines Elementes bezüglich der Gruppe gemeinsamer entsprechender Elemente und der durch jenes Element bestimmten Gruppe von $(m+n)$ Elementen zusammen. Js.

E. Bertini. Le omografie involutorie in uno spazio lineare a quasivoglia numero di dimensioni. Lomb. Rend. (2) XIX. 176-183.

Sind S_m und S_{n-m-1} zwei lineare Räume im n-dimensionalen Gebiet, die keine gemeinsamen Punkte haben, so lässt sich mit Hülfe eines beliebigen Punktes P eine involutorische Homographie (für $m = 0$ „Homologie“) herstellen, und zwar mittels einer Construction, von welcher die in Reye's Geometrie der Lage II.

128 beschriebene ein specieller Fall ist. Von diesen Homographien beweist nun der Verfasser eine Reihe von Sätzen, welche sich auf ihre Aequivalenz und auf die vereinigten Lagen von quadratischen und biquadratischen Gebilden in ihnen beziehen, und betrachtet in einer Schlussbemerkung den Fall der Ausartung einer Homographie. Schg.

R. Godefroy. Construction des tangentes aux courbes planes et détermination du point où une droite mobile touche son enveloppe. C. R. CII. 604-606.

Referat im Abschnitt X, Cap. 2.

C. Beyel. Ueber eine Reciprocität und ihre Anwendung auf die Curventheorie. Schlömilch Z. XXXI. 147-157.

Die im Titel genannte Reciprocität wird durch den folgenden Satz begründet: „Seien A, B, C die Ecken, a, b, c die ihnen gegenüber liegenden Seiten eines Dreiecks, ferner p_a, p_b, p_c die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes der Ebene mit den Ecken, und P_a, P_b, P_c die Schnittpunkte einer durch P gehenden Geraden p mit den Seiten a, b, c. Dann sind die Doppelverhältnisse $(pp_ap_bp_c)$ und $(PP_aP_bP_c)$ gleich. Die hierdurch festgestellten Reciprocitäten werden zur Aufstellung von Sätzen für Curven n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Klasse benutzt, die durch ein gegebenes Doppelverhältnis verbunden sind. Schliesslich werden daraus einige Kegelschnitt-Sätze bewiesen. Die hier niedergelegten Gedanken des Verfassers lagen schon seiner Abhandlung über Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten zu Grunde. Scht.

Ch. Beyel. Ueber eine ebene Reciprocität und ihre Anwendung auf ebene Curven. Wolf Z. XXXI. 161-177.

Das Princip der hier zu Grunde gelegten Reciprocität beruht auf folgendem Satz: In der Ebene eines Dreiecks ABC

mit den Seiten a, b, c sei auf einer beliebigen Geraden p ein Punkt P gegeben. Verbindet man P mit den Ecken des Dreiecks durch die Geraden p_a, p_b, p_c und schneidet die Gerade p die Seiten des Dreiecks in den Punkten P_a, P_b, P_c, so sind die Doppelverhältnisse $(p\, p_a p_b p_c)$ und $(P P_a P_b P_c)$ einander gleich. Demnach kann man zu jedem Punkt P in der Ebene des Dreiecks eine und nur eine Gerade p construiren, welche die Seiten des Dreiecks — diese in einer bestimmten Reihenfolge z. B. c, b, a genommen — so schneidet, dass P mit den Schnittpunkten von p mit den Seiten des Dreiecks, also P_c, P_b, P_a in der entsprechenden Reihenfolge, ein gegebenes Doppelverhältnis $\varDelta$ bildet. Die Gerade p erhält man eindeutig durch die Relation $(p_c\, p_b\, p_a\, p) = \varDelta$. Ebenso kann man auf jeder Geraden p einen und nur einen Punkt P finden, von dem aus nach den Ecken des Dreiecks — in der Reihenfolge C, B, A — Strahlen gehen, welche mit p das Doppelverhältnis $\varDelta$ geben. Dieser Punkt P wird gefunden durch die Relation $(P_c\, P_b\, P_a\, P) = \varDelta$. Hiernach ist zwischen den Geraden und Punkten der Ebene eine eindeutige Correspondenz festgelegt von der Art, dass jeder Punkt in der ihm entsprechenden Geraden liegt, jede Gerade durch den ihr entsprechenden Punkt geht. Diese Reciprocität wird mit $(CBA\varDelta)$ bez. $(cba\varDelta)$ bezeichnet.

Indem zur Bestimmung des einer Geraden p entsprechenden Punktes P vermöge der Relation $(P_c P_b P_a P) = \varDelta$ eine räumliche Construction zu Hülfe genommen wird, lässt sich nachweisen, dass den Tangenten einer Curve der n^{ten} Klasse in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ Punkte correspondiren, deren Ort eine Curve der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, welcher die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks als n-fache Punkte angehören. Diese Curve wird näher untersucht und hierauf direct der duale Satz bewiesen, dass den Punkten P einer Curve n^{ter} Ordnung in der Reciprocität $(CBA\varDelta)$ Gerade entsprechen, welche eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Klasse umhüllen.

Eine Erweiterung dieser Reciprocität wird dadurch bewirkt, dass an Stelle einer der Seiten des Grunddreiecks, z. B. b, eine Curve B^m der m^{ten} Ordnung und damit an Stelle des Punktes P_b

die m Punkte $P_{b1}, P_{b2}, \ldots, P_{bm}$ treten. Durch die Relationen

$$(P_c P_{b1} P_a P) = (P_c P_{b2} P_a P) = \ldots = (P_c P_{bm} P_a P) = \Delta$$

sind jeder Geraden p in der Ebene m ihrer Punkte zugeordnet. In dieser durch $(cB^m a\Delta)$ bezeichneten Reciprocität entsprechen den Tangenten einer Curve n^{ter} Klasse Punkte, welche auf einer Curve $2mn^{ter}$ Ordnung liegen.

Schliesslich werden noch für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ mehrere Folgerungen aus den allgemeinen Sätzen abgeleitet.

Rdt.

R. Böger. Ueber Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen. Pr. Höh. Bürg.-Schule Hamburg, Diss. Leipzig. 43 S. 4°.

Zu irgend zwei gegebenen (involutorischen) Punktreihen kann man eine dritte reelle finden, deren Doppelelemente das gemeinsame Paar der beiden ersten Involutionen ausmachen, während die beiden Doppelelemente einer jeden der ersteren Involutionen ein Paar derselben bilden. Ohne auf möglicherweise imaginäre Elemente zurückzugreifen, kann man den Zusammenhang der drei Involutionen in folgender Art definiren. Es sei AB ein Paar der „resultirenden Punktreihe", AA und BB mögen der ersten, A𝔄, B𝔅 der zweiten Involution („componirenden Punktreihe") angehören, alsdann sind auch AB und 𝔄𝔅 zwei Paare der resultirenden Punktreihe. Hieraus ergiebt sich dann eine lineare Construction für die resultirende Punktreihe, wie auch, falls diese gegeben vorliegt, für ihre componirenden Reihen. Bei der Betrachtung des Kegelschnittsbüschels treten die Involutionen conjugirter Punkte, die auf einer und derselben Geraden zu betrachten sind, als componirende Punktreihen derselben „Hauptpunktreihe" auf. Die letztere enthält die Punktepaare, die von reellen Kegelschnitten des Büschels auf der Geraden ausgeschnitten werden. Herr Böger zieht nun in den §§ 1-5 die verschiedenen Fälle in Betracht, wo ein Büschel durch zwei „Punktreihen", das heisst, Involutionen conjugirter Punkte, durch zwei Polarsysteme, durch eine Punktreihe und zwei „Hauptpunktreihen" u. s. w. bestimmt wird. Eine Punktreihe ist zu zwei

Bestimmungsstücken, eine Hauptpunktreihe zu einem äquivalent. Es wird in jedem Falle gezeigt, wie man das Polarsystem eines Kegelschnittes des bezeichneten Büschels finden kann.

Nachdem im § 6 nach entsprechender Methode Netze von Polarsystemen behandelt worden sind, behandelt der Verfasser im Anhang (§ 7) das Problem durch neun Punkte eine Fläche zweiter Ordnung zu legen, das heisst, ihr Polarsystem aufzufinden, nach der aus Steiner's Nachlass bekannten Methode; die neun Punkte werden auf drei Ebenen verteilt, und es wird die Forderung gestellt, drei Kegelschnitte zu legen, welche sich paarweise in den Schnittlinien der Ebenen treffen, und von denen jeder die drei Punkte seiner Ebene enthält. E. K.

R. Sturm. Ueber gleiche Punktreihen, Ebenenbüschel, Strahlenbüschel bei collinearen Räumen. Klein Ann. XXVIII. 261-267.

Herr Schröter hatte in seinem Buche „über Flächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung" auch die Paare entsprechend gleicher Punktreihen, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel behandelt, falls diese einstufigen Grundgebilde ein zweistufiges Grundgebilde, also entweder ein Feld oder einen Bündel, zum Träger haben. Hier wird nun die analoge Untersuchung für zwei collineare Räume durchgeführt. Zunächst ergiebt sich, dass alle Geraden, deren Punktreihen mit den ihnen entsprechenden Punktreihen gleich sind, eine Congruenz bilden, die vom Bündelgrad 2 und vom Feldgrad 2, aber in einer näher erörterten Weise speciell ist. Die Geraden aber, welche Ebenenbüschel aussenden, die den ihnen entsprechenden gleich sind, bilden eine Congruenz, die dual zu der Doppelsecanten-Congruenz der Raumcurve vierter Ordnung erster Art, und deshalb vom Bündelgrad 6 und vom Feldgrad 2 ist. Die Strahlbüschel (p, e) endlich, die in zwei collinearen Räumen den ihnen entsprechenden gleich sind, bilden ein dreistufiges System derartig, dass $p^3 = 6$, $e^3 = 2$, $\widehat{pe} = 4$ ist, d. h. dass jeder Punkt Scheitel von sechs solchen Strahlbüscheln ist, in jeder Ebene zwei

solche Strahlbüschel liegen und jeder Strahl des Raums vier solchen Strahlbüscheln angehört. Scht.

R. Sturm. Zur Theorie der Collineation und Correlation. Klein Ann. XXVIII. 268-276.

Der Verfasser bringt einige Nachträge zu seinen Untersuchungen über Collineation und Correlation. Zunächst untersucht er den Kerncomplex einer Correlation, d. h. das dreistufige System solcher Strahlen, welche in einer Correlation ihre entsprechenden schneiden, dann das zweistufige System aller Flächen zweiter Ordnung, welche einen gegebenen Punkt und eine gegebene Ebene als Pol und Polarebene sowie zwei gegebene Strahlen als Polaren haben. In einem dritten Capitel wird für eine kubische Raumcurve bewiesen, dass die vier Verbindungsebenen jeder Tangente derselben mit den vier Ecken eines Schmiegungstetraeders das constante Doppelverhältnis $\frac{1}{4}$ haben. Endlich wird im vierten Capitel das vierstufige System von Regelscharen untersucht, das bei zwei collinearen Räumen durch je zwei entsprechende Ebenenbüschel erzeugt wird. Namentlich bestimmt der Verfasser für dieses System die 15 Zahlen $\mu^a\nu^b\varrho^c$, wo $a+b+c=4$ ist, und wo μ, ν, ϱ bezw. die Bedingungen bedeuten, durch einen Punkt zu gehen, eine Gerade zu berühren und eine Ebene zu berühren. So ergiebt sich z. B., dass 30 Flächen des erwähnten vierstufigen Systems vier gegebene Ebenen berühren.

Scht.

R. Sturm. Ueber höhere, räumliche Nullsysteme. Klein Ann. XXVIII. 277-283.

Unter einem höheren, räumlichen Nullsystem versteht der Verfasser mit Ameseder und anderen jedes beliebige dreistufige Strahlbüschel-System. Er stellt sich hier nun die Aufgabe, für gewisse solcher Systeme die drei Gradzahlen p^3, e^3, $\widehat{pe}$ zu bestimmen. Namentlich sind dies die Strahlbüschel-Systeme, welche aus einem zweistufigen System von kubischen Raumcurven dadurch

hervorgehen, dass man auf jeder Raumcurve eines solchen Systems jeden Punkt mit der zugehörigen Schmiegungsebene zusammenfasst. Wenn das Raumcurvensystem dadurch definirt ist, dass seine Elemente durch x Punkte gehen sollen, und $5-x$ Strahlen zu Secanten haben sollen, so ergiebt sich p^3 immer gleich 1, ferner, je nachdem $x = 5, 4, 2, 1$ oder 0, $e^3 = 6, 3, 6, 6$ oder 21 und $\widehat{pe} = 5, 4, 6, 9, 20$. Während die Zahlen p^3 und e^3 vom Verfasser schon durch seine Untersuchungen über kubische Raumcurven (Journ. f. Math. LXXIX. 99-139 u. LXXX. 128-149) gefunden waren, hat er die Zahlen $\widehat{pe}$ neu zu bestimmen, was mit Hülfe der vom Referenten gefundenen allgemeinen Punktepaar- und Strahlenpaar-Formeln geschieht. Scht.

Ad. Schwarz. Ueber eine ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe. Wien. Ber. XCIV. 310-340.

Ausgehend von einer ein-eindeutigen und einer ein-zweideutigen Beziehung von Strahlbüscheln, die in zwei Ebenen liegen, gelangt der Verfasser zu der Definition und weiterhin zu den Eigenschaften einer ein-zweideutigen Verwandtschaft zweier Punktfelder und zweier Bündel. Unter anderm ergiebt sich, dass, wenn bei zwei Bündeln jeder Ebene des einen zwei Strahlen des andern Bündels entsprechen, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden ist, und dass, wenn jedem Strahle des einen ein Ebenen-Paar des andern Bündels entspricht, der Ort der Schnittpunkte entsprechender Elemente eine Fläche fünfter Ordnung ist.

Scht.

L. Geisenheimer. Die Erzeugung polarer Elemente für Flächen und Curven durch die projective Verallgemeinerung des Schwerpunkts. Schlömilch Z. XXXI. 193-213.

Die collineare Verallgemeinerung des Schwerpunktes für ein ebenes Punktsystem fällt mit dem Pol der zum collinearen

Punktsystem gehörigen Gegenaxe in Bezug auf letzteres System zusammen, so dass der Schwerpunkt selbst als der Pol der unendlich fernen Geraden bezüglich des Punktsystems erscheint. Indem der Verfasser diese collineare Verallgemeinerung des Schwerpunkts einer ebenen und einer räumlichen Punktgruppe weiter verfolgt, gewinnt er die Mittel, um mehrere von Newton, Cotes, Maclaurin und Chasles gegebene Sätze über die Beziehungen zwischen einem Punkte und seiner Polargeraden bezw. Polarebene für ebene Curven und Flächen synthetisch abzuleiten und zu erweitern. Insbesondere wird nachgewiesen, dass auch für jede algebraische Raumcurve polare Beziehungen zwischen linearen Elementen stattfinden, und dass für jede derartige Curve ein Mittelpunkt im Chasles'schen Sinne als polares Element der unendlich fernen Ebenen existirt. Die so erhaltenen allgemeinen Sätze werden schliesslich zur Aufstellung mehrfacher neuer Beziehungen für die Raumcurven dritter Ordnung verwandt.

Scht.

Ch. Beyel. Centrische Collineation n^{ter} Ordnung und plane Collineation n^{ter} Klasse. Wolf Z. XXXI. 1-20.

Zu Grunde gelegt ist eine Fläche L^n von der n^{ten} Ordnung und ein Punkt C ausserhalb derselben. Ist P ein beliebiger Punkt des Raumes und schneidet der Strahl CP die Fläche L^n in den n Punkten $L_1, \ldots, L_n$, so sollen n Punkte $P'_1, \ldots, P'_n$ durch die Relationen

$$(CL_1PP'_1) = (CL_2PP'_2) = \cdots = (CL_nPP'_n) = \varDelta$$

bestimmt werden, worin $\varDelta$ eine constante Zahl bedeutet. Die n Punkte P' werden dann dem Punkte P zugeordnet und eine solche Beziehung eine centrische Collineation n^{ter} Ordnung mit der Charakteristik $\varDelta$ genannt. Hierzu in dualer Beziehung steht die in der Abhandlung gleichzeitig behandelte plane Collineation n^{ter} Klasse, welche durch eine Ebene E und eine Fläche L_n von der n^{ten} Klasse mit der Charakteristik $\varDelta$ bestimmt ist. Die erstere (welche im Folgenden allein berücksichtigt werden soll) wird durch das Symbol $(C\mathsf{L}^n\varDelta)$, die letztere durch $(E\mathsf{L}_n\varDelta)$ bezeichnet.

Jedem Punkte P sind durch eine centrische Collineation n^{ter} Ordnung n Punkte P' zugeordnet, z. B. in Bezug auf L_n der Punkt P'_n, der sich durch die Relation

$$(1) \qquad (CL_n PP'_n) = \varDelta$$

ergiebt. Betrachtet man nun P als zugehörig zu dem Raum der Punkte P' (dem „gestrichenen“ Raume), so sind ihm wiederum n Punkte P^* durch die Collineation $(C\mathfrak{L}^n\varDelta)$ zugeordnet, von denen beispielsweise der ihm in Bezug auf den Punkt L_n zugeordnete Punkt P^*_n durch die Gleichung

$$(2) \qquad (CL_n P^*_n P) = \varDelta$$

oder

$$(CL_n PP^*_n) = \frac{1}{\varDelta}$$

bestimmt ist. Somit giebt es in der centrischen Collineation $(C\mathfrak{L}^n\varDelta)$ zu jedem Punkt P zwei ihm in Bezug auf L_n (einen der n Punkte, in welchem der Strahl CP die Fläche $\mathfrak{L}^n$ schneidet) doppelt zugeordnete Punkte P'_n und P^*_n, für welche aus (1) und (2) die Beziehung folgt:

$$(CL_n P^*_n P'_n) = \varDelta^2.$$

Demnach stehen die doppelt conjugirten Elemente einer centrischen Collineation $(C\mathfrak{L}^n\varDelta)$ in einer centrischen Collineation $(C\mathfrak{L}^n\varDelta^2)$, und man kann sich daher darauf beschränken, zu untersuchen, welche Gebilde des gestrichenen Raumes gegebenen Gebilden des ungestrichenen Raumes entsprechen.

Bei dieser Untersuchung findet der Verfasser, dass in Bezug auf eine centrische Collineation $(C\mathfrak{L}^n\varDelta)$ einer Geraden g eine ebene Curve der n^{ten} Ordnung, deren Ebene durch C und g geht, einer Ebene P eine Fläche der n^{ten} Ordnung F^n entspricht. Sich selbst entsprechen das Centrum C und die Punkte von $\mathfrak{L}^n$, ferner die Geraden durch C. Einem unendlich fernen Punkte Q von gegebener Richtung sind n Punkte $Q'_1, \ldots, Q'_n$ zugeordnet, für welche die Relation gilt:

$$CL_n : CQ'_n = 1 - \varDelta,$$

einer unendlich fernen Geraden q entspricht in der Ebene durch C und q eine Curve $Q^{n'}$, welche zu L^n, der Schnittcurve der Ebene Cq mit der Fläche $\mathfrak{L}^n$, centrisch ähnlich liegt im Verhältnis $1-\varDelta$.

Mit Hülfe der zuletzt erwähnten besonderen Elemente wird hierauf die Construction derjenigen Punkte gelehrt, welche gegebenen Punkten des einen Raumes im andern Raume entsprechen. Die hierbei gefundene Methode ermöglicht dann die weitere Untersuchung der Beziehungen der beiden Räume zu einander. Aus den Resultaten sei erwähnt, dass entspricht:

einer Curve m^{ter} Ordnung, deren Ebene durch C geht, eine in derselben Ebene befindliche Curve mn^{ter} Ordnung,

einer ebenen Curve m^{ter} Ordnung überhaupt eine Raumcurve mn^{ter} Ordnung,

einer Raumcurve m^{ter} Ordnung eine Raumcurve mn^{ter} Ordnung,

einer Fläche m^{ter} Ordnung eine Fläche mn^{ter} Ordnung.

Hierauf werden als Specialfälle der centrischen Collineation diejenigen betrachtet, bei welchen C unendlich fern oder auf L^n gelegen ist.

Endlich werden die Fälle der allgemeinen centrischen Collineation $(C\mathsf{L}^n\Delta)$ näher untersucht, in welchen der Punkt P reell oder imaginär, dagegen die Punkte L_n, in denen der Strahl CP die Fläche L^n trifft, alle oder zum Teil imaginär sind.

Rdt.

Ch. Beyel. Zur Geometrie des Imaginären. Wolf Z. XXXI. 20-58.

Diese Abhandlung besteht aus vier Artikeln, von denen der erste über Imaginärprojectionen handelt. Zu Grunde gelegt ist die Theorie der centrischen Collineation erster Ordnung in der Ebene, bezeichnet durch das Symbol $(Cs\Delta)$, deren Bestimmungsstücke ein Punkt C als Centrum, eine Gerade s als Axe und eine Zahl Δ als Charakteristik sind. (Vergl. das vorhergehende Referat über eine Abhandlung desselben Verfassers). Der Verfasser lässt nun eins oder zwei oder drei der Bestimmungsstücke dieser centrischen Collineation imaginär, Δ auch complex werden und bezeichnet die im Raum ausgeführten Constructionen, durch welche zu einem gegebenen Element der Ebene das ihm entsprechende Element in derselben bestimmt wird, als eine

Imaginärprojection. Um beim Gebrauch einer bestimmten aus der Reihe der hiernach möglichen Collineationen mit imaginären Bestimmungsstücken anzudeuten, welches von diesen imaginär werden soll, wird in $(Cs\Delta)$ dem betreffenden Symbol der Index i beigefügt (wobei der Verfasser allerdings statt s_i immer nur i zu schreiben pflegt) und das complexe Δ mit Δ_c bezeichnet. Ausführlich behandelt wird, gleichsam als Paradigma, die Collineation $(Ci\Delta)$, welche also ein reelles Centrum und eine reelle Charakteristik, aber eine imaginäre Axe i besitzt, worunter eine imaginäre Gerade erster Art mit einem reellen Punkte S, gegeben durch eine elliptische Strahleninvolution, verstanden wird. Von den Ergebnissen der geometrischen Untersuchung, die wie gesagt durch Constructionen im Raume geführt wird, sei mitgeteilt: Jedem reellen Punkt auf der Geraden CS entspricht ein reeller Punkt auf CS. Jedem andern reellen Punkt P_1 in der Ebene der Collineation correspondirt ein imaginärer Punkt, welcher mit P_1 auf einer reellen Geraden durch C liegt. Einem imaginären Punkt aber entspricht wiederum ein imaginärer Punkt, die beiden correspondirenden Punkte liegen auf einer imaginären Geraden ϱ_i durch C; ihre reellen Träger schneiden sich in der reellen Geraden g, welche ϱ_i zugeordnet ist, und bilden mit dem Strahl nach C und mit g das Doppelverhältnis Δ. Einer reellen Geraden entspricht eine imaginäre Gerade erster Art, einer imaginären Geraden erster Art wiederum eine imaginäre Gerade erster Art.

Im zweiten Artikel „über imaginäre ebene Dreiecke“ wird ein reelles Dreieck EFG mit den Seiten e, f, g durch die Collineation $(Cs\Delta_c)$ in ein imaginäres Dreieck $E_iF_iG_i$ transformirt, dessen Ecken imaginäre Punkte sind, welche mit E, F, G auf Geraden durch C liegen. Die Seiten dieses Dreiecks sind imaginäre Gerade erster Art, deren reelle Punkte in den Schnittpunkten von e, f, g mit s gelegen sind.

Der dritte Artikel behandelt die Construction der „Schnittpunkte einer imaginären Geraden erster Art mit einem Kegelschnitt und die Correspondenz imaginärer Elemente im ebenen Polarsystem“.

Im vierten Artikel „Der Kegel zweiten Grades mit

imaginärer Spitze" wird ein solcher erzeugt gedacht durch die Geraden, welche die Punkte eines reellen Kegelschnitts mit einem imaginären Punkte C_i verbinden, der, auf einer reellen Geraden c liegend, durch eine elliptische Punktinvolution gegeben ist. Es wird bewiesen, dass ein solcher Kegel K_i^2 noch eine zweite reelle Leitcurve zweiter Ordnung besitzt, wenn der reelle Träger der Spitze die Ebene der ersten Leitcurve in einem Punkte schneidet, welcher in Bezug auf diesen hyperbolisch ist. Wird dagegen dieser Punkt elliptisch, so hat der Kegel eine zweite imaginäre Leitcurve zweiter Ordnung. Demnach unterscheidet der Verfasser hyperbolisch imaginäre Kegel und elliptisch imaginäre Kegel, zwischen welchen als Grenzfall der parabolisch imaginäre Kegel liegt, bei welchem der reelle Träger der Spitze eine Leitcurve schneidet. Ferner wird gezeigt, dass eine reelle Gerade den Kegel K_i^2 im allgemeinen in zwei nicht conjugirten imaginären Punkten trifft, und dass durch jeden reellen Punkt des Raumes im allgemeinen zwei Tangentialebenen und zwei reelle Tangenten an K_i^2 gehen. Rdt.

C. Segre. Le coppie di elementi imaginari nella Geometria projettiva sintetica. Torino Mem. (2) XXXVIII. 24 S.

D'Ovidio e Bruno. Relazione. Torino Atti. XXI. 545-547.

Bei allen Aufgaben der elementaren projectivischen Geometrie treten die imaginären Elemente stets paarweise auf; darum ist es nicht nötig, die ganze Theorie des Imaginären zu entwickeln, welche v. Staudt auf den Begriff des Sinnes einer Figur gegründet hat. Dies ist von allen Schriftstellern anerkannt; aber was selbst die besten nicht bemerkt haben (Steiner-Schroeter, Reye, Cremona, Hankel, Thomae), ist der Umstand, dass die weiteren Darstellungen der Theorie der Paare imaginärer Elemente durchaus nicht befriedigend waren, bald aus diesem, bald aus jenem Grunde, wie Hr. Segre in dem Vorworte der anzuzeigenden Abhandlung näher ausführt. Deshalb [illegible]

der Verfasser die Frage von vorn an wieder aufnehmen zu müssen. Die Art der Lösung wird aus unserem Berichte erhellen; um jedoch eine Vorstellung von ihr zu geben, wollen wir gleich hier sagen, dass sie ihre Grundlage in der Betrachtung der unter einander vertauschbaren Transformationen hat, und derjenigen, welche eine gegebene Transformation in sich selbst überführen.

Eine elliptische Involution in (d. h. zwischen) den Elementen einer Form erster Stufe heisst „Paar imaginärer Elemente“ oder auch „Paar (imaginärer) Ordnungselemente der Involution.“ Diese Definition ist gestattet; denn wenn die elliptische Involution keine Ordnungselemente im ursprünglichen Sinne hat, so kann man diesem Ausdrucke eine neue Bedeutung geben. Dann entspricht jedem Elementenpaare eine bestimmte Involution.

Zwei Elementenpaare desselben Gebildes heissen „harmonisch“, wenn die entsprechenden Involutionen unter sich vertauschbar sind; eins dieser Paare ist sicherlich reell. Die Elemente eines imaginären Elementenpaares sind „conjugirt“ in einer Involution, wenn die entsprechende Involution mit dieser harmonisch ist; folglich hat eine elliptische Involution nur reelle Paare conjugirter Elemente, während eine hyperbolische Involution auch imaginäre hat.

Es giebt eine einzige mit einer gegebenen Homographie vertauschbare Involution; das Element, welches in ihr einem gegebenen Elemente A des Gebildes entspricht, ist das harmonisch conjugirte zu A in Bezug auf die Elemente, welche A in der gegebenen Homographie und ihrer inversen entsprechen. Wir werden sie „Ordnungsinvolution“ der gegebenen Homographie nennen und wollen bemerken, dass, wenn diese Correspondenz reelle Ordnungselemente hat, dasselbe für die Ordnungsinvolution eintritt, und dass ihre Ordnungselemente diejenigen der Homographie sind. Diese Bemerkung führt zur folgenden Definition: „Paar von Ordnungselementen einer Projectivität“ ist das Paar von Ordnungselementen ihrer Ordnungsinvolution. Vermöge dieser Definition ist es leicht, die wichtigsten Beziehungen zwischen den reellen

Ordnungselementen einer Projectivität und ihren Elementenpaaren zu verallgemeinern. Wir führen einige Beispiele an:

Eine Homographie wird durch ihre Ordnungsinvolution und durch ein Paar entsprechender Elemente bestimmt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Homographien vertauschbar sind, besteht darin, dass sie dieselbe Ordnungsinvolution haben. In einer Homographie ist die aus den Ordnungselementen und einem Paare entsprechender Elemente gebildete Gruppe zu einer festen Gruppe projectivisch. U. s. w.

Nach einem solchen Aufbau der Principien der Theorie der imaginären Elementenpaare geht der Verfasser auf ihre Anwendung in der Theorie der Kegelschnitte ein.

Indem er mit der graphischen Theorie anhebt, zeigt er eine bedeutsame Lücke, welche den gewöhnlichen Darstellungen anhaftet. Nachdem eine Curve zweiter Ordnung durch zwei projectivische Strahlenbüschel erzeugt ist, stellt sich das Schnittpunktepaar der Curve mit einer Geraden ihrer Ebene als das Paar von Doppelpunkten der binären Homographie dar, welche auf der Geraden durch diese Büschel bestimmt ist. Wenn die Elemente dieses Paares reell sind, so ist es augenscheinlich, dass sie von der Lage der Centren der erzeugenden Büschel auf der Curve unabhängig sind. Kann man dasselbe behaupten, wenn sie imaginär sind? Offenbar darf man es nicht behaupten, ohne es zu beweisen; nichtsdestoweniger beweist es niemand. Diese Lücke wird vom Verfasser in No. 16 seiner Abhandlung glücklich ausgefüllt, und der von ihm eingeschlagene Weg führt ihn auch zu einem ganz allgemeinen Beweise des Desargues'schen Theorems betreffs des einem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks. Wir halten auch den neuen Gesichtspunkt für beachtenswert, unter welchem Hr. Segre die Sätze über das Hexagrammum mysticum betrachtet, ebenso den Beweis des Sturm'schen Theorems über die Kegelschnittbüschel, welcher jede wünschenswerte Allgemeinheit hat. (In diesem Falle werden die Kegelschnitte nach der v. Staudt'schen Art erklärt, d. h. als „Ordnungscurven“ polarer involutorischer Systeme; das Schnittpunktepaar einer derartigen Curve mit einer Geraden ist das Paar von

Ordnungspunkten der auf dieser Geraden liegenden Involution conjugirter Punkte in Bezug auf die Curve.)

Indem der Verfasser nunmehr zur metrischen Theorie der Curven zweiter Ordnung übergeht, stützt er sich teilweise auf die merkwürdige Schrift von v. Staudt: „Von den reellen und imaginären Halbmessern der Curven und Flächen II. Ordnung“. Er entwickelt einige Ueberlegungen, die ihn zu einem sehr einfachen und ganz allgemeinen Beweise des Carnot'schen Theorems führen. Wir meinen, der Leser wird uns Dank wissen, wenn wir das Wesen desselben erläutern. Man betrachte in einer Ebene einen Kegelschnitt Γ (nach der v. Staudt'schen Art definirt) und ein Dreieck mit den Ecken A, B, C und den Seiten r', r'', r'''. Es seien A'', A''' die zu A conjugirten Punkte in den beiden auf r'' und r''' liegenden Involutionen von conjugirten Punkten in Bezug auf Γ, und A' sei der Schnittpunkt von r' mit der Polare von A bezüglich Γ; B', B'', B''' und C', C'', C''' mögen die entsprechenden Bedeutungen haben. Erinnert man sich, dass A', B', C' auf einer und derselben Geraden liegen, und wendet man das Fundamentaltheorem der Transversalentheorie mehrere Male an, so findet man die Gleichung:

$$\frac{BB'\,.\,BC'}{CB'\,.\,CC'}\cdot\frac{CC''\,.\,CA''}{AC''\,.\,AA''}\cdot\frac{AA'''\,.\,AB'''}{BA'''\,.\,BB'''}=1.$$

Wenn man aber A_1, A_2 die Schnittpunkte von r' mit Γ nennt, so folgt aus einem Hülfssatze, welchen der Verfasser bereits früher bewiesen hat:

$$\frac{BB'\,.\,BC'}{CB'\,.\,CC'}=\frac{BA_1\,.\,BA_2}{CA_1\,.\,CA_2}.$$

Diese Relation und die beiden entsprechenden wandeln die vorangehende in die folgende um:

$$\frac{BA_1\,.\,BA_2}{CA_1\,.\,CA_2}\cdot\frac{CB_1\,.\,CB_2}{AB_1\,.\,AB_2}\cdot\frac{AC_1\,.\,AC_2}{BC_1\,.\,BC_2}=1,$$

genau die des Carnot'schen Theorems. Diese Schlussfolgerung kann in umgekehrter Ordnung wiederholt werden; mithin ist die Umkehrung des Satzes richtig.

Zur Vervollständigung der Theorie der imaginären Elementenpaare muss man auch von den Paaren windschiefer Geraden

sprechen; der Verfasser widmet ihnen die beiden letzten Nummern seiner Arbeit. Er nennt „Paare imaginärer windschiefer Geraden“ ein „geschart involutorisches System“ ohne „Ordnungselemente“ und zeigt nebenbei, wie man, teilweise auf die „Beiträge zur Geometrie der Lage“ sich stützend, die Eigenschaften der Paare reeller Geraden verallgemeinern kann.

Da wir leider über diese wichtige Arbeit des Hrn. Segre nichts Ausführlicheres beibringen dürfen, so wollen wir schliesslich ein gründliches Studium derselben allen denjenigen Lehrern anraten, welche einwurfsfreie genaue Lehren statt solcher vortragen wollen, die sich nur durch scheinbare Einfachheit empfehlen. Zweifelsohne wird man die Ueberzeugung gewinnen, dass die hier entwickelten Gegenstände nicht bloss unter dem wissenschaftlichen Gesichtspunkte beachtungswert sind, sondern dass sie sehr wohl in dem Unterrichte nutzbar gemacht werden können. Dies ist nicht allein die persönliche Ueberzeugung des Berichterstatters, sondern das Ergebnis der Erfahrung, welche man bereits an den Universitäten von Turin und Neapel gemacht hat. La. (Lp.)

A. Mouchot. Sur les principes fondamentaux de la géométrie supérieure. C. R. CIII. 1110-1112.

Der Verfasser will der Akademie eine vollständige Lösung einer Aufgabe vorlegen, mit der er sich seit 30 Jahren beschäftigt hat, und die bezweckt, erstens die geometrischen Figuren dadurch zu verallgemeinern, dass man ihnen wohl definirte imaginäre Punkt zuerteilt, zweitens zu beweisen, dass alle algebraischen Symbole Grössen- oder Lagen-Verhältnisse zwischen den Elementen dieser Figuren ausdrücken. Den Ausgangspunkt bildet der Gedanke, in der Gesamtheit zweier gewöhnlichen Punkte (Componenten) nur einen einzigen reellen Punkt zu sehen, wenn die beiden Componenten über einander liegen, einen einzigen imaginären Punkt aber zu sehen, wenn sie getrennt liegen. In wiefern die Betrachtungen des Verfassers einen Fortschritt in

der geometrischen Forschung bilden oder vorbereiten, ist dem Referenten aus der vorliegenden Note nicht erkennbar geworden.

Scht.

G. Brunel. Note sur l'analyse indéterminée et la géométrie à n dimensions. Bordeaux Mém. (3) II. 129-142.

Im ersten Abschnitt zeigt der Verfasser die Nützlichkeit einer geometrischen mehr-dimensionalen Interpretation für die unbestimmte Analysis an einem Beispiel, indem er einen gewissen speciellen Typus von Gleichungen n^{ten} Grades mit mehreren Unbekannten, als deren einfachster Fall die Form

$$x^3+y^3 = z^3+u^3$$

auftritt, in ganzen Zahlen auflöst, wozu er nur des „Schneidens" linearer Räume bedarf. Im zweiten Abschnitt werden (im wesentlichen bekannte) Relationen zwischen den Grössen ermittelt, die in höheren linearen Räumen an die Stelle der gewöhnlichen Liniencoordinaten p_{ik} treten.

My.

A. Capelli. Su un problema di Schoute. Palermo Rend. I. 48, 53.

Der Wortlaut folgender Aufgabe aus einem von Herrn Schoute an Herrn Guccia gerichteten Briefe ist in der Sitzung vom 10. Mai 1885 im Circolo matematico verlesen worden: „Eine Oberfläche zweiter Ordnung S mit dem Mittelpunkte C und eine Ebene P, die zu einer der Axen AA' im Halbirungspunkte B von CA' senkrecht steht, seien gegeben. Man gelange von einem beliebigen, mit M_{2n} bezeichneten Punkte des Raumes zum correspondirenden Punkte M_{2n+1}, indem man auf der Geraden CM_{2n} den in Bezug auf S zu M_{2n} conjugirten Punkt aufsucht, und von einem beliebigen Punkte M_{2n+1} zum correspondirenden Punkte M_{2n+2}, indem man den in Bezug auf P symmetrischen Punkt von M_{2n+1} nimmt; es ist zu beweisen, dass $M_{m+6} = M_m$ für jeden Punkt M des Raumes, und es ist der Ort derjenigen Punkte aufzusuchen, für welche $M_{m+2} = M_m$, für welche $M_{2n+3} = M_{2n}$,

oder für welche $M_{2n+4} = M_{2n+1}$". Diese mit Hülfe der Coordinaten-Methode leicht zu lösende Aufgabe veranlasst Herrn Capelli, merkwürdige Ueberlegungen über anscheinend bestimmte geometrische Aufgaben anzustellen, welche dennoch unendlich viele Lösungen besitzen. Leider ist die Form eines Auszugs, in welcher sie dargestellt sind, nicht zu einem für die Leser des Jahrbuchs verständlichen Berichte geeignet. Um jedoch eine Vorstellung von ihnen zu geben, wollen wir folgende Sätze anführen, welche zuweilen von Nutzen sein können. Sind $f(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ die beiden Gleichungen bezw. vom Grade m und $n \leqq m$, welche die Coordinaten x, y derjenigen Punkte einer Ebene bestimmen, welche den Bedingungen einer gewissen Aufgabe genügen, so werden, wenn diese Bedingungen durch die $(m+1)^2$ Schnittpunkte zweier Büschel von je $m+1$ Geraden der Ebene befriedigt sind, alle Punkte der Ebene diesen Bedingungen ohne Frage genügen. Wenn die Punkte einer Ebene, welche vorgegebenen Bedingungen genügen, als vereinigte Punkte einer algebraischen Verwandtschaft vorkommen, in welcher einer Geraden einer Figur eine Curve von der Ordnung n der anderen entspricht, und wenn diese Verwandtschaft so beschaffen ist, dass man die Existenz von Curven beweisen kann, von denen alle Punkte vereinigt sind und deren Ordnungen eine Summe $\geqq n$ geben, so sind alle Punkte der Ebene vereinigt.

La. (Lp.)

B. Besondere ebene Gebilde.

G. Kohn. Ueber das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck. Wien. Ber. XCIII. 314-352.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Gerade einer Ebene, so bestimmt der Verfasser zu jeder dieser Linien den Pol in Bezug auf das Dreiseit der drei anderen. Es ergiebt sich auf diese Weise ein Viereck $abcd$, welches das dem Vierseit $\alpha\beta\gamma\delta$ associirte Viereck genannt

wird. Die Beziehung zwischen $\alpha\beta\gamma\delta$ und *abcd* ist eine gegenseitige, beide haben dasselbe Diagonal-Dreieck. Es giebt einen Kegelschnitt K, welcher bei Realität von $\alpha\beta\gamma\delta$ freilich imaginär ist, der bei allen Collineationen, welche $\alpha\beta\gamma\delta$ in sich überführen, ebenfalls in sich transformirt wird. $\alpha\beta\gamma\delta$ und *abcd* sind Polvierseit resp. Polviereck von K und auch bezüglich K einander reciprok. Es findet sich ein Kegelschnittpaar K' und K'', welches bei allen diesen Collineationen in sich übergeführt wird; es berührt die Seiten α, β, γ, δ und geht durch die Punkte a, b, c, d der Art, dass für beide Curven das Doppelverhältnis der vier gemeinsamen Elemente ein äquianharmonisches ist. Die Beziehungen zwischen den Kegelschnitten K, K' und K'', welche nach Battaglini ein conjugirtes Tripel genannt werden, sind vollständig symmetrisch. Es wird dann nachgewiesen, dass es im ganzen 10 Kegelschnitte giebt, in Bezug auf welche $\alpha\beta\gamma\delta$ und *abcd* einander polar sind. Sie zerfallen in zwei Gruppen. Die ersten vier bilden ein System sogenannter harmonischer Kegelschnitte, die sechs andern eine bemerkenswerte Figur, welche früher noch nicht untersucht worden ist.

Für den Raum werden ähnliche Betrachtungen gemacht. Durch ein Fünfflach $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist ein ihm associirtes Fünfeck *abcde* dadurch bestimmt, dass a der Pol von α bezüglich des Tetraeders $\beta\gamma\delta\varepsilon$ ist etc. Die Flächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche beide Figuren polar sind, bilden zwei merkwürdige Gruppen, eine von 10, eine andere von 15 Flächen, deren gegenseitige Lagen betrachtet werden.

Zum Schlusse werden die Gleichungen der Curven- und Flächensysteme aufgestellt. W. St.

R. Böger. Ueber die Aufgabe, durch fünf Punkte eine Curve zweiter Ordnung zu legen. Hamb. Mitt. 131-132.

Für die Aufgabe, durch einen Punkt einen auf zwei Strahlen involutorische Punktreihen erzeugenden Kegelschnitt zu legen, werden immer Lösungen gegeben, welche verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem die Strahlen Doppelpunkte enthalten

oder nicht. Deshalb leitet der Verfasser aus einem Satze über ineinander liegende involutorische Elementargebilde eine Construction ab, welche für alle Fälle zugleich gültig ist. Scht.

R. Lachlan. A geometrical theorem. Mess. XV. 155-158.

Eine Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes; auf diesen kommt das Theorem zurück, wenn drei der betreffenden Kegelschnitte sich in Paare von Geraden auflösen. Ein ähnlicher Steiner'scher Satz wird auch erhalten, und einige besondere Fälle werden betrachtet. Glr. (Lp.)

F. Morley. A nine-line conic. Mess. XV. 190-192.

Ist ein Kegelschnitt U und eine Gerade L gegeben, so kann man vier Punkte P, Q, R, S auf L so bestimmen, dass eine Tangente von jedem derselben an U von einem gegebenen Punkte K aus unter einem rechten Winkel erscheint. Ein Kegelschnitt V kann beschrieben werden, welcher diese vier Tangenten, die Gerade L und die Polare von K in Bezug auf U berührt. Der Verfasser zeigt, dass dieser Kegelschnitt V neun wohl bezeichnete Linien berührt. Glr. (Lp.)

M. d'Ocagne. Note sur les coniques. Teixeira J. VIII. 104-108.

Wenn eine Gerade PQ sich um einen Punkt M dreht und die Seiten AB und AC eines Dreiecks ABC resp. in den Punkten P und Q schneidet, so beschreibt der Durchschnittspunkt J der Geraden PC und QB einen Kegelschnitt, der dem Dreieck ABC umschrieben ist und in B und C von den Geraden MB und MC tangirt wird. Der Verfasser giebt an, wie man die Tangenten an diesem Kegelschnitt construiren und seinen Mittelpunkt bestimmen kann. Aus diesen Betrachtungen leitet Herr d'Ocagne verschiedene einfache Constructionen für einen Kegelschnitt ab, wenn man kennt: drei seiner Punkte und die Tangenten in zweien

von ihnen; vier seiner Punkte und die Tangente in einem von ihnen; fünf seiner Punkte; oder drei seiner Punkte und seinen Mittelpunkt.

Darauf untersucht er eine allgemeine Curventransformation, die folgendermassen entsteht: Es sei ein Dreieck ABC gegeben; man lege an eine gegebene Curve Γ eine Tangente, welche AB in P und AC in Q schneidet. Die Geraden PC und BQ schneiden sich in einem Punkte J. Wenn man dann die Tangente PQ um die Curve Γ sich wälzen lässt, so beschreibt der Punkt J eine Curve Γ', welche die transformirte der ersten ist. Zum Schluss zeigt der Verfasser, wie sich die obigen Resultate bei der Transformation durch reciproke Polaren gestalten.

Tx. (Hcb.)

H. E. M. O. Zimmermann. Beweis eines Lehrsatzes von Jakob Steiner. Schlömilch Z. XXXI. 121-125.

„Unabhängig von Steiner“ hatte der Verfasser schon vor sieben Jahren einen von Steiner im XXX. Bande des Crelle'schen Journals (S. 274) mitgeteilten Satz gefunden, den er nun hier beweist. Dieser Satz lautet: Ist einem vollständigen Viereck ein beliebiger Kegelschnitt umbeschrieben, und werden in den Ecken desselben an den letzteren die Tangenten gelegt, so wird jede der sechs Seiten des Vierecks von den Tangenten in den beiden ihr nicht anliegenden Ecken in zwei Punkten so geschnitten, dass von den entstandenen 12 Punkten immer 3mal 8 in irgend einem Kegelschnitt liegen; jedes von den 3 Punkt-Octupeln hat zudem die Eigenschaft, dass sie auf dreifache Art paarweise in vier Geraden liegen, welche sich immer in einem der drei Diagonalpunkte des Vierecks schneiden.

Scht.

C. Schirek. Zur Construction des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten. Hoppe Arch. (2) III. 318-324.

Herr Mannheim giebt auf S. 285 seines „Cours de géométrie descriptive, Paris 1880“ für die Construction des Krümmungs-

mittelpunkts des ebenen Schnittes einer beliebigen Fläche ein Verfahren an, das darin besteht, dass man die Curve als Leitcurve einer Normalenfläche der Fläche auffasst, welche man mittels orthogonaler Projection auf die Schnittebene bezieht. Der Verfasser zeigt nun, wie dieses Princip zur Construction des Krümmungsmittelpunkts einer ebenen Curve überhaupt benutzt werden kann, und führt dies zunächst an einem Kegelschnitt durch, indem er einen durch denselben gehenden Rotationskegel zu Hülfe nimmt. Scht.

Fr. Hofmann. Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Leipzig. Teubner. IV. u. 109 S.

Das Hauptproblem, dessen Lösung sich der Verfasser zur Aufgabe gemacht hat, ist folgendes: Methoden anzugeben, nach welchen die zwei reellen Kegelschnitte construirt werden können, die einen vorgegebenen reellen oder imaginären Kegelschnitt in zwei verschiedenen (nicht vorgegebenen) Punkten berühren und zugleich durch drei vorgegebene Punkte gehen, von denen nur einer reell ist, die beiden andern imaginär. Dem Verfasser ist es aber hierbei weniger darum zu thun, auf kürzestem Wege zur Lösung dieses Problems zu gelangen, als vielmehr darum, das reichhaltige Uebungsmaterial an Aufgaben und Sätzen, das sich auf dem Wege zur Lösung einfindet, dem Leser in anschaulicher Weise darzubieten und ihm so einen Ueberblick über die wichtigsten Sätze der Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung, insbesondere ihrer Uebertragbarkeit in das Gebiet des Imaginären zu ermöglichen. Deshalb giebt der Verfasser eine dreifache Lösung des Hauptproblems. Zunächst liefert die darstellende Geometrie das Princip zu einer übersichtlichen Behandlung der Theorie der doppelt berührenden Kegelschnitte, indem bei der Abbildung einer Oberfläche der zweiten Ordnung mit einem auf ihr gelegenen ebenen Schnitt die Contourcurve der Abbildung von dem Bilde der Schnittcurve doppelt berührt wird. Die durch solche Betrachtungen sich ergebenden Sätze

über Kegelschnitte in doppelter Berührung führen zu einer ersten Lösung des Hauptproblems, welche nur in der Ebene auszuführende Constructionen erfordert. Die zweite Lösung erfolgt durch Zuhülfenahme des Raumes, nachdem der Weg hierzu durch eine Erörterung des Zusammenhangs der Geometrie der doppelt berührenden Kegelschnitte mit jener der Kugelkreise oder der Kreiskegel gebahnt worden ist. Die dritte Lösung geschieht gleichfalls mit Hülfe von räumlichen Constructionen, welche den Methoden der darstellenden Geometrie entnommen sind. Es wird nämlich die Bestimmung von Kegelschnitten in doppelter Berührung zurückgeführt auf die Bestimmung von räumlichen Schnittcurven auf Flächen zweiter Ordnung. Die zweite und dritte Methode ergänzen sich gegenseitig, indem da, wo die zweite nicht zum Ziele führt, die dritte mit Nutzen verwendet werden kann und umgekehrt. Die letzten Paragraphen geben einen Anhang über Kegelschnitte in vierpunktiger Berührung.

Rdt.

F. Amodeo. Sulle coniche bitangenti a due coniche. Batt. G. XXIV. 346-353.

Für zwei in derselben Ebene gegebene Kegelschnitte φ_1, φ_2 giebt es ∞^1 Kegelschnitte ψ, welche alle beide doppelt berühren; dieselben bilden drei verschiedene Scharen. Sind E, F, G die Ecken und e, f, g die Seiten des gemeinschaftlichen conjugirten Dreiecks zu φ_1 und φ_2, so liegen die Berührungspole der Kegelschnitte ψ_e einer dieser Scharen auf der Geraden e, während die entsprechenden Berührungssehnen durch E gehen; ähnliche Eigenschaften besitzen die Kegelschnitte ψ_f, ψ_g der anderen Scharen bezüglich f, F und g, G. (Vgl. z. B. Chasles, Sections coniques. No. 482). Das Ziel der zu besprechenden Note des Herrn Amodeo ist der rein synthetische Beweis einiger projectivischer Eigenschaften des Curvensystems ψ. Zunächst beweist der Verfasser, dass der Ort der Pole einer Geraden p in Bezug auf die Kegelschnitte ψ_e einer und derselben Schar ein Kegelschnitt Θ_e ist, welcher durch die Pole P_1, P_2 von p in Bezug

auf φ_1 und φ_2 geht, ausserdem noch durch andere merkwürdige Punkte. (Vgl. Chasles, l. c. No. 494). Die beiden anderen Scharen geben zwei andere ähnliche Kegelschnitte Θ_f, Θ_g. Die drei Kegelschnitte Θ_e, Θ_f, Θ_g gehören demselben Büschel an. Setzt man jeder Geraden p die vier Grundpunkte dieses Büschels als entsprechend, so kommt man zu einer eigentümlichen Verwandtschaft (von welcher der Verfasser am Ende seiner Arbeit redet), in welcher jedem Strahlenbüschel drei Curven vierter Ordnung entsprechen, und die kein grosses Interesse zu besitzen scheint. Wenn man in den vorerwähnten Theoremen p im Unendlichen annimmt, so gelangt man zur Verteilung der Mittelpunkte der Kegelschnitte ψ.

Da das System der Kegelschnitte ψ zu sich selbst correlativ ist, so haben alle obigen Eigenschaften ihre correlativen. Diese Eigenschaften erleiden Abänderungen, wenn einer der beiden Kegelschnitte oder alle beide ausarten. (Vgl. Chasles, l. c. No. 495). Diese Abänderungen werden von Herrn Amodeo in No. 4 seiner Note festgestellt.

Die vorstehenden Lehrsätze liefern die Mittel zur „Auffindung der Kegelschnitte, welche mit zwei gegebenen Kegelschnitten eine doppelte Berührung haben und ausserdem durch einen Punkt gehen oder eine Gerade berühren“. Beide Aufgaben sind sechsten Grades (die Charakteristiken des Kegelschnittsystems ψ sind mithin 6 und 6); allein die Lösung jeder einzelnen kommt auf die dreier Aufgaben zweiten Grades zurück, wenn man die Aufgabe (dritten Grades) gelöst hat, die singulären Kegelschnitte des von den gegebenen Curven bestimmten Büschels aufzusuchen. (Vgl. Chasles, l. c. No. 497, VII. u. VIII.).

Wenn man für den Kegelschnitt φ_2 einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels (φ_1 φ_2) setzt, so ergiebt sich der Satz: Die Kegelschnitte, welche die Oerter der Pole einer und derselben Geraden p in Bezug auf alle Kegelschnitte ψ_e sind, die mit dem Kegelschnitte φ_1 und einem Kegelschnitte des Büschels (φ_1 φ_2) doppelte Berührung haben, bilden einen Büschel von Curven, welche dieselbe Gerade in demselben Punkte berühren. Indem

man für φ_2 einen Kegelschnitt der Schar $(\varphi_1 \varphi_2)$ setzt, findet man den correlativen Satz.

Endlich: Die Kegelschnitte, welche die Oerter der Pole der Geraden der Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte sind, welche doppelte Berührung mit den Paaren von je zwei Curven desselben Büschels (oder derselben Schar) haben, bilden drei Netze (oder bezw. drei Gewebe). La. (Lp.)

V. Retali. Sulle coniche conjugate. Bologna Me[illegible] 189-198.

Von den vier „conjugirten" Kegelschnitten U_0, U_1, [illegible] hinsichtlich deren zwei Kegelschnitte U und U' einander p[illegible] gegenüberstehen, ist bekanntlich jeder einzelne hinsichtlich jed[illegible] anderen zu sich selbst polar reciprok. Allen sechs Kegelschnitten ist ein Tripel conjugirter Punkte gemeinsam. Irgend zwei der vier Kegelschnitte gehen eine doppelte Berührung ein; die Berührungspunkte liegen auf einer Seite des autopolaren Dreieckes, während die Tangenten sich in der gegenüberliegenden Ecke treffen. Die beiden Paare von Berührungspunkten, die auf einer Seite liegen, trennen einander und auch die auf der Seite liegenden Ecken harmonisch. Herr Retali erweist zunächst, wie einfach diese bekannten Sätze aus den Gleichungsformen abzulesen sind, die Herr Battaglini für dieses System von Kegelschnitten entwickelt hat.

Macht man den Coefficienten einer Homologie-Beziehung gleich $\pm i$, und lässt man die Axe mit der Polare des Centrums O hinsichtlich eines Kegelschnittes K zusammenfallen, so erhält man bekanntlich aus K einen hinsichtlich seiner zu sich selbst polar-reciproken Kegelschnitt K_0. Dieser Zusammenhang kann auch so ausgedrückt werden, dass je zwei der drei Punktepaare $r(K)$, $r(K_0)$, $O(ro)$, wenn r von O ausgeht, einander harmonisch trennen. Ist nun XYZ das Tripel conjugirter Punkte für U_0, U_1, U_2, U_3, so gehören je zwei von diesen Kegelschnitten in der beschriebenen Weise zu einem der Punkte X, Y, Z. Das Nähere dieser Anordnung ist aus einem von Herrn Retali auf-

lten Täfelchen zu ersehen. Aus irgend einem Tripel con-ter Punkte eines Kegelschnittes U_0 erhält man stets drei dere, $U_1 = (U_0)_x$, $U_2 = (U_0)_y$, $U_3 = (U_0)_z$, die in dem beschriebenen Zusammenhange stehen. Ist U_0 selbst reell und ebenso das vorliegende Tripel, so werden zwei von diesen Kegelschnitten reell sein, während der dritte eine imaginäre Ellipse ist.

Höchst interessant ist die in No. XIV ausgesprochene Eigenschaft, dass zwei conjugirte Kegelschnitte auch harmonisch homolog sind, und zwar in einem System, das den einen Berührungspunkt zum Centrum, die Tangente in dem andern aber zur Axe hat. Hinsichtlich unendlich ferner Punkte sind daher zu einer gegebenen congruente Parabeln conjugirt. Jede solche Parabel ist zu der gegebenen central-symmetrisch angeordnet.

Bildet man bei einem reellen Kreise U_0 das Poltripel aus dem Centrum und zwei unendlich fernen Punkten, so sind zwei Kegelschnitte aus der Gruppe U_0, U_1, U_2, U_3 gleichseitige Hyperbeln, während der letzte ein imaginärer Kreis ist.

Zum Schlusse bemerkt Herr Retali, dass man bei Untersuchung des entsprechenden Zusammenhanges im Raume Flächen zweiter Ordnung zu unterscheiden habe, die zu einer gegebenen hinsichtlich eines Punktes und seiner Polare conjugirt sind und andere, die zu ihr hinsichtlich zweier polar gegenüberstehender Geraden conjugirt sind. Die Flächen der ersten Art berühren längs Kegelschnitten, die der zweiten Art schneiden in den Geraden unebener Vierseite. Eine ausführliche Behandlung wird in Aussicht gestellt. Diese Verhältnisse sind übrigens von den Herren Del Pezzo und Sturm (cfr. F. d. M. XVII. 1885. 644-646) unlängst erörtert worden. E. K.

J. S. Vaněček. Sur le réseau de coniques du deuxième indice. Prag. Ber. 281-289.

Die Kegelschnitte der vom Herrn Verfasser betrachteten Schar berühren drei feste Tangenten S, T, U und zwei bewegliche, D_1 u. D_2, die um Punkte von S, s_1 und s_2 sich drehen und einen diese Punkte enthaltenden Kegelschnitt Σ erzeugen. Die Mittelpunkte dieser

Kegelschnitte liegen auf einem Kegelschnitte, da die Mittelpunktsgeraden der Scharen, die durch homologe Quadrupel S, T, U, D_1 bez. S, T, U, D_2 bestimmt werden, projectivische Strahlbüschel beschreiben, wenn der Schnittpunkt von D_1 und D_2 über Σ bewegt wird. Da alle Kegelschnitte, die neben S, T, U irgend eine vierte Gerade berühren, ihre Mittelpunkte auf einer Geraden haben, so enthält die betrachtete Reihe genau zwei die erstere berührende Kegelschnitte; die einfach unendliche Reihe ist daher vom Index 2. Die bewegliche Linie, welche die Berührungspunkte von D_1 und D_2 verbindet, umhüllt einen Kegelschnitt; die Berührungspunkte selbst beschreiben Curven dritter Ordnung mit je einem Doppelpunkt in s_1 bez. s_2. Einleitende Bemerkungen, nach denen die Σ erzeugenden Strahlbüschel mit den Centren s_1 und s_2 als homologe Bestandteile collinearer Ebenen betrachtet werden, stehen mit dem Gegenstande der Abhandlung selbst nur in lockerem Zusammenhange. E. K.

J. S. Vaněček. Sur le réseau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice. Prag. Ber. 314-326.

Die Entstehungsweise der Kegelschnittreihe ist genau die entsprechende zu der soeben besprochenen, nur wird statt Σ eine Curve n^{ter} Ordnung zu Grunde gelegt. Die Mittelpunktscurve ist im allgemeinen Falle eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit drei n-fachen Punkten. Dieselben halbiren die Strecken pq, s_1r, s_2r, wobei mit p, q, r die Schnittpunkte ST, SU, TU bezeichnet werden. Enthält Σ die Punkte s_1, s_2, r bez. k-fach, l-fach, m-fach, so liegen die Mittelpunkte auf einer Curve der Ordnung $(2n-k-l-m)$, die die Halbirungspunkte der Strecken pq, s_1r, s_2r bezw. $(n-k-l)$-fach, $(n-l-m)$-fach, $(n-k-m)$-fach enthält. Im ersten Fall wird eine beliebige Gerade von $2n$, im zweiten von $2n-k-l-m$ Kegelschnitten berührt. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte von D_1 und D_2 beschreibt im allgemeinen eine Curve $2n^{\text{ter}}$, im besonderen Falle eine solche $(2n-k-l-m)^{\text{ter}}$ Klasse; s_1s_2, s_1r, s_2r sind im allgemeinen n-fache, im besonderen Falle $(n-k-l)$-, $(n-l-m)$-, $(n-k-m)$-fache Tan-

genten der Curve. Der Berührungspunkt δ_1 von D_1 beschreibt im allgemeinen eine Curve $2n^{\text{ter}}$, im besonderen Falle eine solche $(2n-l-m)^{\text{ter}}$ Ordnung. E. K.

J. S. VANĚČEK. Sur le faisceau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice. Prag. Ber. 451-453.

Der betrachtete Kegelschnittbüschel steht der in den beiden soeben besprochenen Abhandlungen betrachteten Schar dualistisch gegenüber. Alle Curven desselben haben also drei Punkte mit einander gemein. Zwei bewegliche Punkte des Kegelschnittes der Reihe werden von einer Tangente einer Curve n^{ter} Klasse auf zwei Geraden ausgeschnitten, die von einem der drei Punkte ausgehen. Anstatt nach dem Dualitätsprincip die Eigenschaften des Büschels zu ermitteln, kann man auch, analog wie es in den früheren Abhandlungen geschah, von den Eigenschaften der Mittelpunktscurve ausgehen, die hier von der $4n^{\text{ten}}$ Ordnung ist und ausser drei $2n$-fachen Punkten noch zwei n-fache Punkte besitzt. E. K.

J. K. MEISTER. Ueber die Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Polardreieck, bez. durch Flächen mit einem gemeinsamen Polartetraeder gebildet werden. Schlömilch Z. XXXI. 321-344.

Die vorliegende Arbeit behandelt nur die ebene Mannigfaltigkeit (von Kegelschnitten, die ein Tripel conjugirter Punkte gemeinsam haben). Zunächst wird ein solches System als in sich dualistisch erkannt, es kann als Netz zweiter Stufe, wie als Gewebe bezeichnet werden. Ist also eine Schar der Mannigfaltigkeit bekannt, so erhält man alle übrigen Kegelschnitte des Systems, wenn man einen beliebigen Kegelschnitt derselben mit allen übrigen durch Büschel verbindet. Jede Ecke des Polardreiecks sendet Geradenpaare aus, die dem System angehören. Hieraus folgt, was wohl kaum besonders zu erweisen war, dass irgend vier associirte Punkte, d. h. Grundpunkte eines Büschels

des Systems, ein Viereck mit dem Diagonalendreieck *ABC* bilden, ebenso vier associirte Gerade ein Vierseit mit diesem Diagonaldreiecke. Irgend vier associirte Gerade werden daher in Gruppen associirter Punkte von Kegelschnitten berührt, und umgekehrt.

Das Bisherige führt einmal zu dem üblichen Beweise des bekannten Satzes, nach dem irgend zwei Kegelschnitte derselben Schar die Grundgeraden in acht Punkten desselben Kegelschnittes berühren. Andererseits ergiebt sich eine Reihe zum Teil von Steiner bereits angegebener Erweiterungen dieses Satzes, von denen eine als Beispiel hier stehen möge: Die vier Schnittpunkte irgend zweier Kegelschnitte einer Schar liegen mit den Berührungspunkten jedes dritten Kegelschnittes der Schar auf demselben Kegelschnitt (§ 10).

Eine Linie, als Axe betrachtet, bestimmt im allgemeinen einen Kegelschnitt der Mannigfaltigkeit; dagegen bestimmt jede Höhe des Poldreiecks *ABC* eine ganze Schar sich doppelt berührender Kegelschnitte.

Jeder Punkt der Ebene ist Mittelpunkt eines einzigen Kegelschnittes. Der Mittelpunkt durchläuft einen *ABC* umschriebenen Kegelschnitt, bezw. eine Gerade, je nachdem man einen Büschel oder eine Schar der vorliegenden Mannigfaltigkeit ins Auge fasst. Der einzige Kreis des Systems hat seinen Mittelpunkt im Höhenschnittpunkt des Dreiecks *ABC*.

Auch als Brennpunkt betrachtet bestimmt ein Punkt *F* einen einzigen Kegelschnitt, wenn er nicht mit einem der drei Höhenfusspunkte *R*, *S*, *T* des Dreiecks *ABC* zusammenfällt. Zu einem Brennpunkt *F* ist der zugehörige *F'* leicht aufzufinden. Eine beliebige Seite und die zugehörige Höhe von *ABC* halbiren nämlich die beiden Strahlenwinkel, unter denen die Strecke *FF'* von ihrem Kreuzungspunkte aus erscheint. Hiernach durchläuft *F'* einen *RST* umschriebenen Kegelschnitt, wenn *F* eine beliebige Gerade durchläuft. Dieser Kegelschnitt wird zum Feuerbach'schen Kreise für die unendlich ferne Gerade, also für die Reihe der im System vorkommenden Parabeln. Das Dreieck aus den Halbirungspunkten *A'*, *B'*, *C'* der Seiten *BC*, *CA*, *AB*, das dem Feuerbach'schen

Kreise eingeschrieben ist, ist allen diesen Parabeln umschrieben. Jede Seite des Fundamentaldreiecks ist, doppelt gezählt, ein Kegelschnitt des Systems. Wird dieser Kegelschnitt als Hyperbel mit unendlich kleiner Nebenaxe betrachtet, so liegen auf der betreffenden Geraden selbst seine beiden Brennpunkte. Wird er dagegen als ein Kegelschnitt mit unendlich kleiner Hauptaxe betrachtet, so liegen seine beiden Brennpunkte symmetrisch zu der betreffenden Seite auf dem Kreise, welcher über der genannten Seite des Dreiecks als Durchmesser beschrieben ist. Die so entstehenden drei Kreise grenzen zusammen mit den Seiten des Dreiecks und dem Feuerbach'schen Kreise die einzelnen Gebiete ab, deren Punkte Brennpunkte von Kegelschnitten gleichen Charakters sind. Der Uebergang nämlich von Hyperbeln zu reellen Ellipsen kann entweder durch eine Parabel oder durch eine Hyperbel mit unendlich kleiner Nebenaxe hindurch geschehen. Derjenige von Hyperbeln zu imaginären Ellipsen hingegen kann nur durch eine Hyperbel mit unendlich kleiner Hauptaxe hindurch geschehen.

Im § 4 bespricht der Verfasser die Parabelschar des Systems. Die Scheiteltangenten umhüllen eine, die Axen eine zweite Steiner'sche Hypocykloide, die Scheitel liegen auf einer Curve vierter Ordnung.

Zur Untersuchung der Systeme ähnlicher Kegelschnitte der Mannigfaltigkeit bedient sich der Verfasser einer besonderen quadratischen Transformation, deren Gesetze von Herrn Schröter (Kegelschnitte S. 290-294) erörtert wurden. Verschiebt man die Involution conjugirter Durchmesser eines System-Kegelschnittes zu sich selbst parallel, bis ihr Mittelpunkt in einen bestimmten Punkt O eines festen Kreises gelangt, so wird eine bestimmte Involution auf demselben und also auch der Punkt $\mathfrak{M}$, in dem die Verbindungslinien ihrer Paare sich treffen, der ursprünglichen Involution zugewiesen. Da nun jeder Punkt M nur von einem Kegelschnitt des Systems der Mittelpunkt ist, so besteht zwischen den Ebenen der Punkte M und $\mathfrak{M}$ eine eindeutige Beziehung, die sich als quadratisch ausweist. A, B, C sind die Hauptpunkte der einen Ebene; die der anderen, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, bilden ein zu dem

gegebenen ähnliches Dreieck, das dem Hülfskreise einbeschrieben ist. Die beiden unendlich fernen Kreispunkte entsprechen bei der Transformation sich selbst. Ein mit dem gegebenen concentrischer Kreis enthält solche Punkte $\mathfrak{M}$, deren zugehörige Strahleninvolutionen mit dem Centrum O unter einander congruent sind. Jedem dieser Kreise entspricht daher die Mittelpunktscurve eines Systems ähnlicher Kegelschnitte unserer Mannigfaltigkeit. Hieraus ist abzuleiten, dass die Mittelpunktscurve von der vierten Ordnung ist und die drei Punkte A, B, C zweifach enthält. Bei jedem Systeme ähnlicher Hyperbeln sind A, B, C eigentliche Doppelpunkte der Mittelpunktscurve, während bei einem System ähnlicher Ellipsen einzelne dieser Punkte isolirt sein können. Die Curve hat vier reelle Doppeltangenten, von denen eine mit der unendlich fernen Geraden, die in ihren Kreispunkten berührt, zusammenfällt. Daher gehören die betrachteten Curven zu einem Büschel. Die drei anderen sind zu den Tangenten parallel, die den A, B, C umschriebenen Kreis in diesen Punkten berühren. Die Berührungspunkte dieser drei Reihen von Doppeltangenten liegen auf drei Hyperbeln verteilt.

Eine jede der betrachteten Mittelpunktscurven wird übrigens, wie der Verfasser zeigt, von einem System ähnlicher Kegelschnitte, die A, B, C enthalten, umhüllt.

Der Verfasser betrachtet nunmehr die Curven, welche von den Systemen ähnlicher Kegelschnitte umhüllt werden. Es sind dies punktallgemeine Curven vierter Ordnung, welche vier bestimmte Gerade, die unendlich ferne Gerade und ihre associirten, in denselben 8 Punkten berühren und also zu einem Büschel gehören. Jede der drei Parabeln des Systems, deren Axe zu einer der Tangenten parallel ist, die in A, B, oder C den ABC umschriebenen Kreis berühren, wird von vier (associirten) Doppeltangenten einer jeden der betrachteten Curven berührt. Ferner sendet jeder der drei Punkte A, B, C zwei Paare von Doppeltangenten an jede dieser Curven aus. Folgende Erwägung dient zur Begründung dieser Thatsachen. Um aus einer Schar, bezw. einem Büschel der vorliegenden Mannigfaltigkeit die dem System ähnlicher Kegelschnitte angehörigen Curven auszusondern, braucht

man nur die Mittelpunkts-Gerade, bezw. den *ABC* umschriebenen Mittelpunktskegelschnitt mit der Mittelpunktscurve des Systems zum Durchschnitt zu bringen. Die Schnittpunkte sind Mittelpunkte der gesuchten Kegelschnitte. Demnach enthält jede Tangente der Mittelpunktscurve die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schar, deren associirte Strahlen die Hüllcurve berühren, und jeder *A*, *B*, *C* umschriebene Kegelschnitt, der die Mittelpunktscurve berührt, enthält die Mittelpunkte der Curven eines Büschels, dessen Grundpunkte der Hüllcurve angehören. Da nun von dem Mittelpunkte eines beliebigen Kegelschnittes der Mannigfaltigkeit sechs Tangenten der Mittelpunktscurve und zwei sie berührende und *A*, *B*, *C* enthaltende Kegelschnitte ausgehen, so hat derselbe 24 Tangenten und acht Punkte mit der Hüllcurve gemein. Diese ist daher von der zwölften Klasse und der vierten Ordnung. Mit ähnlichen Schlüssen kann die angegebene Anordnung der Doppeltangenten ermittelt werden.

Die Arbeit schliesst mit der Betrachtung der Systeme von Kegelschnitten gleichen Axenproductes oder gleichen Inhaltes, die in der betrachteten Mannigfaltigkeit sich finden (§ 9).

E. K.

G. Tarry. Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires. Paris. Gauthier-Villars.

Ausgehend von der Theorie der conjugirt-imaginären Punkte und Strahlen, gelangt der Verfasser erstens zu einer Definition des Kegelschnitts, welche reelle und imaginäre Kegelschnitte zugleich umfasst, und zweitens zu dem auf imaginäre Schnittpunkte mit den drei Dreiecksseiten ausgedehnten Satz von Carnot. Dann folgen Sätze über conjugirte Kegelschnitte im allgemeinen und solche conjugirte im besondern, bei denen das Doppelverhältnis der Beziehung -1 ist. Durch den Begriff zweier complementären Kegelschnitte, d. h. solcher, deren Beziehungsaxe unendlich fern ist, gelangt der Verfasser dann dazu, einen imaginären Kegelschnitt durch den ihm complementären reellen darzustellen. Das letzte Capitel behandelt solche zwei Kegelschnitte, welche conjugirt sind und dabei ihren Beziehungspol unendlich

fern haben, Kegelschnitte also, die Poncelet supplementar genannt hat. Scht.

V. Retali. Osservazioni sulla projezione immaginaria delle curve del second' ordine. Bologna Rend. 72-79.

Es sei K^2. eine Curve zweiter Ordnung, P ein beliebiger Punkt ihrer Ebene, p die Polare von P in Bezug auf die Curve. Eine beliebige durch P gehende Gerade r schneide die Gerade p im Punkte P' und die Curve K^2 in den (reellen oder conjugirt imaginären) Punkten Q, Q'; die Doppelpunkte der Involution PP', QQ' benenne man mit R, R'. Dreht man die Gerade r um den Punkt P, so wandern die Punkte R, R'; ihr Ort ist eine Curve zweiter Ordnung K_p^2, welche K^2 in denjenigen Punkten berührt, in welchen diese Curve von der Geraden p geschnitten wird; K_p^2 heisst „conjugirt zu K^2 in Bezug auf den Punkt P oder auf die Gerade p“ (die Polare von P). Man kann auch sagen, die beiden Curven K^2 und K_p^2 seien die „imaginären Projectionen von einander in Bezug auf den Punkt P oder die Gerade p“. Ist $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ die Gleichung von K^2 in homogenen Coordinaten und sind y_1, y_2, y_3 die Coordinaten von P, so ist die Gleichung von K_p^2

$$(\sum a_{ik} x_i x_k)(\sum a_{ik} y_i y_k) - 2(\sum a_{ik} x_i y_k)^2 = 0.$$

Mehrere Sätze, zu welchen die Betrachtungen der conjugirten Kegelschnitte Anlass geben, sind vom Verfasser in einigen früheren Arbeiten aufgestellt worden (Sopra una serie particolare di coniche d'indice due, Bologna Mem. (4) V; Sulle coniche conjugate, ibid. (4) VI), ausserdem von Hrn. Chr. Wiener (Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. I. 315-325. Leipzig 1884). Einige andere werden in der vorliegenden Arbeit angegeben; wir greifen die folgenden unter ihnen heraus: Wird ein Kegelschnitt K^2 gegeben, so giebt es unendlich viele Punkte, für welche die zu jedem von ihnen conjugirten Kegelschnitte die von zwei Punkten begrenzte Strecke harmonisch teilen; ihr Ort ist ein anderer Kegelschnitt; z. B. der Ort der Punkte, in Bezug auf welche die zu K^2 conjugirten Kegelschnitte gleichseitige Hyper-

beln sind, ist ein anderer Kegelschnitt; ist K^2 eine Parabel, so ist der letztere die symmetrische zu K^2 bezüglich der Directrix. Sind in einer Ebene zwei Mittelpunkts-Kegelschnitte gegeben, so giebt es im allgemeinen vier, die zu einem von ihnen conjugirt sind und zum anderen ähnlich liegen; dieselben entsprechen den Ecken eines Parallelogramms, dessen Diagonalen die conjugirten Durchmesser eines der gegebenen Kegelschnitte bilden, welche zwei conjugirten Durchmessern des anderen parallel sind. Beispielsweise giebt es vier zu einem Mittelpunkts-Kegelschnitte conjugirte Kreise, einen einzigen zu einer Parabel conjugirten.

La. (Lp.)

V. Retali. Sulle coniche conjugate degeneri. Bologna Rend. 1887.

Diese Note ist eine Fortsetzung derjenigen desselben Verfassers „Osservazioni sulla projezione immaginaria delle curve del second' ordine" (siehe vorstehendes Referat) und bezweckt die Bestimmung der Kegelschnitte, die zu einem auf ein Geradenpaar m, n oder auf ein Punktepaar M, N reducirten Kegelschnitte conjugirt sind, oder auch des Kegelschnittes, der zu einem wirklichen Kegelschnitte K^2 in Bezug auf einen seiner Punkte conjugirt ist. Jeder zu $\overline{mn}$ conjugirte Kegelschnitt ist ein zu diesen Geraden harmonisches Geradenpaar; jeder zu $\overline{MN}$ conjugirte Kegelschnitt ist ein zu diesen Punkten harmonisches Punktepaar; der zu K^2 in Bezug auf einen seiner Punkte conjugirte Kegelschnitt endlich ist nichts weiter als die doppelt zu zählende zugehörige Tangente.

La. (Lp.)

J. Finsterbusch. Beitrag zur synthetischen Geometrie ebener Kreissysteme und einiger damit im Zusammenhange stehender höherer Curven. Pr. Realsch. Werdau.

F. Kölmel. Die Grassmann'sche Erzeugungsweise von ebenen Curven dritter Ordnung. Diss. Tübingen. 38 S.

Während der Grad jeder durch einen Grassmann'schen Mechanismus erzeugten ebenen Curve aus der Zahl der Factoren x erkennbar ist, die in dem diese Erzeugung darstellenden planimetrischen Producte vorkommen, leitet der Verfasser im ersten Teile seiner Arbeit diesen Grad mit Hülfe einer Erweiterung des Chasles'schen Correspondenzprincipes auf rein geometrischem Wege ab, indem er die Geraden, welche sich im Punkte x schneiden sollen, zunächst in allgemeiner Lage betrachtet, und für die Schnittpunkte derselben mit einer beliebigen Geraden die Anzahl der Coincidenzen bestimmt. Als Beispiel wird ein von Grassmann gegebener Satz über die Erzeugung einer C_4 discutirt, woran sich, jedoch mehr andeutungsweise, Verallgemeinerungen des Beweisverfahrens schliessen. Im zweiten Teile werden speciell für die drei Grassmann'schen Erzeugungsweisen der Curven dritter Ordnung die Bedingungen untersucht, unter welchen Curven mit Doppelpunkt entstehen. In jedem dieser Fälle wird der Ort des Doppelpunktes bestimmt, sowie der Ort desjenigen Elementes der Construction, von dessen Wahl bei beliebiger Annahme der übrigen Elemente das Auftreten des Doppelpunktes abhängt. Schg.

R. A. Roberts. On plane cubics satisfying certain conditions. Mess. XV. 152-155.

Die behandelte Aufgabe verlangt, eine ebene Curve dritter Ordnung zu beschreiben, die durch drei in einer Geraden liegende Punkte geht und ausserdem drei Paare von Geraden berührt, welche sich in diesen Punkten schneiden.

Glr. (Lp.)

A. Ameseder. Ueber Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven. Wien. Ber. XCIII. 357-379.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit gewissen Punktgruppen auf ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei oder drei Doppelpunkten. Es wird insbesondere der Zusammenhang, welchen

diese Punktgruppen mit den Doppeltangenten der Curve haben, näher dargelegt. Bei der Curve von dem Geschlechte eins sind acht Punkte einer Gruppe gegeben durch die gemeinsamen Tangenten, welche ein besonderes System vierfach berührender Kegelschnitte mit der C_4 hat. Diese acht Punkte zerfallen in zwei Quadrupel der Art, dass die vier zu jedem Quadrupel gehörenden Tangenten des Berührungskegelschnittes auf ihm ein constantes Doppelverhältnis haben. Jedoch ist dieses Doppelverhältnis nicht, wie der Verfasser angiebt, gleich demjenigen der vier Tangenten, welche von gewissen Schnittpunkten der Doppeltangenten an die C_4 gelegt werden können. Es gehören zu diesen Quadrupeln die Berührungspunkte der Tangenten von C_4, welche durch einen Doppelpunkt der C_4 gehen. Irrtümlich ist der Satz, dass die durch die Quadrupel bestimmte Involution 24 Doppelelemente habe; sie besitzt deren überhaupt keine.

Für die rationale C_4 wird der bemerkenswerte Satz gefunden: „Die Berührungspunkte der Tangentenpaare aus den drei Doppelpunkten liegen auf einem Kegelschnitte und bilden ein Sechseck, für welches die Doppeltangenten der Curve Pascal'sche Geraden sind."

Es wird ferner gezeigt, dass die Curve mit drei Doppelpunkten im Ganzen nur vier Systeme einfach berührender Kegelschnitte besitzt.

Zum Schlusse werden gewisse Polygone, welche der C_4 einbeschrieben sind, und von denen die Steiner'schen Polygone einen Specialfall repräsentiren, betrachtet. W. St.

C. Hossfeld. Ueber die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Schlömilch Z. XXXI. 1-11.

Die im Titel genannten Verhältnisse waren schon von Herrn Zeuthen in dessen Abhandlung: „Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre" (Math. Ann. VII.) ausführlich erörtert. Hier jedoch werden die Realitätsverhältnisse der Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung aus einer

anderen Quelle abgeleitet, nämlich aus einer auf der collinearen Beziehung zweier Ebenen beruhenden Erzeugungsweise dieser Curven. Es erscheinen dabei die Geraden, die in der Ebene der fraglichen Curve liegen, auf sämtliche Regelflächen zweiter Ordnung abgebildet, die einen Ebenenbüschel dritter Ordnung berühren, ferner die Tangenten der Curve auf diejenigen Regelflächen, welche überdies eine feste Fläche zweiten Grades einfach berühren, und endlich die Doppeltangenten der Curve auf diejenigen Regelflächen, welche diese Fläche doppelt berühren. Aus der Natur der letzteren, sowie aus der Realität ihrer dem Ebenenbüschel dritter Ordnung angehörigen Tangentialebenen ergeben sich dann leicht die bekannten Resultate. Danach kann eine Curve vierter Ordnung ohne Doppelpunkt nur 28, 16, 8 oder 4 reelle Doppeltangenten haben. Hat sie einen Doppelpunkt, so sind 16, 8, 4 oder 0 Doppeltangenten reell; hat sie zwei reelle Doppelpunkte, so sind 8, 4, oder 0 Doppeltangenten reell; hat sie zwei conjugirt imaginäre Doppelpunkte, so sind 6 oder 2 Doppeltangenten reell; hat sie drei reelle Doppelpunkte, so sind 4 oder 0 Doppeltangenten reell; hat sie endlich einen reellen und zwei conjugirt imaginäre Doppelpunkte, so sind 2 Doppeltangenten reell. Scht.

P. H. Schoute. Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten. Hoppe Arch. (2) IV. 308-322.

Fortsetzung der in Hoppe Arch. (2) II. 113-128 u. III. 113-137 begonnenen Untersuchungen. Namentlich wird hier ein für die Lemniskate schon von Em. Weyr (Prag Abh. (6) VI., F. d. M. VI. 1874. 444) ausgesprochener Satz neu bewiesen, seine duale Umkehrung aufgestellt und eine Gruppe von mehreren damit zusammenhängenden Eigenschaften erörtert. Scht.

Ch. Beyel. Ueber Curven IV. Ordnung mit einem doppelten Berührungsknoten und einem Doppelpunkt. Wolf Z. XXXI. 178-203.

Die im Referat Seite 545 erwähnte Erweiterung der vom Verfasser definirten quadratischen Transformation, die darin besteht, dass an die Stelle der einen Seite des Grunddreiecks eine Curve B^m der m^{ten} Ordnung tritt, wird hier dadurch specialisirt, dass statt der B^m ein Kegelschnitt B^2 zu Grunde gelegt wird. Eine weitere Specialisirung der allgemeinen Aufgabe der vorigen Abhandlung führt der Verfasser dadurch herbei, dass die zu transformirenden Tangenten der Curve C^n der n^{ten} Ordnung die Strahlen eines Strahlenbüschels der ersten Ordnung sind. Nach den allgemeinen Sätzen in der vorher angezeigten Abhandlung entsprechen in der Reciprocität $(cB^2a\Delta)$ den Strahlen des Büschels die Punkte einer Curve C^4 der vierten Ordnung, welche in P, dem Scheitel des Büschels, einen Doppelpunkt, in B, dem Schnittpunkt der Geraden c und a, einen doppelten Berührungsknoten besitzt. Diese besonderen Curven vierter Ordnung werden eingehend untersucht und hierauf unter den Reciprocitäten $(cB^2a\Delta)$ diejenigen hervorgehoben, für welche $\Delta = 2$ ist. Ferner wird der Einfluss erörtert, den besondere Lagen der die Reciprocität bestimmenden geometrischen Gebilde (a, c, B, P, B^2) auf die Gestalt der C^4 ausüben. Eine Anzahl guter Figuren, bei denen der zu Grunde gelegte Kegelschnitt B^2 ein Kreis ist, veranschaulichen die Ergebnisse der geometrischen Untersuchung. Rdt.

A. Sucharda. Ueber die Pascal'sche Spirale. Hoppe Arch. (2) IV. 197-206.

Zwei neue Erzeugungsarten der Pascal'schen Spirale durch Bewegung, und im Zusammenhang damit Tangenten-Constructionen, die einen neuen Beweis für die Richtigkeit der bekannten Tangenten-Construction in einem Punkte der Conchoide ergeben. Scht.

R. Heger. Zusammenstellung von Constructionen an Curven höherer Ordnung. Schlömilch Z. XXXI. 38-101.

Eine sehr brauchbare Uebersicht über 37 grösstente

Constructionen, welche Curven dritter bis 12ter Ordnung aus gegebenen einfachen und mehrfachen, bis sechsfachen, Punkten herstellen, oder die fehlenden Schnittpunkte zweier Curven ergeben, die durch gegebene Punkte gehen sollen. Darunter befindet sich auch die von Herrn Rohn in den Math. Ann. XXIV. auf Grund einer gewissen Verwandtschaft gefundene einfache Construction einer rationalen Curve fünfter Ordnung, für welche die sechs Doppelpunkte und zwei einfache Punkte gegeben sind.

Scht.

R. Heger. Construction einer Curve VI. Ordnung aus sieben Doppelpunkten und sechs einfachen Punkten. Schlömilch Z. XXXI. 296-306.

Es wird zunächst gezeigt, wie aus der Construction einer C_3 aus neun Punkten

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

die Construction einer C_3 aus einem Doppelpunkt und sechs einfachen Punkten

$$1^2 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

dadurch abgeleitet werden kann, dass man zwei der neun Punkte, 8 und 9, als Nachbarpunkte von 1 annimmt. Nach dieser Analogie wird aus der Construction einer C_6 aus sechs Doppelpunkten und neun einfachen Punkten

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15$$

[vergl. das vorhergehende Referat] die Methode der Construction einer C_6 aus sieben Doppelpunkten und sechs einfachen Punkten

$$1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13$$

entwickelt, die sich darauf gründet, dass man die Punkte 14 und 15 in die Nachbarschaft des Punktes 7 verlegt. Rdt.

Ed. Dewulf. Note sur la méthode des tangentes de Roberval. Darboux Bull. (2) X. 257-258.

Durch einen festen Punkt F ziehe man eine beliebige Gerade, welche eine feste Gerade Ox mit dem festen Punkte O in m schneide. Man trage hierauf auf Fm von m aus auf beiden

Seiten die Strecken mM und mM' gleich Om auf. Der geometrische Ort der Punkte M und M' ist eine Quetelet'sche Focale (vom dritten Grade). Auf dieselbe wird die Roberval'sche Methode der Tangentenconstruction angewandt und mit Hülfe derselben gezeigt, dass F ein Brennpunkt jener Curve ist.

Rdt.

P. H. Schoute. Solution d'un problème de Steiner. Darboux Bull. (2) X. 242-256.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Lösung der folgenden Aufgabe von Steiner (und ihrer reciproken): Durch einen Punkt O in der Ebene einer algebraischen Curve C_m^n von der n^{ten} Ordnung und der m^{ten} Klasse ziehe man eine Secante l und in ihren n Schnittpunkten mit der Curve Tangenten an dieselbe. Welches ist, wenn die Secante l sich um O dreht, der geometrische Ort der $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte dieser Tangenten? (Steiner's gesammelte Werke Bd. II p. 489 und 599). Er findet, dass die Ordnung des gesuchten geometrischen Orts, wenn r die Zahl der Rückkehrpunkte, i die Zahl der Wendepunkte der C_m^n bezeichnet, durch die Zahlen $\frac{(2n-3)m-r}{2}$ oder $\frac{(2m-3)n-i}{2}$ ausgedrückt werden kann, welche beiden Ausdrücke in Berücksichtigung der bekannten Relation $r-i=3(n-m)$ als gleich erfunden werden. Für den speciellen Fall $n=3$, $m=6$ ergiebt sich also eine C^6, deren bereits von Steiner gefundene Eigenschaften bewiesen werden.

Rdt.

J. Alison. Statical proofs of some geometrical theorems Edinb. M. S. Proc. IV. 58-60.

Gbs.

C. Besondere räumliche Gebilde.

MOORE and LITTLE. Note on space divisions. Newcomb Am. J. VIII. 127-131.

n unbegrenzte Strahlen teilen eine Ebene in $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ Polygone. Diese sind: ein n-Seit, $\frac{1}{2}n(n-3)$ Vierseite und n Dreiseite, wenn die n Strahlen ein n-Eck bilden. Diese Betrachtungsweise wird weiter verfolgt, und auf die Teilung des Raums durch Ebenen übertragen. Scht.

E. HESS. Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder. Klein Ann. XXVIII. 107-200.

Die hierher gehörigen Untersuchungen beginnen mit den Arbeiten von Rosanes und H. Schröter über Dreiecke, welche auf mehr als eine Art in perspectiver Lage sich befinden. Sie wurden fortgesetzt auf analytischem Wege von Vályi in einer Reihe von Artikeln in Hoppe's Archiv für Mathematik und Physik. In der Theorie der mehrfach perspectiven Tetraeder führt der Fall zweier vierfach perspectiven Tetraeder auf ein System dreier Tetraeder in desmischer Lage, welches schon Hermes, Stephanos, Schröter, Reye, Vietor u. A. zum Gegenstand ihrer Untersuchungen gemacht haben. Der Verfasser beabsichtigt die von verschiedenen Autoren von verschiedenen Standpunkten aus erhaltenen Resultate in der Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder im Zusammenhang darzustellen und zu ergänzen und insbesondere mehrere interessante Specialfälle für die Lage von mehrfach perspectiven Dreiecken und Tetraedern eingehend zu behandeln.

Zunächst entwickelt er die Relationen für zwei einfach perspective Dreiecke und zwar auf analytischem Wege, indem er das eine der beiden Dreiecke zum Fundamentaldreieck eines trimetrischen Coordinatensystems, die Collineationsaxe als Einheitslinie wählt. Es wird ferner der Kegelschnitt bestimmt, in Bezug auf welchen die beiden Dreiecke polar reciprok und das

Collineationscentrum derselben der Pol ihrer Collineationsaxe ist, und die einfachsten Lagenbeziehungen bei diesen perspectiven Dreiecken näher erörtert. Hierauf werden die Bedingungen ermittelt, unter welchen die beiden Dreiecke zweifach perspectiv sind, und wird bewiesen, dass dann die beiden Kegelschnitte, zu welchen die beiden Dreiecke polarreciprok sind, einander doppelt berühren. Sind die beiden Dreiecke dreifach perspectiv, so gehören ihnen drei Kegelschnitte zu, welche ein gemeinsames Polardreieck (gebildet von zwei imaginären und einer reellen Geraden) besitzen. Besondere Behandlung findet hier der Specialfall, dass die drei Collineationsaxen sich in einem Punkte schneiden und folglich die drei Collineationscentren in einer geraden Linie liegen. In analoger Weise werden die Dreiecke untersucht, welche auf vierfache Weise in perspectiver Lage sich befinden. Ein Specialfall führt auf eine besonders beachtenswerte Figur, welche, nachdem noch der Vollständigkeit halber die Lagenbeziehungen der Dreiecke bei sechsfacher Perspectivität erörtert worden sind, im letzten Paragraphen des ersten Teils einer eingehenden Betrachtung gewürdigt wird. Diese Figur ist nämlich die eines 10-fach Brianchon'schen Sechsecks (bezw. 10-fach Pascal'schen Sechsseits), das schon Clebsch, F. Klein und der Verfasser selbst an anderen Orten betrachtet haben. Es schneiden sich bei diesem die 15 Verbindungslinien der sechs Eckpunkte der beiden vierfach perspectiven Dreiecke Δ und Δ' 10 Mal zu je dreien in einem Punkte, ebenso wie die 15 Schnittpunkte der sechs Seiten dieser Dreiecke 10 Mal zu je dreien auf einer Geraden liegen. Die sechs Eckpunkte bilden also 10 Gruppen von je zwei vierfach perspectiven Dreiecken oder repräsentiren 10 Mal die Eckpunkte eines Brianchon'schen Sechsecks, sodass von den 60 Sechsecken, welche sich aus den sechs Punkten bilden lassen, 40 Brianchon'sche Sechsecke sind. (Man kann sich von einer solchen ebenen Configuration leicht eine Vorstellung verschaffen, wenn man die fünf Eckpunkte eines regelmässigen Fünfecks und seinen Mittelpunkt als Grundpunkte nimmt). Projicirt man ein 10-fach Brianchon'schen Sechseck auf eine Kugelfläche, so erhält man ein sphäris[illegible]fach Bri-

anchon'sches Sechseck. Ist dieses regulär, so kann man aus der vollständigen sphärischen Figur sämtliche reguläre und halbreguläre Netze sowie die diesen entsprechenden regulären, gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder ableiten (vgl. Hess: „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung“, F. d. M. XV. 1883. 466).

Der zweite Teil beginnt mit der Untersuchung der Relationen für zwei einfach perspective Tetraeder, wobei das eine derselben als Fundamentaltetraeder eines tetrametrischen Coordinatensystems, die Collineationsebene der perspectiven Tetraeder als Einheitsebene gewählt wird. Bei der Unterscheidung der möglichen Fälle von mehrfach perspectiven Tetraedern ergiebt sich, dass nur zweifach perspective und vierfach perspective Tetraeder existiren können. Es werden nun hauptsächlich die Eigenschaften der betreffenden vollständigen Raumfiguren sowie die Lagenbeziehungen der den mehrfach perspectiven Tetraedern zugehörigen Flächen zweiten Grades besprochen. Als wichtigste Eigenschaft zweier vierfach perspectiven Tetraeder wird folgende gefunden: Sind zwei Tetraeder T und T' vierfach perspectiv, so ist das Tetraeder T'', dessen Eckpunkte die vier Collineationscentren und dessen Seiten die vier Collineationsebenen sind, zu jedem der beiden Tetraeder T und T' vierfach perspectiv, sodass immer die Ecken des dritten Tetraeders die Centren, die Seitenflächen desselben die Ebenen der Perspectivität bilden. Zu diesem sogenannten desmischen System von drei Tetraedern sind auf anderen Wegen auch O. Hermes, Stephanos, Veronese, Schröter, Reye, Vietor u. a. gelangt. Den drei Tetraedern T, T', T'' sind drei andere Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ zugeordnet, deren Ecken auf den 18 Kanten der Tetraeder T harmonisch zu den Eckpunkten jeder Kante liegen, und deren Seitenflächen durch die 18 Kanten dieser Tetraeder harmonisch zu den beiden in jeder Kante sich schneidenden Seitenflächen hindurchgehen; auch die Tetraeder $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ bilden ein desmisches System. Die vollständige Raumfigur, welche von den drei Tetraedern T, T', T'' gebildet wird, führt auf die von Reye näher untersuchte räumliche Configuration $(12_6, 16_3)$, die beiden desmischen Systeme der Tetraeder T und $\mathfrak{T}$ auf die von Vietor genauer behandelte räumliche Configuration $(24_9, 18_4)$.

Als Specialfall für die Lage zweier vierfach perspectiven Tetraeder erkennt man die beiden regulären Tetraeder, deren Ecken mit den Eckpunkten eines Würfels, deren Seitenflächen mit denen eines concentrischen, dem Würfel eingeschriebenen Oktaeders zusammenfallen (die s. g. stella octangula Kepler's). Die Ecken des dritten Tetraeders T'' sind der gemeinsame Mittelpunkt des Würfels und des Oktaeders und die drei unendlich fernen Punkte der Flächenaxen des Würfels (oder der Eckenaxen des Oktaeders), die Seiten von T'' sind die unendlich ferne Ebene und die drei zu jenen Flächenaxen senkrechten Symmetrieebenen. Endlich bespricht der Verfasser noch das sphärische Zellgewebe, das sich durch Projection der Figur eines Systems dreier desmischen Tetraeder auf einen dreidimensionalen sphärischen Raum ergiebt. Eine collineare Transformation desselben liefert ein reguläres Gewebe von 24 Eckpunkten, dessen Grenzpolyeder 24 reguläre Oktaeder sind und welchem das reguläre 24-Zell des vierdimensionalen Raumes sowohl ein- als umgeschrieben ist. Am Schlusse dieses zweiten Teils wird noch eine besondere Raumfigur betrachtet, welche aus einem System dreier desmischen Tetraeder abgeleitet werden kann und als das räumliche Analogon eines ebenen 10-fach Brianchon'schen Sechsecks aufzufassen ist. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser vollständigen Raumfigur ergiebt, dass sie als die Configuration $(60_{15}, 72_{8})$ zu bezeichnen ist. Ihre Uebertragung auf den dreidimensionalen sphärischen Raum liefert zwei Gewebe, welchen für den Fall der Regelmässigkeit das reguläre 600-Zell des vierdimensionalen Raumes eingeschrieben (bezw. umgeschrieben) und das reguläre 120-Zell des vierdimensionalen Raumes umgeschrieben (bezw. eingeschrieben) sind.

Rdt.

O. Hermes. Das Sechsflach. Pr. Kölln.-Gymn. Berlin.

Eine Ebene t_1 eines Fünfflachs schneidet das von den übrigen Ebenen gebildete Vierflach T in einem vollständigen Vierseit. Durch die Diagonalen d des letzteren und durch den Pol von t_1 bezüglich T gehen Ebenen, harmonisch getrennt von t_1 durch die

die d treffenden Kanten des Vierflachs, ihre Schnittlinien $\mathfrak{T}$ sind die Polaren der d bezüglich T. Zwei windschiefe Strahlen d, $\mathfrak{T}$ und je zwei zu ihnen windschiefe Gegenkanten von T gehören zu je einer Regelschar II. Ordnung, die Leitschar derselben enthält ein analoges Strahlenquadrupel. Auf diese Sätze stützen sich die in den Paragraphen 9, 10, 11 und 12 abgeleiteten Resultate über das Sechsflach.

Die drei Paare Gegenebenen eines Sechsflaches bestimmen eine von sechs Vierecken begrenzte Figur S_1, auf welche sich alle in der Theorie des Parallelepipedes gebräuchlichen Ausdrücke, wie Gegenecken, Gegenkanten, Diagonalen u. s. w. unzweideutig übertragen. Zu den Leitstrahlen der durch die Schnittlinien der Gegenebenen gehenden Regelschar II. Ordnung zählen die Aussendiagonalen in den Seitenflächen von S_1. Unschwer folgen aus letzterer Bemerkung noch 14 Regelflächen II. Ordnung gleichen Charakters. Aehnliche Eigenschaften weist das von zwei Fünfecken, zwei Vierecken und zwei Dreiecken begrenzte gemischtflächige Sechsflach auf.

Zwei Paar Gegenseiten des Sechsflaches S_1 bilden je eins seiner Seitentetraeder. Je nachdem ein, zwei oder alle drei Seitentetraeder sich auf je einen Punkt reduciren, ergeben sich die in den Paragraphen 13 und 14 behandelten Sechsflache. Js.

O. Hermes. Das allgemeine Sechsflach. Kronecker J. C. 258-285.

Das Sechsflach des Verfassers besteht aus sechs Ebenen, von denen dreimal zwei als Gegen-Ebenen festgehalten werden. Je zwei Paare von solchen Gegen-Ebenen bilden ein Tetraeder, von dem zwei Gegenkanten Schnittlinien der Gegenflächen-Paare sind und die beiden andern Gegenkanten-Paare zugleich Gegenkanten des Sechsflachs sind. Die Abhandlung entwickelt nun die Beziehungen der Lage der Kanten und Diagonalen des Sechsflachs und deren von ihm in der eben angegebenen Weise erzeugten Tetraeder. Scht.

F. London. Ueber polare Fünflache und Sechsflache räumlicher Reciprocitäten. Diss. Breslau. 50 S. 8°.

R. E. Allardice. Projective geometry of the sphere. Edinb. M. S. Proc. IV. 56-58.

Beispiele über die Ausdehnung von Sätzen bezüglich der Transversalen in der ebenen Geometrie durch Centralprojection aus dem Kugelmittelpunkte auf die Kugeloberfläche, mit Anwendung auf die sphärischen Kegelschnitte. Gbs. (Lp.)

R. Sturm. Ueber den achten Schnittpunkt dreier Flächen zweiter Ordnung. Kronecker J. IC. 317-319.

Veranlasst durch einen vorangehenden Aufsatz des Herrn Schröter über die Construction des achten Schnittpunkts dreier Flächen zweiter Ordnung in Kronecker J. IC., 131 (F. d. M. XVII. 1885. 637), stellt Herr Sturm hier eine einen ganz andern Ausgangspunkt nehmende Betrachtung an, welche aber genau zu der Schröter'schen Construction führt. Scht.

H. G. Zeuthen. Constructions du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés. Kronecker J. IC. 320-323.

Herr Schröter hatte in Bd. IC, S. 131 des Kronecker J. durch eine Modification der Hesse'schen Construction eine neue Construction des achten Schnittpunkts der dur[illegible]gebene Punkte gehenden Flächen zweiter Ordnung gegeb[illegible] betont, dass der Vorteil dieser Construction darin [illegible] vollziehenden Constructions-Operationen sich [illegible] und derselben Ebene abspielen. Herr Zeut[illegible] auf, dass denselben Vorteil auch zwei der vo[illegible] Constructionen darbieten, und setzt deshalb di[illegible] genau auseinander. Die ei[illegible] ist [illegible] seiner Géométrie de directio[illegible]

andere von Zeuthen selbst in den Math. Ann. XVIII. S. 63-67. Diese Constructionen, sowie auch die von Schröter gegebene führt Herr Zeuthen auf den folgenden Satz zurück. Wenn die Punkte 2, 3, 5, 6, 7 und die Verbindungsstrahlen 12 und 34 gegeben sind, so muss die Ebene 148 durch einen festen Punkt der Ebene 567 gehen. Scht.

J. SOLIN. Ueber die Construction der Axen einer Kegelfläche zweiten Grades. Prag Ber. 1885. 164-174.

Eine Kegelfläche zweiten Grades sei gegeben durch ihren Mittelpunkt S und durch eine vollständig dargestellte Curve zweiten Grades Γ_1, die Grundcurve, deren Ebene die Grundebene genannt wird. Es handelt sich darum, die drei Axen X, Y, Z der Kegelfläche mit dem geringsten Aufwand von constructiven Mitteln zu bestimmen. Die senkrechte Projection von S auf die Grundebene werde mit O_2, die Höhe der Kegelfläche O_2S mit h bezeichnet. Die drei Axen X, Y, Z bilden ein Poldreikant der gegebenen Kegelfläche, zugleich aber auch ein Poldreikant einer imaginären Kegelfläche, welche denselben Mittelpunkt S, die Höhe $h\sqrt{-1}$ hat und durch einen in der Grundebene liegenden imaginären Kreis Γ_2 mit dem Mittelpunkt O_2 bestimmt ist. Die Schnittpunkte x, y, z der Axen X, Y, Z mit der Grundebene bilden ein gemeinsames Poldreieck der Kegelschnitte Γ_1 und Γ_2. Die Construction der Axen X, Y, Z ist damit zurückgeführt auf die Construction des Poldreiecks xyz. Jedem Punkt in der Grundebene entspricht nun ein Punkt derselben, welcher mit ersterem in Bezug auf beide Kegelschnitte Γ_1 und Γ_2 conjugirt ist, jeder Geraden der Ebene aber ein Kegelschnitt, der durch die Eckpunkte x, y, z des Poldreiecks geht, der Gesamtheit der Geraden der Ebene ein Kegelschnittsnetz (xyz). Zur Bestimmung der Punkte x, y, z hat man also nur zwei Kegelschnitte des Netzes zu construiren; drei ihrer Schnittpunkte sind die Punkte x, y, z, der vierte Schnittpunkt entspricht demjenigen Punkte, in welchem sich die zu den beiden Kegelschnitten in

Bezug auf beide Curven Γ_1 und Γ_2 conjugirten Geraden der Ebene schneiden. Zur Construction von x, y, z werden nun die beiden Kegelschnitte des Netzes (xyz) genommen, welche durch die Schnittpunkte von Γ_1 und Γ_2 mit der unendlich fernen Geraden der Grundebene gehen, also den Kegelschnitten Γ_1 und Γ_2 beziehungsweise homothetisch sind. Bei der Ausführung der Construction sind die beiden Fälle unterschieden, in welchen das Centrum O_1 von Γ_1 in endlicher oder unendlicher Ferne sich befindet. Rdt.

K. Cranz. Synthetische Theorie der Krümmung der Flächen zweiter Ordnung. Schlömilch Z. XXXI. 56-61.

Der Verfasser beweist die hauptsächlichsten Sätze über die Krümmung der Flächen zweiter Ordnung geometrisch, ohne Zuhülfenahme von kinematischen Betrachtungen oder von Linien-Elementen. Zu diesem Zwecke schickt er den folgenden Satz voran: „Legt man durch eine feste Tangente *PT*, welche in einem Punkte *P* einer Fläche zweiter Ordnung gezogen ist, alle möglichen Schnittebenen, so liegen die Mittelpunkte aller der Schnittcurven zweiter Ordnung in derselben Ebene; die Abstände dieser Mittelpunkte von der Tangentialebene in *P* verhalten sich wie die Quadrate der zu *PT* parallelen Halbdurchmesser der einzelnen Schnitte.“ Aus diesem Satze leitet der Verfasser zunächst den Satz von Meusnier, dann den von Euler und die Eigenschaften der Indicatrix geometrisch ab. Scht.

S. Finsterwalder. Ueber die Fadenconstruc[illegible] des Ellipsoids. Klein Ann. XXV. 546-556.

Die bekannte Fadenconstruction des Ellipsoids ist [illegible] Staude durch Betrachtung gewisser hyperelliptischer [illegible] vermittelt (F. d. M. XV. 1883. 689). Der Herr Verf[illegible] auf Anregung des Herrn Brill, diese Construction auf [illegible] allgemeine geometrische Betrachtungen zurückgeführt.

Den Ausgangspunkt bildet au[illegible] bekannten [illegible]

schen Satz folgender Satz des Herrn Weingarten (Borchardt J. LXII.). Spannt man über eine Fläche senkrecht gegen eine Curve auf derselben eine Schar biegsamer Fäden, die also die Form von Kürzesten haben, und denen man von der Curve an gleiche Längen giebt, so erzeugen die Endpunkte dieser Fäden bei ihrer Abwickelung eine Fläche (Wellenfläche), von welcher die gegebene Fläche die eine Mittelpunktsfläche (Brennfläche) ist. Haben die geodätischen Linien eine Enveloppe, so vereinfacht sich die Sache bedeutend, man kann alsdann die ganze Wellenfläche mittels eines einzigen Fadens construiren. Die zweite Brennfläche schneidet in diesem Falle die erste längs der Enveloppe rechtwinklig. Hieran schliesst sich nun die Construction einer spiegelnden Fläche, durch die ein Normalensystem in ein anderes übergeführt wird. Es ist bequem, zunächst von jedem Normalensystem zu einer seiner Brennflächen überzugehen, und man kommt dann schliesslich auf das folgende einfache Gesetz. Gegeben seien zwei Flächen A und B, auf jeder von ihnen eine Curve bez. k_1 und k_2 und die Schar der geodätischen Linien, die dieselben berühren. Man denke sich einen Faden von constanter Länge mit seinen Endpunkten in k_1 und k_2 befestigt und so gespannt, dass je ein Teil auf den Curven k_1 und k_2 liegt, je ein Teil auf A und B als geodätische Tangente von k_1 und k_2, und die beiden übrigen Teile geradlinig im Raume verlaufen. Dann ist der geometrische Ort des Knickpunktes eine Fläche, deren Normale den Winkel der beiden geradlinigen Fadenteile halbirt, so dass durch sie als spiegelnde Fläche die beiden Strahlen in einander reflectirt werden, und zwar giebt es eine einfach unendliche Schar solcher Flächen. Eine andere, bereits bekannte Eigenschaft dieser Fläche ist, dass sie der Ort der Punkte ist, für welche die Summe oder die Differenz der Abstände von zwei Wellenflächen constant ist, deren jede dem einen der beiden Strahlensysteme zugehört.

Um nun zu der Construction des Ellipsoides zu kommen, nimmt der Herr Verfasser als Brennflächen ein Ellipsoid E und ein Hyperboloid H, deren gemeinsame Tangenten, wie leicht erkannt wird, in der That ein Normalensystem bilden. Durch jeden

Punkt P des Raumes gehen vier Strahlen, die Schnitte der beiden Tangentenkegel von P an die beiden Brennflächen. Legt man durch P eine confocale Fläche als spiegelnde Fläche, so wird jeder dieser vier Strahlen in einen der andern, also das ganze Strahlensystem in sich selbst reflectirt, und hieraus folgt dann die Construction: Man befestigt einen Faden von constanter Länge mit jedem seiner Endpunkte auf je einem Zweige einer Krümmungslinie von E, legt erst je einen Teil in passender Richtung auf die Krümmungslinie, setzt jeden dieser Teile fort durch je eine berührende Kürzeste und endlich durch eine Gerade. Dann ist der Ort des Knickpunktes, in welchem die beiden Geraden zusammentreffen, ein dem ersten confocales Ellipsoid. Es werden dann noch einige metrische Eigenschaften der orthogonalen Trajectorien der ausgezeichneten Kürzesten, welche die betreffende Krümmungslinie berühren, besprochen, und so ergiebt sich der Zusammenhang mit der Staude'schen Construction. Im äussersten Grenzfall kann man das Ellipsoid und das confocale Hyperboloid durch die Grenzkegelschnitte ersetzen und gelangt so zu demjenigen Strahlensystem, dessen Wellenflächen, wie bekannt, die Cykliden sind, über die sich ebenfalls einige interessante Resultate ergeben. A.

D. Montesano. Su certi gruppi di superficie di secondo grado. Brioschi Ann. (2) XIV. 131-140.

Es handelt sich um solche Gruppen von Flächen zweiter Ordnung, bei denen irgend eine Fläche in Bezug auf irgend eine zweite Fläche der Gruppe sich selbst reciprok polar entspricht. Zwei vollständige Gruppen dieser Art sind bekannt, die eine von acht Flächen gebildet, welche von d'Ovidio und Thieme untersucht sind, eine andere von zehn Hyperboloiden, von Stephanos und Veronese betrachtet.

Der Herr Verfasser findet nun, dass es ausser diesen Gruppen keine anderen geben kann, und er giebt zugleich eine sehr einfache Construction dieser Gruppen an. A.

D. Valeri. Intorno ad alcuni iperboloidi che passano per quattro punti. Modena Mem. (2) IV. 355-377.

Man betrachte ein einschaliges Hyperboloid mit den von A, B, C, D ausgehenden Geradenpaaren aa', bb', cc', dd'. Die Geraden a_b, a_c, a_d mögen mit a, die a'_b, a'_c, a'_d hingegen mit a' zusammen die Kanten AB, AC, AD, bezw. von den Flächen ACD, ADB, ABC harmonisch trennen. Nach demselben Princip verfahre man an den Ecken B, C und D. So erhält man im ganzen 32 Gerade, von denen 16 mit ungestrichenen, 16 andere mit gestrichenen Buchstaben bezeichnet sind. Es lassen sich nun ausser dem gegebenen noch 31 andere Hyperboloide namhaft machen, von denen jedes A, B, C, D enthält und zu zugehörigen Erzeugenden vier von den 16 ersteren Geraden und ebenso viele von den 16 anderen hat. Die gegenseitigen Beziehungen dieser Hyperboloide unter einander werden in der Arbeit besprochen. Die Pole der 32 Flächen hinsichtlich einer Tetraederebene liegen in interessanter Weise angeordnet. Verlegt man eine der Tetraederflächen ins Unendliche, so sind acht Mittelpunkte die Ecken eines Parallelepipedons, dessen Kanten zu denen des Tetraeders parallel sind, während sein Mittelpunkt mit der im Endlichen liegenden Tetraeder-Ecke zusammenfällt. Jede Fläche des Parallelepipedons enthält noch vier weitere Mittelpunkte. Sie bilden ein Parallelogramm, dessen Kantenpaare zu zwei Kanten des Tetraeders parallel sind, während die dritte den Mittelpunkt desselben enthält. E. K.

A. Mannheim. Sur l'hyperboloïde articulé et l'application de ses propriétés à la démonstration du théorème de M. Sparre. C. R. CII. 501-504.

Der Satz von Hess (F. d. M. XVI. 1884. 768, XVII. 840ff.) wird auf eine neue Art geometrisch bewiesen und discutirt.

Scht.

R. Sturm. Ueber Collineationen und Correlationen, welche Flächen zweiten Grades oder kubische Raumcurven in sich selbst transformiren. Klein Ann. XXVI. 465-508.

Während bisher die lineare Transformation der Flächen zweiten Grades in sich nur im Zusammenhang mit der algebraischen Behandlung der Transformation quadratischer Formen erörtert wurde, haben wir hier eine von allen algebraischen Hülfsmitteln freie, rein-geometrische Untersuchung über die Transformation der Flächen zweiten Grades in sich vor uns. Es kommt darauf an, zu ermitteln, ob und welche Bedingungen notwendig sind, damit eine Collineation oder Correlation (beide Transformationsarten werden mit gleicher Liebe berücksichtigt) eine Fläche zweiten Grades in sich selbst transformirt, und welches System dann die in sich transformirten Flächen erzeugen. Daran schliesst sich die Aufsuchung involutorisch sich entsprechender Flächen. Besonders behandelt werden die speciellen Fälle der perspectiv und der geschart involutorischen Collineation, der Polarcorrelation und des Nullsystems. Während die auf Flächen zweiten Grades bezüglichen Resultate des Verfassers vielfach mit Resultaten von anderen Mathematikern, wie namentlich von Voss, dann aber auch von Frahm, Zeuthen, Klein, Reye, Schröter in Zusammenhang standen, war die im zweiten Teile der Abhandlung erfolgreich unternommene analoge Behandlung der kubischen Raumcurven nicht allein in der Untersuchungsmethode, sondern auch in den Resultaten durchaus neu, da die Arbeiten von Segre (Torino Mem. (2) XXXVII., F. d. M. XVII. 1885. 610) und P. Del Pezzo (Nap. Rend. XXIV., F. d. M. XVII. 1885. 645ff.) dem Verfasser noch nicht bekannt sein konnten.

Scht.

G. Hauck. Ueber die Beziehung des Nullsystemes und linearen Strahlencomplexes zum Polarsystem des Rotationsparaboloids. Schlömilch Z. XXXI. 362-36[illegible].

Das Polarsystem eines Nullsystemes kann bei

als das um 90° axial verdrehte Spiegelbild des Polarsystemes eines Rotationsparaboloides, dessen Parameter doppelt so gross ist, als die Constante des Nullsystemes. Die spiegelnde Ebene ist die Scheiteltangentialebene σ des Paraboloides. Je nachdem für einen auf σ neben dem Paraboloide stehenden Beschauer die Drehung nach links oder rechts geschieht, ergiebt sich ein rechts oder links gewundener Strahlencomplex. Js.

C. Juel. Om Keglesnitskorder, der fra et fast Punkt ses under ret Vinkel. Zeuthen T. (5). IV. 33-43.

Die Kegelschnittssehnen, welche von einem Punkte der Ebene unter rechtem Winkel gesehen werden, umhüllen bekanntlich einen neuen Kegelschnitt. Die Beweise dieser und ähnlicher Sätze, auf synthetischem Wege geführt, bilden den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes. Der Verfasser behandelt insbesondere die Fälle, in welchen der Kegelschnitt in zwei Punkte ausartet, sowohl wenn der feste Punkt ausserhalb als innerhalb der Ebene des gegebenen Kegelschnittes liegt. Aus der Untersuchung ergiebt sich: wenn der feste Kegelschnitt ein Kreis ist, so wird der geometrische Ort der Punkte, von denen die Sehnen, welche durch einen von zwei festen Punkten hindurchgehen, unter rechtem Winkel gesehen werden, eine Fläche, zusammengesetzt aus einer Kugel und einem dieselbe berührenden Umdrehungsellipsoid. Ist der Grundkegelschnitt eine Parabel, so erhält man eine Fläche der dritten Ordnung; für eine Ellipse dagegen eine Wellenfläche und ein analoges Resultat für die Hyperbel. Als Corollar ergiebt sich der Satz, dass die Punkte, aus welchen Dreiecke, die einer Ellipse einbeschrieben sind, durch rechtwinklige Ecken projicirt werden können, auf einem Ellipsoid liegen. Gm.

V. Retali. Sopra la projezione immaginaria delle superficie del second'ordine e delle curve gobbe del quarto ordine. Bologna Rend. 1885. 21-33.

Es sei Σ eine Oberfläche zweiter Ordnung, P ein beliebiger Punkt, π die Polarebene von P in Bezug auf Σ. Eine beliebige Gerade r, welche durch P geht, schneide die Ebene π im Punkte P' und die Fläche Σ in den (reellen oder conjugirt imaginären) Punkten QQ'; die Doppelpunkte der Involution PP', QQ' benenne man mit RR'. Lässt man die Gerade r sich um den Punkt P drehen, so bewegen sich die Punkte RR'; ihr Ort ist eine Oberfläche zweiter Ordnung Σ_π (oder Σ_p), welche „die Conjugirte von Σ in Bezug auf den Punkt P oder auf die Ebene π" (die Polarebene von P in Bezug auf Σ) genannt wird. Σ und Σ_π können auch „imaginäre Projectionen von einander in Bezug auf den Punkt P oder die Ebene π" heissen. Ist $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0 (i, k = 1, 2, 3, 4)$ die Gleichung von Σ in homogenen Coordinaten, und sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Coordinaten von P, so ist die Gleichung von Σ_π:

$$(\Sigma a_{ik} x_i x_k)(\Sigma a_{ik} y_i y_k) - 2(\Sigma a_{ik} y_{ik})^2 = 0.$$

Die in Bezug auf einen Punkt conjugirten Oberflächen zweiter Ordnung haben manche bemerkenswerten Beziehungen zu einander; einige derselben sind von Herrn Chr. Wiener der 58sten Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte (zu Strassburg 1885) vorgetragen worden; mehrere andere sind in der Note ausgesprochen, deren Titel an der Spitze unseres Berichtes steht. Unter diesen letzteren greifen wir die folgenden heraus: 1) Die Oberflächen Σ und Σ_π sind beide ihre eigene reciproke Polare in Bezug auf die andere. 2) Es giebt eine Schar von Polartetraedern in Bezug auf die eine der Flächen Σ und Σ_π, deren Kanten Tangenten an der anderen sind. 3) Die reciproken Polarräume eines und desselben Raumes in Bezug auf Σ und Σ_π sind centrisch-involutorische Systeme, indem P der Mittelpunkt, π die Ebene der Verwandtschaft ist. Ferner bestimmt der Verfasser die Art der Conjugirten einer Oberfläche zweiter Ordnung gegebener Art.

Neben der Oberfläche Σ wollen wir nun eine Gerade g und ihre Polare g' in Bezug auf Σ betrachten. Auf jeder die beiden Geraden g, g' (in den Punkten G, G') und die Fläche Σ (in den Punkten H, H') treffenden Geraden r entsteht eine Involution $GG'.HH'$, deren Doppelpunkte RR' heissen mögen. Bei einer

Veränderung der Geraden r bewegen sich die Punkte RR'; ihr Ort ist eine Oberfläche zweiter Ordnung $\Sigma_{gg'}$, welche „Conjugirte von Σ in Bezug auf die Gerade g oder die Gerade g'“ heisst (die Polare von g in Bezug auf Σ), oder auch die „imaginäre Projection von Σ in Bezug auf das Polarenpaar g, g'“. Σ und $\Sigma_{gg'}$ schneiden sich in einem windschiefen Vierseit, welches die Schnittpunkte von Σ mit den Geraden g und g' zu Ecken hat. Sind A und B die Schnittpunkte von Σ mit der Geraden g, ferner α und β die entsprechenden Tangentialebenen, so sind Σ und $\Sigma_{gg'}$ centrisch-involutorisch, wenn man A (oder B) als Mittelpunkt, β (oder bezw. α) als Ebene der Verwandtschaft annimmt. Es giebt unendlich viele Tetraeder, welche der einen von den Oberflächen Σ und $\Sigma_{gg'}$ einbeschrieben und in Bezug auf die andere polar sind. Die reciproken Polarräume eines und desselben Raumes in Bezug auf Σ und $\Sigma_{gg'}$ sind zwei geschart-involutorische räumliche Systeme, von denen g und g' die Ordnungslinien sind. U. s. w.

Es sei P eine reelle Ecke des zwei Oberflächen zweiter Ordnung Σ und Σ' gemeinsamen Poltetraeders; ihr Schnitt ist eine Curve vierter Ordnung $\Sigma\Sigma'$. Die beiden Curven $\Sigma\Sigma'$ und $\Sigma_P\Sigma'_P$ sind die „gegenseitigen imaginären Projectionen in Bezug auf den Punkt P“ (Wiener l. c.). Sind g und g' zwei Gegenkanten des vorigen Tetraeders, so bestimme man die Oberflächen $\Sigma_{gg'}$ und $\Sigma'_{gg'}$. Jede Ebene γ durch g schneidet die Curve $\Sigma\Sigma'$ in vier Punkten. Nehmen wir die Gerade g als Axe und den Punkt $\gamma g'$ als Mittelpunkt einer ebenen centrisch-involutorischen Collineation an, so entsprechen diesen Punkten die Schnittpunkte von γ mit der Curve $\Sigma_{gg'}\Sigma'_{gg'}$. Deshalb schlägt der Verfasser für die Curve $\Sigma_{gg'}\Sigma'_{gg'}$ den Namen vor „imaginäre Projection der Curve $\Sigma\Sigma'$ in Bezug auf die Geraden g, g'“. La. (Lp.)

E. Bertini. Sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2 208-211.

Kürzere Ableitung der wichtigsten in Segre's Arbeit „Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque

(S. F. d. M. XVI. 1884. 604) enthaltenen Resultate auf Grund eines bekannte Resultate der Raumgeometrie verallgemeinernden Verfahrens. Schg.

H. Thieme. Die Flächen III. Ordnung als Ordnungsflächen von Polarsystemen. Klein Ann. XXVIII. 133-151.

Das Polarsystem einer Fläche III. Ordnung wird im § 1 construirt, indem den Punkten des Raumes die Elemente eines Gebüsches von Flächen II. Ordnung projectiv so zugeordnet werden, dass die Polare eines Punktes für die einem zweiten Punkte zugeordnete Fläche mit der Polare des zweiten Punktes für die dem ersten Punkte zugeordnete Fläche zusammenfällt. Aus zwei solchen Polarsystemen wird in § 2 der Büschel, aus deren drei in § 3 der Bündel, aus deren $(r+1)$ endlich in § 4 die durch sie bestimmte lineare Mannigfaltigkeit r^{ter} Stufe von Polarsystemen construirt. Nachdem im § 5 bewiesen, dass die Gesamtheit der Flächen III. Ordnung eine lineare Mannigfaltigkeit 19ter Stufe bildet, wird in § 6 die Construction der Fläche III. Ordnung aus 19 Punkten durchgeführt.

Diese streng synthetische Arbeit soll vor allem dazu dienen, auf die grundlegende Abhandlung des Verfassers im 24. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik „Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme“ (F. d. M. XI. 1879. 444) hinzuweisen. Js.

F. Schur. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. Leipz. Ber. 1884. 128-131.

Herr Le Paige hat (Acta Math. V. p. 199) folgende Erzeugung einer Fläche dritten Grades gegeben:

Sind in einer Ebene α vier gerade Linien g_1, g_2, g_3, g_4 gegeben, ferner im Raume, diesen zugeordnet, vier andere gerade Linien h_1, h_2, h_3, h_4, welche nicht auf derselben Fläche zweiten Grades liegen, und sind die Ebenenbüschel $(g_1)(g_2)(g_3)(g_4)$ derart quadrilinear auf einander bezogen, dass je vier Ebenen einander

entsprechen, deren Schnittpunkte mit den resp. Geraden h_1, h_2, h_3, h_4 in je einer Ebene ε liegen, so ist der Ort der Punkte, in denen sich vier entsprechende Ebenen schneiden, eine Fläche dritter Ordnung F^3, welcher das vollständige Vierseit $g_1 g_2 g_3 g_4$ eingeschrieben ist.

Herr Schur knüpft seine Betrachtungen an diese Erzeugungsart der Fläche dritter Ordnung an und zeigt, wie, wenn die Fläche F^3 gegeben vorliegt, die Elemente der Le Paige'schen Erzeugung auf constructivem Wege gewonnen werden können.

Schn.

A. Petot. Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre. C. R. CII. 737-740.

Die trilineare Beziehung dreier Ebenenbüschel und die durch eine solche Beziehung ermöglichte Construction der Fläche dritter Ordnung in gewissen Fällen ist schon vom Referenten (Math. Ann. Bd. 17) und andern Mathematikern in Abhandlungen erörtert, die der Verfasser nicht zu kennen scheint, da er sie sonst citirt haben würde. Doch dürfte die vom Verfasser gelieferte Verbindung des Gegenstandes mit der Theorie der linearen Complexe neu sein. Diese Verbindung führt den Verfasser zu einem Satze, den er mit Recht eine Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes nennt, und der darin gipfelt, dass gewisse sechs Strahlen einem und demselben linearen Complexe angehören. Dieser Satz ermöglicht dann die Construction einer Fläche dritter Ordnung aus drei sich nicht schneidenden Geraden und sieben Punkten.

Scht.

C. Guichard. Applications de la théorie des cubiques gauches. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 259-262.

Die Verbindungslinien und Verbindungsebenen von sechs beliebigen Punkten des Raumes schneiden eine Ebene bekanntlich in einer Configuration, in welcher man sechs Fünfecke unterscheiden kann. Legt man nun durch die sechs Punkte eine kubische Raumcurve und projicirt dieselbe von jedem der sechs

Punkte aus, so erhält man auf der Ebene um jedes der sechs Fünfecke einen Kegelschnitt. Die sechs Kegelschnitte müssen nun drei gemeinsame Punkte haben, nämlich die drei Punkte, in denen die Ebene von der kubischen Raumcurve geschnitten wird. Dieser Betrachtung gehen noch zwei Betrachtungen vorauf, bei denen die kubische Raumcurve durch vier Punkte im Raume und zwei Punkte der Ebene, bezw. durch fünf Punkte im Raume und einen Punkt der Ebene gelegt wird.

Scht.

W. Wirtinger. Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel. Wien. Ber. XCIV. 302-309.

Herr Cremona hatte in den Mem. di Bologna (2) III, 1863) einige allgemeine Sätze über Raumcurven dritter Ordnung aufgestellt und war durch Specialisirung dieser Sätze zu Sätzen über rechtwinklige Tangenten, Osculationsebenen u. s. w. für die räumliche Parabel gelangt, wobei sich auch ergeben hatte, dass der Ort der Brennpunkte der Parabeln in den Osculationsebenen einer räumlichen Parabel eine Raumcurve dritter Ordnung ist, welche den imaginären Kugelkreis in zwei Punkten schneidet. Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich nun eingehender mit dieser Brennpunktscurve, und zwar ausgehend von einer einfachen und directen Construction der Brennpunkte. U. a. ergiebt sich, dass die Brennpunktscurve den imaginären Kugelkreis in zwei Punkten trifft, dass alle sie enthaltenden Flächen zweiter Ordnung ein System paralleler Kreisschnittebenen gemeinsam haben, dass jede den imaginären Kugelkreis zweimal schneidende Raumcurve dritter Ordnung als Brennpunktscurve aufgefasst werden kann, und dass die letztere die räumliche Parabel eindeutig bestimmt. Scht.

D. Montesano. Su le correlazioni polari dello spazio rispetto alle quali una cubica gobba è polare a sè stessa. Rom. Acc. L. Mem. (4) III. 105-115.

Unter den räumlichen Correlationen, welche eine kubische

Raumcurve C_3 in ihre osculirende abwickelbare Fläche überführen, giebt es ∞^2 involutorische (Sturm, Math. Ann. XXVI. 304 - 308, F. d. M. XVII. 1885. 606); dieselben bilden ein System Σ_1, von welchem wir ein beliebiges Element mit Π bezeichnen wollen, und dessen Erforschung das Ziel der zu besprechenden Abhandlung des Hrn. Montesano ist.

Das von der Curve C_3 bestimmte Nullsystem H ist das einzige, welches die Eigenschaft besitzt, C_3 in ihre osculirende abwickelbare Fläche zu verwandeln. Verbindet man H mit einer gescharten Collineation K, welche C_3 in sich selbst überführt, so gelangt man zu einer Polarcorrelation Π; umgekehrt kann jede Polarcorrelation Π auf diese Art construirt werden. Daraus folgt, dass sich aus den Eigenschaften des K-Systems Σ diejenigen des Π-Systems Σ_1 herleiten lassen.

Jede Transformation K bestimmt eine Involution I zwischen den Punkten von C_3, und umgekehrt stellt jede Involution zwischen den Punkten von C_3 eine Transformation K her. Jede Gerade des Raumes ist Leitstrahl dreier Verwandtschaften K. Das System Σ entspricht sich selber in Bezug auf jede der Transformationen K.

Der Ort der Punkte, welche einem beliebigen Punkte P in Bezug auf die ∞^2Transformationen K entsprechen, ist eine Oberfläche F sechster Ordnung, welche P als dreifachen Punkt und den conjugirten P' von P in Bezug auf C_3 als vierfachen Punkt besitzt; C_3 ist eine Cuspidallinie von F, während die durch P gehende Sehne von C_3 eine dreifache Linie ist und die drei durch P' gehenden Schmiegungsstrahlen von C_3 drei Doppelgerade sind. Auf der Oberfläche F liegen auch die Schnitte der Schmiegungsebenen von C_3, welche durch P gehen, und die in diesen Ebenen liegenden Tangenten dieser Curve. Eine merkwürdige Eigenschaft der Oberfläche F ist die, dass sie von jeder Schmiegungsebene von C_3 in drei Kegelschnitten geschnitten wird.

Das System Σ (und folglich auch das System Σ_1) kann leicht eindeutig auf den Punkten einer Ebene μ abgebildet werden. Man nehme hierzu in dieser Ebene einen willkürlichen Kegel-

schnitt C_2 an und stelle eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von C_3 und C_2 her. Dann wird, da jeder Collineation K schon eine Involution I von C_3 entspricht, ihr auch eine Involution auf C_2 entsprechen; der Pol dieser Involution wird als das Bild der Transformation K und der Transformation Π angesehen, welche die Verbindung von K und von H ist. Die Polarcorrelationen Π, deren Ordnungsflächen durch einen Punkt A gehen oder eine und dieselbe Ebene α berühren, haben ihre Bilder auf einer kubischen Curve der Ebene μ, welche durch die Angabe von A oder von α bestimmt ist; diejenigen, deren Ordnungsflächen eine und dieselbe Gerade a berühren, bilden in der Ebene μ eine biquadratische Curve vom Geschlechte 3. Daraus folgt: Die Ordnungsflächen der Polarcorrelationen Π bilden ein derartiges System, dass neun von ihnen durch zwei Punkte gehen oder auch zwei Ebenen berühren, oder endlich durch einen Punkt gehen und eine Ebene berühren; dass zwölf eine Gerade berühren und durch einen Punkt gehen, oder eine Ebene berühren; endlich dass sechzehn zwei Gerade berühren.

Die Abbildung der Collineationen auf der Ebene μ führt zu einer Abbildung der Oberfläche F auf derselben Ebene. Man braucht nur die Festsetzung zu treffen, dass der Bildpunkt einer Transformation K auch den Punkt von F abbildet, der dem festen Punkte P in Beziehung auf K entspricht. Den ebenen Schnitten von F entsprechen Curven dritter Ordnung der Ebene μ, welche durch drei feste Punkte gehen. Dieses Entsprechen führt abermals auf die früher angeführten Eigenschaften der Oberfläche.

Der Geradencomplex der Ordnungsflächen der Polarcorrelationen Π zerfällt in den linearen Complex, der durch die gegebene Curve C_3 bestimmt wird und den von denjenigen Geraden gebildeten Complex (dritten Grades), welche vier Tangenten dieser Curve in harmonischen Punkten schneiden.

La. (Lp.)

A. SCHIAPPA MONTEIRO. Sur la génération du conoïde circonscrit à une courbe plane au moyen de courbes du même ordre de celle-ci. Lisb. J. XII.

Bekanntlich lässt das Conoïd, welches einem Kegelschnitt umschrieben ist, eine Erzeugung durch Linien zweiter Ordnung zu. Der Verfasser giebt hierfür einen neuen synthetischen Beweis, welcher auch noch gültig ist, wenn die Directrix von beliebiger Ordnung ist.

Der Verfasser fügt ferner einige Bemerkungen hinzu über die anharmonische und homographische Teilung der Erzeugenden der betrachteten Oberfläche. Tx. (Hch.)

W. HESPE. Ueber einige windschiefe Flächen mit Directorebene, deren Generatricen zwei aufeinander und auf der Directorebene senkrechte Kegelschnitte treffen. Diss. Marburg. 72 S. 8°.

H. G. ZEUTHEN. Su le superficie di 4° ordine con conica doppia. Brioschi Ann. (2) XIV. 31-70.

Die Aufgabe der Abhandlung ist, die Verhältnisse auf der Oberfläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt an der Hand der Beziehungen direct zu erläutern, die zwischen den verschiedenen Systemen von Kegelschnitten bestehen, welche eine Curve vierter Ordnung vierpunktig berühren. Dabei macht der Verfasser mit Recht den ausgedehntesten Gebrauch von dem Continuitätsprincip, das eben hier, wo es sich nur um Interpretation algebraischer Gleichungen handelt, unbedingte Geltung besitzt. Eine projectivische Eigenschaft, die unter Voraussetzung ganz bestimmter, aber möglicher Realitätsverhältnisse entwickelt war, wird also ohne weiteres auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden können.

Die von einem Punkte P des Doppelkegelschnittes ausgehenden Tangenten der Fläche gehören einem allgemeinen Kegel vierter Ordnung an; er schneidet auf irgend einer Ebene eine

Curve aus, welche die Projectionen von Curven der Fläche in den gemeinsamen Punkten beider berührt. Jede Curve vierter Ordnung kann in diesem Sinne mit einer Fläche vierter Ordnung in Verbindung treten. Die zwei Tangentialebenen der Fläche schneiden zwei Doppeltangenten der Curve aus; die 26 übrigen müssen von doppelt berührenden und P enthaltenden Ebenen der Fläche herrühren. Man weiss, dass 10 von diesen Ebenen dieselbe in Kegelschnittpaaren schneiden, während jede der 16 übrigen eine Gerade und eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte in P enthält.

Herr Zeuthen giebt eine höchst einfache Betrachtung, welche diese Thatsache bei der Fläche mit reellen Tangentenebenen in dem reellen Doppelkegelschnitte in Evidenz setzt. Hierzu unterscheidet er „sichtbare“ und „nicht sichtbare“ Punkte der Fläche. Ein Punkt bewege sich im projectivischen Sinne stetig auf der Fläche von A bis B und bleibe beim Ueberschreiten des Doppelkegelschnittes in derselben Schale der Fläche. Von der Projection seiner Bahn bestimme man die folgenden Anzahlen: erstens die der (gewöhnlichen) Berührungen mit der Curve vierter Ordnung, zweitens die Anzahl der unendlich fernen Punkte, drittens die Zahl der Schnittpunkte mit der Geraden, in welche der Doppelkegelschnitt sich projicirt. Ist die Summe derselben eine gerade Zahl, so sind beide Punkte entweder sichtbar oder unsichtbar; ist die Anzahl ungerade, so ist der eine Punkt sichtbar, der andere hingegen unsichtbar. Eine Ebene schneide nunmehr in einer Geraden der Fläche und in einer Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt P. Dieselbe treffe die Projectionen der Tangentialebenen $T'A'$ und $T'B'$ in den Punkten A' und B'. $A'B'$ ist dann die Projection eines Teiles der Curve dritter Ordnung, der zwei Punkte verbindet, die unendlich nahe bei P auf verschiedenen Schalen der Fläche liegen. Man bestimme nun die Zahl α, von welcher es abhängt, ob beide Punkte sich gleich verhalten oder nicht, mit Hülfe der Strecke $A'B'$. Alsdann wiederhole man dasselbe für die Strecke $A'T'B'$, es ergebe sich die Zahl β. $\alpha + \beta$ muss alsdann notwendig ungerade sein. Denn der letztere Zug ist das Bild einer Bewegung,

welche auf der Fläche in unendlicher Nähe von P statt hat; der Punkt schreitet zuerst auf der einen Schale fort, tritt dann aber in einem Punkte der Tangente in die andere Schale über. β wird daher ungerade sein, wenn beide Punkte sichtbar oder unsichtbar sind; gerade, wenn der eine von ihnen sichtbar, der andere unsichtbar ist. Da nun die Gerade, welche die Ebene des Kegelschnittes ausschneidet, den Umfang des Dreieckes entweder überhaupt nicht oder in zwei Punkten schneidet, so muss notwendig auf demselben eine ungerade Anzahl von Berührungspunkten der Curve vierter Ordnung liegen.

Falls aber ein derartiges Dreieck eine gerade Zahl von den sechs Berührungspunkten der drei Geraden mit der Curve vierter Ordnung aufweist, so liegen alle sechs nach dem Theorem von Carnot auf einem Kegelschnitte, dessen beide letzten Schnittpunkte mit der Curve vierter Ordnung ebenfalls Berührungspunkte einer Doppeltangente sind. Die beiden andern bilden ein Paar derjenigen Schar vierpunktig berührender Kegelschnitte, welche die beiden Doppeltangenten, die in den Tangentialebenen von P liegen, bestimmen. Da nun alle ihre sechs Doppeltangentenpaare reell sein können, und da ferner die acht Berührungspunkte je zweier dieser Paare auf einem Kegelschnitt liegen, so schliesst man, dass, wie in diesem Fall besonderer Realitätsverhältnisse, so im allgemeinen, zehn Ebenen von P ausgehen, die Paare von Kegelschnitten ausschneiden, während 16 andere Ebenen Gerade der Fläche enthalten.

Weil das Vorige für jeden Punkt des Doppelkegelschnittes gilt, so erhalten wir einzelne Kegelschnittscharen auf der Fläche, die in Scharen vierpunktig berührender Kegelschnitte von P aus projicirt werden. Je zwei von diesen Scharen sind conjugirt, das heisst, sie haben die Enveloppe der sie tragenden Ebenen mit einander gemeinsam. Ein Punkt der Projectionsebene bestimmt genau zwei Kegelschnitte einer bestimmten Schar vierpunktig berührender Kegelschnitte der vom Tangentenkegel ausgeschnittenen Curve vierter Ordnung. Da derselbe die Projection von zwei verschiedenen Punkten ist, so geht durch jeden derselben ein Kegelschnitt der betreffenden Schar, der sich in

einen der beiden vierpunktig berührenden Kegelschnitte projiciren muss, und es können sich Kegelschnitte derselben Flächenschar nicht begegnen. Durch irgend einen Punkt der Fläche geht demnach genau ein Kegelschnitt irgend einer Schar und genau ein anderer der conjugirten Schar. Die Ebenen, welche solche Kegelschnittpaare tragen, umhüllen daher Kegel zweiten Grades, deren Zahl genau fünf sein muss, weil von jedem Punkt des Doppelkegelschnittes 10 Tangentialebenen ausgehen. Auf diese Art ist man also auf die Kummer'schen Kegel der Fläche geführt. Dass die Strahlen eines Kegels die Fläche doppelt berühren, das heisst die Schnittpunkte zweier conjugirten Kegelschnitte enthalten, ist aus der gegebenen Beziehung unmittelbar klar. Ferner ist auch unmittelbar ersichtlich die bekannte Art, in welcher vier mit der Spitze eines Kummer'schen Kegels in einer Geraden liegende Punkte in zwei Paare zerfallen. Die beiden Paare können sowohl durch zwei Kegelschnitte der einen, als auch durch zwei Kegelschnitte der conjugirten Schar ausgeschnitten werden.

Von den Flächenkegelschnitten eines Systems werden sechs von P aus in Doppeltangentenpaare derselben Schar projicirt. Zwei von diesen sechs Paaren enthalten zusammen die vier Geraden, welche die Tangentenebenen der Fläche in P und die an den betreffenden Kummer'schen Kegel gehenden Tangentialebenen ausschneiden. Die übrigen vier Paare rühren von Geradenpaaren der Fläche her, die den Kummer'schen Kegel berühren. Dieselbe Ueberlegung kann man für das conjugirte System und seine Projection machen. Da die vier besonderen Doppeltangenten aus zwei Tangentenpaaren auch dieses Systems bestehen, so haben beide Systeme nach bekannten Sätzen keine Doppeltangent[illegible] mehr mit einander gemeinsam, und es wird daher jed[illegible] Kummer'sche Kegel von allen 16 Geraden der Fläche berü[illegible]

Die Anordnung der 16 Geraden ist diejenige von 16 Gera[illegible] einer Fläche dritter Ordnung, die eine 17te nicht treffen, eine v[illegible] den Herren Geiser und Darboux beobachtete Thatsache.

Aus dem Obigen geht weiter hervor, dass die Tangenten[illegible] ebenen in P und die Paare der Berühru[illegible] welche an

die Kummer'schen Kegel führen, die sechs Doppeltangentenpaare einer Schar ausschneiden. Da je zwei von ihnen ihre acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt haben, so liegen — und dieses Resultat ist neu — die vier Haupttangenten der Fläche im Punkte P und die vier Berührungspunkte der beiden doppelt berührenden Ebenen, welche von P ausgehen und denselben Kummer'schen Kegel berühren, auf einem Kegel.

Aus der Thatsache, dass die sechs Spitzen der in einer Schar vorkommenden Doppeltangentenpaare auf einem Kegelschnitte liegen, folgt sofort das nachstehende neue Resultat: „Ein Kegel, von dem fünf Strahlen einen Punkt des Doppelkegelschnittes mit den Spitzen der Kummer'schen Kegel verbinden, enthält auch die Tangente des Doppelkegelschnittes in dem betreffenden Punkte.“ Wenn man zwei derartige benachbarte Kegel auffasst, erhält man den Satz: Die Curven dritter Ordnung, welche die Spitzen der Kummer'schen Kegel mit Punkten des Doppelkegelschnittes verbinden, berühren den letzteren.

Jede Curve, welche mit der Curve vierter Ordnung nur Berührungspunkte gemein hat, muss notwendig die Projection zweier verschiedenen Curven der Fläche von P aus sein. Da die Geometrie auf der Fläche von Clebsch ausführlich erörtert worden ist, so beschränkt sich der Herr Verfasser darauf, die Raumcurven dritter Ordnung zu untersuchen, die auf der Fläche liegen. Man betrachte zuerst die Curven dritter Ordnung, welche den Punkt P treffen; dieselben werden in Systeme vierpunktig berührender Kegelschnitte projicirt; man erkennt, dass jedes System durch die Spur einer Tangentenebene und durch eine Doppeltangente, welche von einer Geraden der Fläche herrührt, bestimmt wird. Infolge dessen ist 32 die Anzahl der P enthaltenden Curvensysteme, und jedes einzelne ist von einfacher Mächtigkeit. Dieselben setzen sich zu 16 zweifachen Mannigfaltigkeiten zusammen, wenn man P als beweglich betrachtet.

Der Tangentenkegel, welcher von P ausgeht, trifft den Doppelkegelschnitt in den vier Cuspidalpunkten der Fläche, in deren jedem die beiden Tangentialebenen zusammenfallen. Von hier aus erhält man einen Tangentenkegel mit einem Doppelstrahl,

der in der Tangentialebene liegt. In der Spur dieser letzteren liegt jetzt ein ausgeartetes Doppeltangentenpaar der Curve vierter Ordnung vereinigt. Die anderen fünf Doppeltangentenpaare der Schar, die im allgemeinen Fall durch die Spuren der Tangentenebenen bestimmt werden, arten ebenfalls in fünf Doppelgerade aus; sie sind die anderen Tangenten, die ausser der Spur der Tangentenebene an die Curve vierter Ordnung vom Doppelpunkt aus führen. Hieraus bestätigt sich sofort, dass die Kummer'schen Kegel die Cuspidalpunkte enthalten.

Auch wenn man von der Spitze T eines Kummer'schen Kegels aus projicirt, erhält man neben dem doppelt gezählten Kummer'schen Kegel einen Tangentenkegel vierter Ordnung. Seine Spur in der Projectionsebene ist eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Ihre acht Doppeltangenten rühren von den Tangentialebenen her, die von T aus an die anderen Kummer'schen Kegel führen. Die so entstehenden Tangentenpaare gehören zu einem System vierpunktig berührender Kegelschnitte mit der Spur des betreffenden Kummer'schen Kegels und der Projection des Doppelkegelschnittes.

Im Abschnitt III giebt der Herr Verfasser nach Methoden, wie sie von ihm und von Herrn Klein ausgebildet sind, eine Klassification derjenigen Flächen, die reelle Punkte auf ihrem Doppelkegelschnitt besitzen. Derselbe zerfällt in die eigentliche Doppelcurve, deren Punkte reelle Tangentialebenen ergeben, und in die isolirte Curve, für deren Punkte keine reellen Tangentialebenen sich ergeben. Beide Curven grenzen in den Cuspidalpunkten aneinander und sind also höchstens zweiteilig.

Der Schnitt des Tangentenkegels muss nun von einer der sechs Arten von Curven vierter Ordnung sein, die man nach des Verfassers Untersuchungen kennt, und zwar tritt eine Fläche zu zwei verschiedenen dieser Curven in Beziehung, wenn eine Doppel- und eine isolirte Curve vorhanden ist. Nun geben die reellen Geraden der Fläche stets zu reellen Doppeltangenten, die imaginären zu Paaren conjugirter Doppeltangenten Veranlassung; ein reeller Kummer'scher Kegel (mit reeller Gleichung) ergiebt zwei reelle Doppeltangenten oder ein Paar conjugirt imaginärer; im letzteren

Fall liegt der Punkt des Doppelkegelschnittes innerhalb des betreffenden Kegels. Die Tangentenebenen bestimmen ein letztes Paar von conjugirten oder reellen Doppeltangenten, je nachdem der Projectionspunkt innerhalb der isolirten oder der eigentlichen Doppelcurve liegt; die sechs letzterwähnten Paare kommen in derselben Schar vor. Wie viel reelle Systeme von vierpunktig berührenden Kegelschnitten in den einzelnen Zeuthen'schen Fällen sich ergeben, und wie viele Paare reeller und conjugirt imaginärer Doppeltangenten in jedem System vorkommen, ist aus einer von Herrn Crone (Math. Ann. XII) aufgestellten Tabelle zu ersehen. Nimmt man noch hinzu, dass eine Schale vom Geraden-Charakter, auf der unpaare Curven sich finden, nach der Projection nur den Teil der Ebene doppelt überdecken kann, der ausserhalb eines Zuges der Curve vierter Ordnung liegt, während eine Fläche vom Punkt-Charakter in den doppelt gezählten Teil der Ebene innerhalb eines solchen Zuges projicirt wird, so hat man genügende Anhaltspunkte zu einer Klassification der Flächen. Es ergeben sich auf solche Art sechs verschiedene Arten von Flächen. In jedem Fall ist die Zahl der reellen Geraden (16, 8, 4, 0) und die der reellen Kummer'schen Kegel, sowie die Stellung der isolirten Curve gegen dieselben vollkommen bestimmt. Es lässt sich nunmehr ermitteln, wie viel Systeme reeller Kegelschnitte in den einzelnen Fällen sich ergeben können.

Im vierten Abschnitt werden die betrachteten Flächen mit Hülfe einer Erzeugung untersucht, die für Cykliden zuerst von Darboux gegeben wurde. Man ziehe nämlich von einem Punkte T aus Strahlen, die zwei Flächen (σ_2 und δ_2) in Punktepaaren SS' und DD' treffen, und suche diejenigen beiden Punktepaare M_1M_2 und $M'_1M'_2$, die DD' und TS bez. TS' harmonisch trennen. Man erhält dann eine Fläche vierter Ordnung, deren Doppelkegelschnitt die Berührungscurve des Tangentenkegels von δ_2 mit der Spitze T ist. Derjenige von σ_2 ist ein Kummer'scher Kegel derselben. Wird δ_2 eine Kugel mit dem Mittelpunkt T, so erhält man eine Cyklide. Die Raumcurve vierter Ordnung, in der σ_2 und δ_2 sich schneiden, trennt die Punkte von σ_2, denen reelle Punktepaare der Fläche entsprechen, von

denjenigen, denen keine reellen Punkte entsprechen. Aus der Untersuchung der verschiedenen Formen derselben kann man ein zweites Einteilungsprincip gewinnen, bei dem auch die Curven mit imaginärem Doppelkegelschnitt berücksichtigt werden können. E. K.

E. Study. Ueber die Raumcurven vierter Ordnung, zweiter Art. Leipz. Ber. 3-9.

Zur Tangentenschar einer Raumcurve IV. Ordnung II. Art C^4 liegen unendlich viele Raumcurven III. Ordnung C^3 perspectiv. Sie schmiegen sich den stationären Ebenen der C^4 an, berühren die C^4 in je einem Punkte, dessen Schmiegungsebenen bezüglich beider Curven zusammenfallen, und bestimmen zu einem Bündel gehörige lineare Complexe, deren gemeinsame Regelschar durch die vier Tangenten in den stationären Punkten der C^4 geht. Die stationären Ebenen der C^4 sind die Hauptebenen, ihre Tangenten Strahlen und die von den Schmiegungsebenen der C^3 gebildeten Büschel Γ^3 Ordnungsebenenbüschel eines Reye'schen Complexes. Den Büscheln Γ^3 ist eine Steiner'sche Fläche eingeschrieben, sie berührt die stationären Ebenen der C^4 in den Punkten je eines Kegelschnittes und enthält die C^4 als Haupttangentencurve. Einem beliebigen Punkte S entspricht auf der C^4 eine Punktinvolution vierter Ordnung. Von ihren Quadrupeln liegt eins in einer Ebene und zwar in der Polarebene von S bezüglich derjenigen Fläche II. Klasse, welche von den äquianharmonischen Ebenen der Curve umhüllt wird. Js.

J. Cardinaal. Opmerkingen naar aanleiding eeniger stellingen uit de leer van den bundel oppervlakken van de tweede orde. Nieuw Archief. XIII. 213-222.

Zweck dieser Arbeit ist die Behandlung dreier Sätze aus der Lehre von dem Büschel von Oberflächen zweiter Ordnung. I. Die Raumcurve vierter Ordnung wird berührt von vier Geraden sowohl aus dem einen als aus dem [illegible] der

Erzeugenden einer Regelfläche zweiter Ordnung. II. Eine Sehne einer Raumcurve vierter Ordnung wird im allgemeinen durch vier ihrer Tangenten geschnitten. III. Eine beliebige Gerade wird im allgemeinen durch acht Tangenten einer Raumcurve vierter Ordnung und erster Art geschnitten.

Aus diesen Sätzen werden einige Eigenschaften und Constructionen abgeleitet. G.

A. Del Re. Nuova costruzione della superficie del quint' ordine, dotata di curva doppia del quint' ordine. Napoli Rend. XXV. 272-277.

Die genannten Flächen sind bereits von Clebsch, Cremona, Sturm, Caporali und Darboux untersucht. Herr Darboux erzeugt eine solche Fläche als Ort der Berührungspunkte der Tangentialebenen von einem beliebigen Punkte an ein System confokaler Flächen zweiter Ordnung; doch ist die so erzeugte Fläche nicht allgemein. Der Herr Verfasser geht von einer anderen sehr einfachen Erzeugungsart aus, welche die allgemeinen Flächen ergiebt.

Sind zwei ebene Systeme σ, σ' homographisch auf ein Ebenenbündel S bezogen, so ist der Ort des Durchschnittspunktes des Strahles $\sigma\sigma'$ mit der entsprechenden Ebene S eine Fläche 5ter Ordnung, welche eine Doppelcurve 5ter Ordnung enthält mit einem dreifachen Punkte in S, welcher zugleich dreifacher Punkt der Fläche ist. Die Fläche enthält 10 Gerade, über deren gegenseitige Lage sich eine Reihe von Sätzen ergiebt. Diese Betrachtungen sowie eine darauf gegründete Klassification der Flächen bilden den Hauptinhalt der Arbeit. A.

A. Petot. Construction de la courbe gauche du sixième ordre et du premier genre. Transformation de la surface du troisième ordre sur un plan. C. R. CII. 805-807.

Die Betrachtung hängt mit den Entwickelungen zusammen, die der Verfasser kurz vorher hinsichtlich einer aus drei Geraden

und sieben Punkten zu bestimmenden Fläche dritter Ordnung gegeben hat (s. Referat S. 592), und liefert die Construction einer Raumcurve 6ter Ordnung vom Geschlechte 1, falls zu ihrer Bestimmung sechs Punkte und drei sie viermal schneidende Secanten gegeben sind. Scht.

F. MEYER. Ueber die Projection einer Raumcurve von einem ihrer Punkte aus. Böklen Mitt. I_3. 82-83.

Projicirt man eine Raumcurve erst von einem ihr beliebig nahe liegenden Punkte P' aus und führt dieses Projectionscentrum in den benachbarten Punkt P der Curve selbst über, so zerfällt die Projectionscurve, indem sich eine Gerade absondert, und zwar diejenige Gerade, welche in der Projectionsebene die Spur der Geraden PP' mit der Spur der in P an die Raumcurve zu legenden Tangente verbindet. Jede von einem Punkte einer Raumcurve aus erhaltene Projectionscurve ist also durch Hinzunahme einer durch die Tangentenspur gehenden, sonst aber beliebigen Geraden zu vervollständigen. R. M.

G. A. BORDIGA. Studio generale della quartica normale. Ven. Ist. Atti (6) IV. 503-525.

Einer normalen, das heisst durch einen vierdimensionalen Raum R_4 erstreckten Curve C^4 vierter Ordnung gehören die Punkte an, in denen homologe Strahlen zweier in demselben liegender collinearer Bündel sich treffen. Schnittlinien homologer Ebenen sind Sehnen und Schnittebenen homolo[illegible] ... ume (in drei Punkten) „schneidende Ebenen" (piani s[illegible] ... Curve. Dieselbe kann auch durch vier projectivisc[illegible] ... erzeugt werden, die vier beliebige schneidende E[illegible] ... haben. Sie deckt sich mit ihrem dualistischen Ge[illegible] ... Curve kann durch sieben Punkte, durch fünf [illegible] ... die zu zweien von ihnen gehörigen Tangenten, durch [illegible] ... und vier Sehnen u. s. w. eindeuti[illegible] ...t werden.

Projicirt man die Curve zunächst von einem Punkte aus auf einen gewöhnlichen Raum, so erhält man eine rationale Raumcurve vierter Ordnung mit einer Schar dreifacher Secanten. In diese werden die vom Centrum der Projection ausgehenden schneidenden Ebenen projicirt. Die vier vom Centrum ausgehenden Schmiegungsräume von C^4 ergeben die stationären Schmiegungsebenen der räumlichen Curve. Da die Projection auf eine Ebene eine rationale Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten ist, so sendet jede Gerade von R_4 drei Sehnen von C^4 aus.

Eine Normalcurve vierter Ordnung liegt auf dreifach unendlich vielen Regelflächen F_2^3 dritter Ordnung und zweiter Dimension. Durch irgend drei Raumbüschel, die mit einem vierten zur Erzeugung der Curve dienen, wird eine solche Fläche hervorgebracht. Mit irgend einem gewöhnlichen Raume hat die Fläche eine Raumcurve dritter Ordnung, mit irgend einer Ebene daher drei Punkte gemeinsam. Auf der Fläche giebt es offenbar eine Schar von Geraden und eine bestimmte andere, die zunächst drei und sodann alle Geraden derselben trifft. Sechs Punkte der Fläche bestimmen eine auf derselben liegende C^4. Eine Darstellung der Curve C^4 in einem gewöhnlichen Raume Σ_3 erhält man, wenn man diesen reciprok auf zwei collineare Strahlbündel ω_0 und ω_0' bezieht, die C_4 erzeugen. Jedem Strahlenpaar gehört dann eine Ebene von Σ_3 zu, einem Ebenenpaar von ω_0 und ω_0' und dem einzigen Punkt von R_4, den sie im allgemeinen mit einander gemein haben, entspricht ein Strahl von Σ, während jedes Raumpaar von ω_0 und ω_0' und also jede schneidende Ebene von C^4 durch einen Punkt repräsentirt wird. Den Punkten von C^4 entsprechen hierbei die Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung.

Einer Geraden von Σ_3 entspricht, wenn sie punktweise aufgefasst wird, ein Kegel aus schneidenden Ebenen von C^4, dessen Spitze der Geraden entspricht. Den Geraden irgend einer Ebene von Σ_3 entsprechen die Punkte einer Fläche φ_2^3 dritter Ordnung, zweiter Dimension; sie ist der Schnitt der beiden Kegel, die irgend zwei Geraden der Ebene von Σ_3 zugehören. Hierbei ist aber von der beiden Kegeln gemeinsamen Ebene abzusehen, die

dem Schnittpunkte dieser Geraden zugehört. Die beiden Hyperboloide, in denen irgend ein Raum von R_4 den beiden Kegeln begegnet, haben ausser einer in der bezeichneten Ebene liegenden Geraden noch eine Raumcurve dritter Ordnung mit einander gemein, die ganz in φ_2^3 liegt. Eben daher folgt, dass die Fläche von der dritten Ordnung ist. Daraus, dass vier Punkte von φ_2^3 eine solche Raumcurve bestimmen, irgend zwei von ihnen aber drei Punkte gemein haben, folgert der Herr Verfasser, dass sie in der Ebene von Σ_3 durch Büschel II. Ordnung, die einen Strahl mit einander gemein haben, dargestellt werden. Diesem Ausnahme-Strahl r_1 entspricht nicht ein Punkt, sondern es gehören ihm alle Punkte einer Geraden von φ_2^3 zu. Strahlenbüschel der Ebene in Σ_3 repräsentiren Gerade bezw. Kegelschnitte von φ_2^3, jenachdem sie ihre Centren auf r_1 haben oder nicht. Aus allem diesem wird geschlossen, dass φ_2^3, die ja C^4 enthält, eine der oben betrachteten Flächen F_2^3 ist.

Den Punkten einer beliebigen Geraden von R^4 entsprechen in Σ_3 die Geraden einer Regelschar eines Hyperboloides. Da drei derartige Hyperboloide acht Punkte mit einander gemein haben, so kreuzen acht schneidende Ebenen der C^4 irgend drei gegebene Gerade. Jedes dieser Hyperboloide hat ferner sechs Punkte mit der Curve dritter Ordnung gemein, deren Schmiegungsebenen den Punkten von C^4 entsprechen. Sonach gehen von Punkten irgend einer Geraden sechs Schmiegungsebenen von C^4 aus. Aehnlich wird gezeigt, dass unter den von einem Punkte ausgehenden schneidenden Ebenen sechs sich befinden, die zugleich C^4 berühren. E. K.

G. Bordiga. Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dello spazio a sei dimensioni. Ven. Ist. Atti (6) IV. 1461-1501.

Im Raume von sechs Dimensionen wird das Erzeugnis dreier collinearen Bündel aus Räumen vierter Dimension mit den Centren $S_3^{(1)}$, $S_3^{(2)}$, $S_3^{(3)}$ dritter Dimension ins Auge gefasst. In einer früheren Abhandlung hat der Verfasser (Comptes rendus

CII, siehe Referat S. 612), eine Abbildung der Fläche auf eine Ebene Ω_2 gegeben. In derselben fanden sich drei Hauptpunkte P_1, P_2, P_3, denen drei windschiefe Gerade der Fläche entsprachen; drei andere, welche mit jenen ein Sechseck bilden, entsprechen den Geraden P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2. Die Curve sechster Ordnung und vom Geschlecht 1, die irgend ein Raum fünfter Dimension ausschneidet, wird durch eine P_1, P_2, P_3 umschriebene Curve dritter Ordnung repräsentirt. Die Fläche enthält zwei zweifach unendliche Systeme von Raumcurven dritter Ordnung. Die einen werden durch Gerade, die anderen durch P_1, P_2, P_3 umschriebene Kegelschnitte repräsentirt. Zwei solche Curven haben daher zwei Punkte gemeinsam oder nur einen, je nachdem sie zu verschiedenen Systemen gehören, oder nicht. Durch zwei Punkte der Fläche geht genau eine Curve jedes Systems. Drei einfach unendliche Kegelschnittscharen auf F_2^6 werden durch die Strahlen der Bündel P_1, P_2, P_3 repräsentirt. Zwei Kegelschnitte treffen sich in einem Punkte, falls sie zu verschiedenen Systemen gehören. Die Kegelschnitte, welche P_2, P_3; P_3, P_1; P_1, P_2 enthalten, repräsentiren dreifach unendliche Systeme von Normalcurven vierter Ordnung, die also durch Räume vierter Dimension erstreckt sind. Die Beziehung der besonderen Gebilde zum Sechseck der Fläche ist diese: Jede Raumcurve dritter Ordnung trifft drei nicht auf einander folgende Seiten desselben, jeder Kegelschnitt ein Paar und jede Normalcurve vierter Ordnung zwei Paare gegenüberliegender Seiten desselben. Zwei Curven dritter Ordnung, die P_1, P_2, P_3 enthalten, haben die Repräsentanten der Punkte mit einander gemeinsam, welche von F_2^6 in einem Raum vierter Dimension liegen. Daher ist eben die Zahl dieser Punkte im allgemeinen gleich 6, und ein solcher Raum kann ausser einer Raumcurve dritter Ordnung nur noch einen Punkt, neben einem Kegelschnitt bezw. einer Geraden nur noch zwei bezw. drei Punkte mit F_2^6 gemein haben. Aus dem ersteren Resultat kann geschlossen werden, dass Gerade, die mehr als zwei Punkte von F_2^6 enthalten, nicht existiren.

Da die Fläche F_2^6 von einer Ebene O_2 aus auf einen Raum zu projiciren ist, so handelt es sich zunächst um die Sehnen-

derselben, welche O_2 treffen. Da jede Sehne der Fläche auch als eine Sehne einer Raumcurve dritter Ordnung gedeutet werden kann, so senden alle die Punkte von O_2 Sehnen aus, die von den räumlichen Trägern der Curven getroffen werden. Der Ort dieser Punkte ist von der dritten Ordnung. Von O_2 aus werden die Sehnen in Punkte einer Curve neunter Ordnung irgend eines Raumes von S_6 projicirt. Ein Raum fünfter Dimension, welcher von O_2 ausgeht, trifft die Projection von F_2^6 in einer ebenen Curve 6ter Ordnung vom Geschlecht 1, die daher neun Doppelpunkte besitzt; diese Punkte aber hat die Ebene der Curve mit der Projection der Sehnenschar gemeinsam. Die Curve neunter Ordnung ist vom Geschlecht 1, da sie auf die ebene Curve dritter Ordnung von O_2 eindeutig bezogen ist. Es giebt daher vier O_2 enthaltende gewöhnliche Räume, die zwei verschiedene von O_2 ausgehende Sehnen enthalten. Diese Räume projiciren nämlich die Doppelpunkte einer (1, 1) Correspondenz auf der Curve 9ter Ordnung. Je zwei derartige Sehnen treffen sich aber auf F_2^6; jeder derartige Raum enthält also nur drei Punkte derselben, und wir erhalten vier dreifache Punkte auf der Curve neunter Ordnung. Die Zahl der dreifach berührenden Räume fünfter Dimension, welche von O_2 ausgehen, giebt Herr Bordiga auf 30 an (No. 7). Unter denselben finden sich sechs, von denen jede in zwei Geraden und in einer Normalcurve vierter Ordnung schneidet, von 18 anderen schneidet jede einzelne in einer Geraden, in einem Kegelschnitt und in einer Raumcurve dritter Ordnung. Endlich werden einzelne der Fläche in je drei Kegelschnitten begegnen; die Ueberlegung des Herrn Verfassers hierfür scheint dem Referenten aber anfechtbar zu [illegible]
Lässt man Räume fünfter Dimension beständig O_2 und der[illegible]
nach die Träger der Kegelschnitte eines bestimmten S[illegible]
enthalten, so schneiden sie eine bestimmte Schar von Normal[illegible]
vierter Ordnung aus. In der Repräsentationsebene Ω_2 erhäl[illegible]
nach Herrn Bordiga's Ansicht zwei projectivische Büsche[illegible]
Strahlen, die durch P_i, und von Kegelschnitten, die durch P_k u[illegible]
hindurch gehen. Von diesen lösen sich dann zwei in Gerade[illegible]
die P_k und P_l enthalten. Entsprechend [illegible] vei Räu[illegible]

fünfter Dimension, die je drei Kegelschnitte ausschneiden. Die Wiederholung der Ueberlegung mit Bevorzugung erst von P_k, hernach von P_l soll auf zwei weitere Tripel von Kegelschnitten führen. Dagegen lässt sich aber geltend machen, dass man von den P_k und P_l enthaltenden Kegelschnitten der betrachteten Reihe offenbar vier willkürlich festsetzen, jedem von ihnen einen Strahl des Büschels P_i willkürlich zuordnen und diese besonderen Curven dritter Ordnung als Abbilder von vier Curven sechster Ordnung ansehen kann, deren Träger eine Ebene mit einander gemein haben. Der Fehlschluss wiederholt sich übrigens in No. 18, wo es sich um die Klasse des Kegels aus den beschriebenen Räumen fünfter Dimension handelt.

Aus dem Entwickelten geht hervor, dass die Projection φ^6 von F_2^6 auf einen gewöhnlichen Raum eine Nodalcurve neunter Ordnung mit vier dreifachen Punkten besitzt, sechs Gerade von φ^6 hat die Curve zu dreifach schneidenden Sehnen. Die dreipunktig berührenden und von O_2 ausgehenden fünffachen Mannigfaltigkeiten ergeben dreipunktig berührende Tangentialebenen von φ^6. Es versteht sich, dass auf φ^6 je drei Systeme von Kegelschnitten und rationalen Curven dritter, bezw. vierter Ordnung liegen, die der Reihe nach von einfacher, zweifacher und dreifacher Mächtigkeit sind. Von den doppelt berührenden Ebenen von φ^6 enthalten die einen eine Gerade der Fläche, andere einen Kegelschnitt und eine ebene rationale Curve vierter Ordnung, andere endlich zwei ebene rationale Curven dritter Ordnung.

Im § 3 werden specielle Lagen von O_2 ins Auge gefasst. Liegt die Ebene mit dem Sechseck von F_2^6 in einem Raume fünfter Dimension, so erhält φ^6 ein ebenes Sechseck. Liegt O_2 mit fünf Ecken des ersteren in einem Raume vierter Dimension, so löst sich die Nodalcurve in eine vierfach und in drei zweifach zählende Gerade, die die erstere treffen, auf. Daneben liegen noch zwei einfache Gerade vor.

Der Projection von φ^6 kann man bis zu drei Doppelgerade verleihen, wenn man einzelne Punkte von O_2 in die Ebenen ebenso vieler Kegelschnitte von F_2^6 gelangen lässt. Je nachdem

die Kegelschnitte aus den verschiedenen Systemen von φ^6 entnommen werden, ändert sich ihre Beziehung zu einander und zu den Seiten des Sechseckes. Hat O_2 mit dem Träger einer Raumcurve von F_2^6 eine Gerade gemeinsam, so erhält φ^6 eine dreifache Gerade. Liegt O_2 ganz in dem Träger einer Normalcurve vierter Ordnung, so erhält φ^6 eine vierfache Gerade, u. s. f.

Hat (§ 4) O_2 einen Punkt mit F_2^6 gemeinsam, so erhält man eine Fläche φ^5 mit 10 Geraden, von denen sechs aus denen von F_2^6, drei aus den durch den betreffenden Punkt gehenden Kegelschnitten sich ergeben; endlich entsteht eine aus dem Raume vierter Dimension, der ausser O_2 die Tangenten von F_2^6 in dem bezeichneten Punkte enthält. Hat O_2 zwei oder drei Punkte mit F_2^6 gemeinsam, so entsteht eine Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt, bezw. eine solche dritter Ordnung.

Nachdem Herr Bordiga die besonderen Fälle kurz beleuchtet hat, wo die drei Hauptpunkte in Ω_2 sich entweder vereinigen oder auf eine Gerade gelangen, zeigt er, dass eine Abbildung von F_2^6 auf eine Ebene durch Projection von verschiedenen gewöhnlichen Räumen aus bewerkstelligt werden kann. In diesen Raum kann man eine Raumcurve dritter Ordnung von F_2^6, einen Kegelschnitt und einen Punkt, eine Gerade und zwei Punkte, oder endlich einen Punkt und die Tangenten in einem anderen hineinverlegen. Im ersten Fall erhält man genau die Beziehung von Ω_2 zur Fläche. Die verschiedenen auf F_2^6 eindeutig bezogenen Ebenen stehen paarweise in quadratischer, bez. kubischer Verwandtschaft. E. K.

G. Bordiga. Rappresentazione piana della superficie rigata normale. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 1083-1092.

Homologe Ebenen zweier collinearen Ebenenbündel mit den Geraden $S_1^{(1)}$, $S_1^{(2)}$ als Axen, die in einem R_n liegen, treffen sich in einer Fläche, die mit jedem Raume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension eine Normalcurve C^{n-1} gemein hat und daher von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Die Fläche, welche auch durch R_{n-1}-büschel erzeugt werden kann, besitzt eine einfach u[illegible] [illegible]raden-

schar. Die Abbildung auf die Ebene wird durch Projection von einem Raume $(n-3)^{ter}$ Dimension, der $n-2$ Punkte der Fläche enthält, bewerkstelligt. Hierbei müssen die Normalcurven der Fläche entweder in Gerade oder in rationale ebene Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung übergehen, die $n-2$ Hauptpunkte $A^{(1)},\dots,A^{(n-2)}$ von Ω_2 mit einander gemein haben. Alle diese Curven haben noch einen $(n-2)$-fachen Punkt O mit einander gemein. Die O enthaltenden Geraden stellen Gerade der Flächen dar, diejenigen, die einen der Punkte $A^{(i)}$ enthalten, rationale Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung. Kegelschnitte, die O enthalten, stellen eine Schar von Normalcurven C^n dar, die auf der Fläche liegen. Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, die O $(n-4)$-fach, zwei der Punkte A^i einfach, die übrigen zweifach enthalten, stellen eine zweite Schar derartiger Curven dar, etc.

Modificationen treten ein, wenn einzelne Gerade der Fläche in den Raum gelangen, von dem aus projicirt wird. Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn, für $n = 2m$, m Gerade in demselben liegen. E. K.

G. Bordiga. La surface du sixième ordre avec six droites. C. R. CII. 743-746.

Es bezeichne, wie immer beim Referenten, das Symbol $[p]$ einen p-dimensionalen linearen Raum. In der vorliegenden Abhandlung legt der Verfasser seinen Betrachtungen einen [6] zu Grunde, nimmt in demselben drei [3] als Träger von ∞^3 [4] an, und lässt die vierdimensionalen Elemente dieser drei Grundgebilde sich collinear entsprechen. Die Schnittpunkte entsprechender Elemente erzeugen dann eine zweistufige Mannigfaltigkeit, welche von einem [4] in 6 Punkten geschnitten wird, also Fläche sechsten Grades genannt werden kann. Diese Fläche wird näher untersucht und dann auf einen in dem [6] liegenden [3] projicirt. Dadurch erkennt der Verfasser die Eigenschaften einer unserm Raume angehörigen Fläche 6ten Grades, auf welcher sechs ein windschiefes Sechsseit bildende Gerade liegen. Scht.

G. BORDIGA. Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à n dimensions. C. R. CII. 1442-1446.

Die vom Verfasser in einer vorhergehenden Note (s. das vorhergehende Referat) über eine in einem [6] gelegene Fläche 6ten Grades angestellten Untersuchungen lassen sich ohne weiteres auf eine in einem [$2m$] gelegene Fläche vom Grade $\frac{1}{2}m(m+1)$ ausdehnen. Hier werden in ähnlicher Weise die Eigenschaften dreier neuen Flächen hinsichtlich der auf ihnen liegenden Geraden und Kegelschnitte erkannt, nämlich erstens einer in einem [$2m+1$] gelegenen Fläche vom Grade $\frac{1}{2}m(m+3)$, zweitens einer gleichfalls in einem [$2m+1$] gelegenen Fläche vom Grade $\frac{1}{2}m(m+5)$, drittens einer in einem [$2m$] gelegenen Fläche vom Grade $\frac{1}{2}m(m+3)-1$. Die Projectionen dieser Flächen aus einem Punkte in einen [3] ergeben Flächen, die in unserm Raume liegen, z. B. die schon von Cremona (Math. Ann. IV. S. 213) erkannte Fläche 7ten Grades, auf der 9 Gerade, 36 Kegelschnitte und eine kubische Raumcurve liegen, oder die Fläche vierten Grades, welche 16 Gerade enthält u. s. w. Scht.

J. S. et M. N. VANĚČEK. Sur la génération des surfaces des courbes gauches par les faisceaux de surfaces. Brioschi Ann. (2) XIV. 73-114.

Die Verfasser ordnen in zwei Flächen-Systemen beliebig hoher Dimension die Flächen einander zu und bestimmen den Grad der Fläche, die von den Schnittcurven entsprechender Flächen erzeugt wird. Wenn es in einem α-stufigen Sy[illegible] m Flächen giebt, die durch α gegebene Punkte gehen, so [illegible] die Verfasser m den Index des Systems. Die Bestimm[illegible] ist im wesentlichen das Chasles'sche Corresponden[illegible] von den Verfassern aber nicht erwähnt wird.

G. AFFOLTER. Ueber Gruppen gerader Lin[illegible] Flächen höherer Ordnung. [illegible] Ann. XXVII. 27[illegible]

Der Verfasser bahnt hier [illegible]hungsrichtu-

Flächen an, die bisher in methodischer Weise noch nicht eingeschlagen ist. Es handelt sich darum, Flächen von höherer als der dritten Ordnung methodisch aufzufinden, die eine endliche Anzahl von Geraden enthalten, und die Gruppirung dieser Geraden zu erkennen. Zwar kennt man die Schur'sche Fläche vierter Ordnung mit 52 Geraden und noch einige Flächen mit einer endlichen Gruppe von darauf liegenden Geraden. Nicht aber hat man bisher solche Flächen bei beliebiger Ordnung aufgesucht und das Enthalten einer Geradengruppe als alleinigen Ausgangspunkt gewählt. Die Methode der hier vorliegenden Untersuchung ist insofern naturgemäss, als sie von den Ebenen ausgeht, welche durch eine Gerade einer solchen Fläche gehen, und auf welchen die Restcurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung so oder so zerfällt. Eine Gruppe von Geraden, die auf einer F_n liegen, heisst von der u^{ten} Klasse, wenn durch jede Gerade u Ebenen gehen, auf denen die Restcurve in ganz gleicher Weise degenerirt. So bilden z. B. die 27 Geraden einer F_3 eine Gruppe fünfter Klasse. Ausser dem Begriff der Klasse ist namentlich noch die Unterscheidung von Gruppen erster und zweiter Art wichtig. Bezeichnet man die nicht auf der Fläche liegende Schnittgerade zweier Ebenen, von denen jede durch eine Gerade der Fläche geht, mit dem Namen Kante, so kann man eine Gruppe erster Art in der Weise definiren, dass eine solche Gruppe keine Kante enthalten soll, durch die mehr als zwei eine Gerade der Fläche enthaltende Ebenen gehen. Gehen aber durch eine oder mehrere Kanten mehr als zwei solche Ebenen, so heisst die Gruppe zweiter Art. In der vorliegenden Arbeit sucht der Verfasser vorläufig nur solche Flächen, deren Geradengruppe erster Art ist, und bei denen die Degeneration der Restcurven eine vollständige ist. Scht.

G. Fouret. Sur la recherche de deux courbes planes ou surfaces, dont les points se correspondent chacun à chacun, à la fois par homologie et par polaires réciproques. S. M. F. Bull. XIV. 18-20.

In Bezug auf einen Kegelschnitt werden zwei polar-reciproke Curven von folgender Beschaffenheit gesucht. Wenn man zu jedem Punkt *M* der einen Curve die Polare in Bezug auf den Kegelschnitt aufsucht, und *M* mit dem Punkte verbindet, in dem die Polare die andere Curve berührt, so sollen immer Verbindungslinien entstehen, die durch einen festen Punkt gehen. Die so beschaffenen Curven waren schon von Hrn. d'Ocagne studirt. Herr Fouret gelangt hier zu demselben Resultate und behandelt dann noch das analoge Problem für zwei Flächen in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiten Grades. Scht.

A. Mannheim. Mémoire d'optique géométrique comprenant la théorie du point représentatif d'un élément de surface réglée et son emploi tant pour la démonstration nouvelle de théorèmes relatifs à la courbure des surfaces que pour la détermination plane des éléments des surfaces caustiques. Jordan J. (4) II. 5-48.

Diese Abhandlung enthält zum ersten Mal, und zwar im allgemeinsten Falle, die vollständige Lösung des Problems, die Elemente der Brennflächen auf geometrisch-constructivem Wege zu bestimmen. Der Verfasser zeigt in einer historischen Einleitung, dass zwar das Problem, die Einhüllende ebener gespiegelter oder gebrochener Strahlen zu bestimmen, schon lange sowohl analytisch als geometrisch abgeschlossen sei, dass aber alle Untersuchungen, welche von Malus, Dupin, Hamilton, Kummer, Ch. Sturm u. a. über die Strahlensysteme des Raumes angestellt wurden, sich nur der analytischen Methode bedienten. Erst Herr Mannheim selbst hat 1872 in einem fundamentalen und umfangreichen Mémoire sur les pinceaux de droites (Liouville J. XVII) eine geometrische Theorie entwickelt. Der Inhalt dieser Abhandlung ist ausführlich angegeben F. d. M. IV. 1872. 287. Daselbst findet man auch die Entwickelung der hauptsächlichsten Begriffe, welche zum Verständnis der gegenwärtigen Untersuchungen nötig sind.

Wenn man in dem „Centralpunkt“ der Erzeugenden einer Regelfläche ein Lot von der Länge des „Verteilungsparameters der Tangentialebenen“ errichtet, so erhält man den „charakteristischen Punkt (point représentatif) der Elementarfläche“ längs der Erzeugenden. Er ist so gelegen, dass die Geraden, welche von ihm nach den verschiedenen Punkten der Erzeugenden gezogen werden können, die Winkel wiedergeben, und zwar mit Einschluss des Drehungssinnes, welche die Tangentialebenen in diesen verschiedenen Punkten mit einander bilden. Diesen Punkt stellt der Verfasser in den Vordergrund seiner diesmaligen Untersuchung. Er giebt in einfacherer Weise als die früheren „Hülfsgeraden“ das Mittel, die räumlichen Verhältnisse einer Elementarfläche durch eine ebene Figur wiederzugeben.

Um den Leser mit der Anwendung dieses Punktes vertraut zu machen, behandelt Herr Mannheim zunächst einige bekannte Aufgaben und Sätze aus der Theorie der Flächenkrümmung. Er construirt den Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnitts einer Fläche, falls die betreffende Normale und die beiden Hauptkrümmungsradien gegeben sind; als einfacher Zusatz ergiebt sich aus dieser Construction die bekannte Euler'sche Relation (einzelne Formeln der pag. 14 sind falsch). Es wird dann die Dupin'sche Indicatrix behandelt und schliesslich der Krümmungsradius des vom Unendlichen sichtbaren Umrisses einer Fläche aus den Krümmungselementen selbst construirt.

Nunmehr zu der Betrachtung eines Strahlenbündels übergehend, zeigt der Verfasser, dass, entsprechend den unendlich vielen Elementarflächen, dieser Bündel der Form und Lage nach durch die unendlich vielen charakteristischen Punkte dargestellt werden kann. Diese liegen alle auf einem Kreise; dieser Kreis und ein fester Punkt auf ihm, der zur Fixirung der Kreisebene im Raume dient, genügt zur „ebenen“ Darstellung des Bündels. Damit kann das optische Hauptproblem der Abhandlung gelöst werden:

„Gegeben seien die Elemente irgend eines Bündels einfallender Lichtstrahlen und die Krümmungselemente der Trennungsfläche der beiden von den Strahlen durchlaufenen Medien; es

sollen die Elemente des von den Strahlen nach der Brechung gebildeten Bündels construirt werden."

Die Lösung verständlich zu skizziren erscheint bei beschränktem Raume und ohne Figur unmöglich; wir begnügen uns anzugeben, dass zwei vollständig verschiedene Wege der Construction eingeschlagen werden, und dass die zweite Lösung als einfaches Corollar den Malus-Dupin'schen Satz ergiebt, wonach ein Strahlenbündel, welches vor der Brechung aus den Normalen einer Fläche gebildet war, diese Eigenschaft auch nach der Brechung besitzt. Dieser besondere Fall wird einer näheren Betrachtung unterzogen und die gegebene Construction desselben in analytische Formeln übersetzt, wie denn überhaupt die Abhandlung neben ihrem constructiven Hauptinhalt eine Fülle metrischer Relationen enthält. R. M.

J. Tesař. Die konische Loxodrome als Osculatrix. Prag. Ber. 347-360.

Die konische Loxodrome, von der die Arbeit handelt, liegt auf einem Rotationskegel. Die Krümmungselemente dieser Curve werden anschaulich entwickelt, und demnächst wird die Frage behandelt, auf welche Art für einen beliebigen Punkt einer Raumcurve sich eine solche Loxodrome construiren lässt, welche mit derselben in jenem Punkte eine Berührung dritter Ordnung hat. Eine solche Loxodrome ist durch die Bedingung der vierpunktigen Berührung vollkommen bestimmt, sie wird Schmiegungs-Loxodrome genannt, und ihre constructiven Elemente werden entwickelt. Durch Verzeichnung einer solchen Schmiegungs-Loxodrome ist demnach der Zeichner im Stande, die Krümmungsverhältnisse von beliebigen Raumcurven zweckmässig zur Darstellung zu bringen. Schn.

C. Segre. Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. Torino Atti. XXI. 868-891.

Diese Abhandlung gehört der schönen Sammlung von Ar-

beiten an, durch welche Hr. Segre die Geometrie der Räume von n Dimensionen im allgemeinen und das Capitel über die geradlinigen Flächen im besonderen so kräftig gefördert hat.

Der erste Abschnitt enthält Allgemeines über die geradlinigen Flächen und besonders über die elliptischen. Die allgemeinen Sätze über die geradlinigen Flächen sind vollständiger und genauer durch den Verfasser in einer späteren Arbeit (Klein Ann. XXX) ausgesprochen worden, die erst im nächsten Jahrgange der F. d. M. zur Anzeige kommen wird; andere sind mehr analytisch in dem Aufsatze desselben Verfassers bewiesen worden: „Sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes". (Vgl. das Referat in diesem Bande IX. 5A.) Wir können daher unsern Bericht mit der No. 7 der zu besprechenden Arbeit beginnen; jedoch wollen wir folgenden Satz wegen seiner Wichtigkeit hervorheben: „Wenn eine geradlinige Fläche von der Ordnung n und vom Geschlechte p einem linearen Raume von $n-p+1$ Dimensionen angehört, so ist sie ein Kegel". Und damit der Leser alles, was wir aussagen werden, verstehen kann, wollen wir zuerst die beiden folgenden Definitionen hersetzen: 1) n Punkte einer elliptischen Curve von der Ordnung n heissen „associirt", wenn $n-1$ von ihnen den letzten auf eindeutige Art bestimmen. 2) Eine eindeutige Beziehung zwischen zwei elliptischen Curven heisst „speciell", wenn sie eine und darum jede Gruppe von associirten Punkten einer der Curven in eine analoge Gruppe der anderen verwandelt.

Elliptische Curven von der Ordnung n, welche einem S_r (und keinem weniger ausgedehnten Raume) angehören, giebt es $\infty^{n(r+1)}$; jede von ihnen ist durch eine gewisse Zahl (absolute Invariante) charakterisirt, sodass es unmöglich ist, zwischen zweien dieser Curven eine eindeutige Beziehung herzustellen, wenn sie nicht dieselbe absolute Invariante haben.

Von den geradlinigen Flächen n^{ter} Ordnung giebt es mehrere Arten.

Eine erste Art besteht aus Regelflächen, welche eine doppelte Leitgerade besitzen. Ihre Minimalcurven (von höherer als der ersten Ordnung) bilden eine Schar ∞^{n-4} elliptischer Curven von

der Ordnung $n-2$, von denen zwei willkürliche sich in $n-4$ Punkten schneiden, durch welche ein Büschel geht. Eine solche Oberfläche kann immer durch eine elliptische Curve und eine Doppelgerade in eindeutiger Correspondenz erzeugt werden.

Ausser den Regelflächen dieser Art haben die anderen geradlinigen elliptischen Oberflächen Minimalcurven, deren Ordnung $m > 2$ und $< G\frac{1}{2}(n+1)$ ist (wobei G das grösste in $\frac{1}{2}(n+1)$ enthaltene Ganze bedeutet); und sondern sich in drei Kategorien, jenachdem $m \gtreqless G\frac{1}{2}(n-1)$, $m = \frac{1}{2}n$, $m = \frac{1}{2}(n+1)$; die drei Klassen sind durch besondere Eigentümlichkeiten ausgezeichnet, von denen wir die hauptsächlichsten hervorheben wollen.

1. Jede geradlinige Fläche der Ordnung n, welche eine Minimalcurve einer Ordnung $m \gtreqless G\frac{1}{2}(n-1)$ besitzt, kann mit Hülfe zweier elliptischen Curven m^{ter} und $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung in eindeutiger Correspondenz erzeugt werden. Sie besitzt ∞^{n-2m} Curven $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche eine lineare Schar bilden, so dass durch $n-2$ Punkte der Oberfläche eine dieser Curven, durch die $n-2m$ Schnittpunkte zweier von ihnen ein Büschel derselben geht. Der äusserste Fall $m = \frac{1}{2}(n-1)$, welcher eintritt, wenn n ungerade ist, ist sehr merkwürdig; denn dann liegen auf der Regelfläche ∞^1 Curven von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+1)$, welche alle durch einen festen Punkt gehen und von denen je eine durch jeden anderen Punkt der Oberfläche geht.

2. Eine elliptische Regelfläche einer geraden Ordnung n mit einer Minimalcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}n$ kann (erster Fall) entweder nur zwei solche Curven besitzen (welche man sogar als unendlich nahe annehmen kann), oder (zweiter Fall) ∞^1, von denen je eine durch jeden Punkt der Fläche geht. In jedem Falle kann die Fläche durch zwei elliptische Curven von der Ordnung $\frac{1}{2}n$ in eindeutiger Correspondenz erzeugt werden; nur muss im ersten Falle diese Correspondenz allgemein, im zweiten speciell sein.

3. Eine geradlinige elliptische Fläche einer ungeraden Ordnung n mit einer Minimalcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+1)$ besitzt ∞^1 von diesen Curven, so dass durch jeden Punkt ein Paar derselben geht. Die geradlinige Fläche kann im allgemeinen durch zwei elliptische Curven von der Ordnung $\frac{1}{2}(n+1)$ erzeugt

werden, zwischen denen eine eindeutige nicht specielle Correspondenz mit einem Doppelpunkte stattfindet.

Bei der Erforschung der geradlinigen Flächen hat es grosses Interesse, die Anzahl der unabhängigen Erzeugenden auf ihnen zu bestimmen. Für die elliptischen geradlinigen Flächen wird diese Frage durch den folgenden Satz beantwortet. Ist $k < m$, so sind k Erzeugende der Oberfläche unabhängig, d. h. sie gehören einem S_{2k-1} an. Dasselbe tritt im allgemeinen ein, wenn $k = m \overline{\gtrless} \frac{1}{2}n$; eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn diese Erzeugenden die Minimalcurve in associirten Punkten schneiden, dann gehören sie nämlich einem S_{2m-2} oder einem S_{2m-3} an. Ist endlich $k > m$, so liegen die Erzeugenden in jedem Raume, welcher die ganze Minimalcurve in sich begreift.

Eine elliptische geradlinige Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Minimalcurve m^{ter} Ordnung besitzt ausser den bereits betrachteten Curven eine quadratische Schar von $\infty^{2\mu-n}$ elliptischen Curven μ^{ter} Ordnung, wenn $n-m < \mu < n$; man hat jedoch den Fall derjenigen Oberflächen auszuschliessen, welche unendlich viele Minimalcurven $(\frac{1}{2}n)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzen, und den Wert $\mu = \frac{1}{2}n+1$. Auf der Fläche macht man ferner ∞^{n-1} elliptische Curven n^{ter} Ordnung ausfindig, welche sämtlich jede Erzeugende in einem Punkte schneiden und welche eine lineare Schar bilden; jedes Element der letzteren ist durch $n-1$ Punkte bestimmt, und durch den Schnitt zweier ihrer Elemente geht ein Büschel hindurch. Die Oberflächen gerader Ordnung enthalten gewöhnlich keine andere elliptische Curve n^{ter} Ordnung; nur wenn eine solche geradlinige Fläche zwei nicht unendlich nahe Minimalcurven $(\frac{1}{2}n)^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt, kann sie derartige Besonderheiten erwerben, dass sie eine elliptische Curve n^{ter} Ordnung enthält, welche jede Erzeugende in zwei Punkten schneidet; dann enthält sie unendlich viele (∞^1), so dass durch jeden Punkt der Fläche eine derselben geht, und dass diese Curven auf den Erzeugenden projectivische quadratische Involutionen bestimmen. Ist dagegen n ungerade, so enthalten die elliptischen geradlinigen Flächen ausser den schon betrachteten ∞^{n-1} elliptischen Curven, nur wenn sie ∞^1 Minimalcurven besitzen, noch andere elliptische

Curven; sie haben dann drei von der n^{ten} Ordnung, welche jede Erzeugende in zwei Punkten, jede Minimalcurve in einem schneiden.

Mit k werde eine ganze, positive, gewissen Bedingungen unterworfene Zahl bezeichnet. Wir greifen auf einer geradlinigen elliptischen Fläche F n^{ter} Ordnung k Erzeugende heraus; durch diese und durch drei andere Erzeugende legen wir einen Raum S_{n-2}. Derselbe schneidet F in einer Curve $(n-k-3)^{ter}$ Ordnung, welche samt den k Erzeugenden auf einem linearen Raume von $n-4$ Dimensionen liegt. In diesem Raume scheiden wir einen linearen Raum von $n-5$ Dimensionen aus. Projiciren wir aus diesem Raume F auf unseren Raum, so gelangen wir zu einer eindeutigen Abbildung von F auf einem Kegel dritter Ordnung, in welchem die ebenen Schnitte des Kegels die Bilder der Curven $(n-k)^{ter}$ Ordnung von F sind. Die Erforschung dieser Abbildung schliesst die inhaltvolle Abhandlung des Herrn Segre.

La. (Lp.)

F. Chizzoni. Sopra una certa famiglia di superficie che s'incontrano in una trasformazione involutoria di terzo grado nello spazio. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 470-476.

Eine Oberfläche zweiter Ordnung Γ und zwei feste Punkte M, N auf ihr bestimmen eine eindeutige involutorische Verwandtschaft $[I]$ des Raumes, wenn man als entsprechend zwei Punkte A, A' annimmt, welche in Bezug auf Γ conjugirt sind und auf einer die Gerade MN schneidenden geraden Linie liegen. Wenn A eine gerade Linie durchläuft, so beschreibt A' eine kubische Raumcurve, welche durch die Punkte M, N und durch die Schnittpunkte M_1, N_1 von Γ mit der zu MN in Bezug auf Γ reciproken Geraden geht. Bewegt sich A auf einer Ebene, so ist der geometrische Ort von A' eine Fläche dritter Ordnung (die reciproke Polare der Steiner'schen Römerfläche) mit M, N, M_1, N_1 als Knotenpunkten. Die ∞^3 Punktepaare A, A' können eindeutig auf den Geraden r des speciellen linearen Strahlencomplexes $C(r)$ abgebildet werden, dessen Axe MN ist. Wenn die

Gerade r einen Strahlenbüschel erzeugt, so beschreiben die Punktepaare A, A' einen Kegelschnitt k_r, welchen wir als dem Mittelpunkt dieses Büschels entsprechend ansehen wollen. Eine ganz gleichlaufende Abbildung kann auf dem speciellen linearen Strahlencomplexe $C(s)$ bewirkt werden, dessen Axe die Gerade $M_1 N_1$ ist; einem als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels aus dem Complexe $C(s)$ angesehenen Punkte entspricht dann ein Kegelschnitt k_s. Die beiden Complexe $C(r)$ und $C(s)$ stehen mithin in eindeutiger Verwandtschaft; zwei entsprechende Gerade sind in Bezug auf Γ reciproke Polaren. Diese Abbildungen sind besonders bei der Untersuchung derjenigen Oberflächen von Nutzen, welche in der Transformation $[\Gamma]$ sich selber entsprechen; jede Congruenz aus $C(r)$ oder die entsprechende aus $C(s)$ führt zu einer Oberfläche dieser Art.

Wählt man MNM_1N_1 als Bezugstetraeder eines Systems homogener Coordinaten und nimmt

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_1 x_2 - x_3 x_4 = 0$$

bezw. als die Gleichungen der Ebenen MM_1N, M_1NN_1, MM_1N_1, MNN_1 und der Oberfläche Γ an, so werden die Coordinaten r_{ik} der Geraden aus $C(r)$, welche dem Punkte A mit den Coordinaten x_i (und dem correspondirenden Punkte A') entspricht, durch die Gleichungen gegeben:

$$r_{12} : r_{23} : r_{31} : r_{14} : r_{24} = -(x_1 x_2 + x_3 x_4) : x_2 x_3 : x_3 x_1 : -x_1 x_4 : x_2 x_4;$$
$$r_{34} = 0.$$

Folglich entspricht der Congruenz n^{ten} Grades, dem Durchschnitte der Complexe:

$$\Theta(r_{12}, r_{23}, r_{31}, r_{14}, r_{24}, r_{34}) = 0, \quad r_{34} = 0,$$

eine Oberfläche $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung Θ mit der Gleichung:

$$\Theta[-(x_1 x_2 + x_3 x_4), \; x_2 x_3, \; x_3 x_1, \; -x_1 x_4, \; x_2 x_4, \; 0] = 0.$$

Ist beispielsweise der Complex $\Theta = 0$ vom ersten Grade, so ist die zugehörige Oberfläche von der zweiten Ordnung und kann als Ort der Kegelschnitte k_r angesehen werden, welche den Punkten der zu MN bezüglich des Complexes $\Theta = 0$ conjugirten Geraden entsprechen. Indem man diesen Complex auf alle möglichen Arten abändert, erhält man ∞^4 Oberflächen. Durch die Erforschung ihres Systems gewinnt der Verfasser eine neue

Construction der Curve vierter Ordnung zweiter Art, welche durch acht gegebene Punkte geht, und somit der Oberfläche zweiter Ordnung, welche durch neun Punkte geht.

La. (Lp.)

F. Chizzoni. Sopra una certa famiglia di superficie che comprende una nuova famiglia di ciclidi. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 476-482.

Da diese Note eine Fortsetzung der vorangehenden ist, so wollen wir dieselben Bezeichnungen wie im vorstehenden Berichte beibehalten.

Es sei S eine Curve von der Ordnung n und dem Geschlechte p. Die Oberfläche Θ, welche den die Curve S und die Gerade MN schneidenden Geraden entspricht, kann als der Ort der den Punkten der Curve S entsprechenden Kegelschnitte k_r angesehen werden. Sie ist von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung, hat M und N zu n-fachen konischen Knotenpunkten, M_1 und N_1 zu n-planaren Punkten. Eine Ebene durch die Gerade MN schneidet die Oberfläche Θ in einer Gruppe von n Kegelschnitten, und der Ort der Pole dieser Geraden bezüglich dieser Kegelschnitte ist gerade die Curve S. Die $2(n+p-1)$ durch die Gerade MN gehenden Berührungsebenen von S sind doppelt berührende Ebenen von Θ. Die letztere Oberfläche enthält $2n$ durch M und $2n$ durch N gehende Gerade. Sie ist von der Klasse $6n+4(p-1)$ und besitzt eine Doppelcurve von der Ordnung $2(n-1)^2-2p$, von der M_1 und N_1 $\frac{1}{2}n(n-1)$-fache Punkte sind, und die ausserdem $\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)-2(n-2)p$ dreifache Punkte aufweist. Die Berührungsebenen zur Oberfläche Θ in den Punkten eines ihrer Kegelschnitte umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung; der Ort der Mittelpunkte dieser Kegel ist eine Curve von der Ordnung $3n+2(p-1)$. U. s. w.

Zu bemerkenswerten besonderen Fällen gelangt man durch die Annahme, dass S eine ebene oder eine rationale Curve ist. Bei dieser letzten Voraussetzung kann die Oberfläche auf einer Ebene eindeutig abgebildet werden. Diese Abbildung macht

den Gegenstand des letzten Teiles der Abhandlung des Hrn. Chizzoni aus. La. (Lp.)

P. VISALLI. Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano. Note I e II. Rom. Acc. L. Rend. II_2. 80-87.

Sind zwei gegebene Punktfelder σ, σ' in eindeutiger Verwandtschaft n^{ter} Ordnung und ein gegebener Ebenenbündel Q in eindeutiger Verwandtschaft m^{ter} Ordnung mit σ, so giebt es ∞^2 Punkte, durch deren jeden ein Element des Ebenenbündels und die Gerade geht, welche die ihm in σ und σ' entsprechenden Punkte verbindet. (Vgl. Jung, Rom. Acc. L. Rend. (4) I. 810, F. d. M. XVII. 1885. 606.) Ihr Ort ist eine Oberfläche ψ, von der Hr. Jung schon einige Eigenschaften angegeben hat (Rom. Acc. L. (4) II_1. 85, Ref. IX. 5A). Die erste Note des Hrn. Visalli ist der Erforschung der Oberfläche ψ gewidmet. Unter den Sätzen, welche er nach synthetischer Methode aufgestellt hat, wollen wir nur die folgenden anführen:

Die Oberfläche ψ ist von der Ordnung $(m+1)(n+1)+1$, und hat Q als einen $(n+2)$-fachen Punkt. Die Grundelemente der Verwandtschaften zwischen σ und σ' oder zwischen σ und Q geben sofort einfache und mehrfache Punkte und Linien der Oberfläche; ψ enthält ausserdem die $(m+1)(n+1)$ Geraden der durch die Ebenen σ, σ' erzeugten Cremona'schen Congruenz (Hirst, L. M. S. Proc. XIV; F. d. M. XV. 1883. 742), die sich auf den entsprechenden Ebenen des Ebenenbündels Q befinden. Die Oberfläche lässt sich eindeutig auf den Elementen eines Grundgebildes zweiter Stufe abbilden; betrachtet man z. B. ein zum Ebenenbündel Q reciprokes Punktfeld, so gelangt man leicht zu einer Abbildung, bei welcher den ebenen Schnitten der Oberfläche Curven von der Ordnung $m+n+1$ entsprechen. Die Doppelcurve der Oberfläche ist von der Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}(m+n+mn)(m+n+mn-1)-\tfrac{1}{2}m(m-3)+1,$$

ihr Bild dagegen von der Ordnung $(m+n)(m+n+mn-1)+mn+1$.

In der zweiten Note stellt Hr. Visalli eine ähnlich verlaufende Untersuchung über die Oberfläche ψ_1 an, den Ort des

Schnittpunktes entsprechender Elemente dreier Ebenenbündel S, S', Q, von denen der erste in Cremona'scher Verwandtschaft m^{ter} Ordnung mit dem zweiten, n^{ter} Ordnung mit dem dritten steht. Von diesen Flächen, mit denen sich Hr. Jung schon in den vorerwähnten Abhandlungen beschäftigt hat, findet Hr. Visalli folgende Eigenschaften:

Die Oberfläche ψ_1 ist von der Ordnung $(m+1)(n+1)-1$ und nimmt nicht allein die einfachen und vielfachen Geraden auf, zu denen die Betrachtung der Grundelemente der Verwandtschaft führt, sondern auch die $(m+1)(n+1)+2$ Geraden, von denen jede der Schnitt dreier entsprechenden Ebenen der gegebenen Ebenenbündel ist. Die Oberfläche ψ_1 lässt sich leicht eindeutig auf einer zum Elementenbündel S reciproken Ebene abbilden. Den ebenen Schnitten von ψ_1 entsprechen Curven von der Ordnung $m+n+1$ und der Doppelcurve der Fläche, welche von der Ordnung $\frac{1}{2}(mn-1)(mn+2m+2n-2)$ ist, eine Curve von der Ordnung $(m+n)(mn+m+n-3)+mn-1$.

La. (Lp.)

D. Abzählende Geometrie.

A. Legoux. Étude sur le principe de correspondance et la théorie des caractéristiques. Toulouse Mém. (8) VIII. 208-255.

Eine compilatorische Arbeit, in welcher das Chasles'sche Correspondenzprinzip und dessen Anwendung auf Kegelschnittsysteme auseinandergesetzt ist. Vorzugsweise die Arbeiten von Chasles, dann aber auch solche von Zeuthen, Cayley und Fouret sind benutzt. Ein neues Resultat oder einen neuen Gedanken suchte Referent vergeblich.

Scht.

K. Bobek. Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprinzip. Wien. Ber. XCIII. 899-911.

Ein einfacher analytischer Beweis der Cayley-Brill'schen Correspondenzformel (Cayley, Comptes rendus, LXII; Brill, Math. Ann., VI; Hurwitz, Leipz. Ber. s. das folgende Referat).

Scht.

A. Hurwitz. Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprinzip. Leipz. Ber. 10-38.

Bei seinen Untersuchungen über die Klassenanzahl-Relationen höherer Stufen stiess der Verfasser auf eine eigentümliche Schwierigkeit. Es musste die Anzahl der Coincidenzen einer Klein'schen Modularcorrespondenz einmal auf arithmetischem Wege, zweitens aber direct ermittelt werden, sodass in das Resultat nur die charakteristischen Zahlen der Correspondenz eingingen. Bei einer (α, β)-deutigen Correspondenz auf einer algebraischen Curve vom Geschlecht p war für die fragliche Anzahl C bisher nur die Cayley-Brill'sche Formel (das „verallgemeinerte Correspondenzprinzip") bekannt:

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma,$$

unter γ eine gewisse positive ganze Zahl (die „Wertigkeit") verstanden. Es erwies sich aber in den vorliegenden Fällen die erwähnte Formel als unzureichend, und dies veranlasste den Verfasser, sich die ganz allgemeine Fragestellung über die Art aller auf algebraischen Curven überhaupt möglichen Correspondenzen, sowie über die zugehörigen Coincidenzanzahlen vorzulegen. Dies gelang ihm in der That in befriedigender Weise, indem er von den bisher gebrauchten algebraisch-geometrischen Untersuchungsmethoden abging und die Theorie der Abel'schen Integrale erster Gattung in Verbindung mit den bezüglichen ϑ-Functionen zur Hülfe heranzog. Daher bezeichnet die vorliegende Arbeit in diesem Sinne eine durchaus neue Wendung in der Theorie der Correspondenzen.

Es sollen gleich im voraus die Resultate des Verfassers angegeben werden. Zunächst stellte sich heraus, dass das obige „verallgemeinerte Correspondenzprinzip" umfassendere Geltung be-

sitzt, als man bisher annahm: es ist auch anwendbar auf die grosse Klasse von Correspondenzen (von denen specielle Fälle allerdings schon früher betrachtet waren), für welche die Wertigkeits-Zahl γ einen negativen (ganzzahligen) Wert hat.

Diese können auf einer gegebenen Curve freilich nicht mehr durch eine einzige algebraische Gleichung von der Form:

$$\psi(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3) = 0$$

(wo x und y entsprechende Punkte sind), wohl aber in der anderen:

$$\frac{\psi_1}{\psi_2} = 0,$$

wo der Nenner im Zähler nicht aufgeht, oder auch durch das simultane Bestehen zweier Gleichungen der ersten Art:

$$\psi = 0, \quad \psi^1 = 0$$

dargestellt werden.

Ausser diesen beiden Hauptklassen von Correspondenzen (positiver resp. negativer Wertigkeit) existirt dann aber noch die specielle Gattung der „singulären" Correspondenzen auf „singulären" Curven, nämlich solcher, die gewisse vorgeschriebene Bedingungen erfüllen müssen. Diese dritte Art von Correspondenzen kann zwar auch immer (auf mannigfaltige Art) durch das Zusammenbestehen zweier Gleichungen der letzterwähnten Form repräsentirt werden, dagegen bedarf für sie die Correspondenzformel einer eingreifenden Erweiterung, indem an Stelle der einen Zahl γ eine grössere, aber immer fest bestimmte Anzahl μ von „Charakteren" $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ in der Weise eintritt, dass die Coincidenzzahl den Wert

$$C = \alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_\mu\lambda_\mu$$

annimmt, wo die ganzen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ von der jeweils betrachteten Correspondenz unabhängig sind.

Solcher Natur sind gerade die Klein'schen Modularcorrespondenzen: die entsprechenden singulären Curven werden durch die Galois'sche Resolvente der Modulargleichungen dargestellt.

Ueber die neue Methode des Verfassers sei Folgendes bemerkt. Denkt man sich zwischen zwei Stellen x und y einer algebraischen Curve (oder Riemann'schen Fläche) eine analyti-

sche Abhängigkeit derart, dass jeder Stelle x immer α Stellen y correspondiren, so ergiebt sich zuvörderst aus functionentheoretischen Prinzipien, dass auch umgekehrt zu jeder Stelle y eine bestimmte, endliche Anzahl β von Stellen x gehört.

Bildet man, unter u_k eines der p unabhängigen, endlichen Integrale der Fläche verstanden, die über sämtliche α Stellen y erstreckte Summe $\Sigma u_k(y) = U_k(x)$, so ist diese Grösse $U_k(x)$ wiederum ein endliches Integral der Fläche, setzt sich also aus den p Integralen u_k (die auf die Riemann'sche Normalform gebracht seien) linear zusammen:

$$U_k(x) = \Sigma \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k.$$

Das Bestehen dieser p Integralgleichungen erweist sich als äquivalent mit p^2 ganzzahligen Relationen zwischen den bekannten $\frac{p(p+1)}{2}$ Periodicitätsmoduln a_{ik}, Relationen, welche die vorgelegte Correspondenz vollständig charakterisiren.

Je nachdem nun dieselben hinsichtlich der a_{ik} identisch erfüllt sind oder nicht, hat man zwei Hauptfälle zu unterscheiden, welche den „Wertigkeitscorrespondenzen" einerseits, den „singulären Correspondenzen" andererseits entsprechen. Für die ersteren ergiebt sich die Correspondenzformel, indem man aus ϑ-Functionen, deren Argumente sich aus den x und y geeignet zusammensetzen, eine algebraische Function construirt, welche nur an den Coincidenzstellen ($x = y$) verschwindet, dagegen an den α Stellen y, die einem beliebigen x entsprechen, sowie an den β Stellen x, die einem beliebigen y correspondiren, einfach unendlich wird, endlich γ-fach an gewissen weiteren $2p$ Stellen. Hierbei bedeutet γ eine ganze Zahl, die (im Verein mit α, β, p) die Correspondenz völlig charakterisirt, indem die Integralsumme $U_k(x)$ hier sich durch $u_k(x)$ allein ausdrücken lässt:

$$U_k(x) = -\gamma u_k(x) + \pi_k.$$

Da aber bekanntlich eine algebraische Function an gleichviel Stellen Null und unendlich wird, so hat man unmittelbar:

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma.$$

Ganz ähnlich leitet man auf diesem Wege auch die Zahl der, zwei Correspondenzen (α, β, p; γ), (α', β' p; γ') gemeinsamen

Stellenpaare ab, nämlich $\alpha\beta' + \alpha'\beta - 2p\gamma\gamma'$, eine Zahl, die von Hrn. Brill für positive γ bereits bewiesen war.

Dieselbe Betrachtung bleibt endlich im Grunde auch für die singulären Correspondenzen bestehen, nur dass man mehrerer solcher algebraischen Functionen, wie der oben erwähnten, bedarf, die man, auf passende Potenzen erhoben, miteinander zu multipliciren hat, um die Correspondenz vollständig und rein darzustellen. My.

E. Study. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte, insbesondere deren Charakteristikenproblem. Klein Ann. XXVII. 58-101.

Chasles hatte bekanntlich (Comptes rendus, 1864) die Vermutung aufgestellt, dass die Anzahl der Kegelschnitte eines einstufigen Systems, welche eine hinzutretende einfache Bedingung erfüllen, immer gleich $\alpha\mu + \beta\nu$ ist, wo μ und ν angeben, wieviel Kegelschnitte des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen, bezw. eine gegebene Gerade berühren, und wo α und β nur von der hinzutretenden Bedingung abhängen. Diese Vermutung, eine Uebertragung des Bezout'schen Satzes von Punkten auf Kegelschnitte, hatte dann Clebsch (Math. Ann. VI. 1873) beweisen zu können geglaubt. Darauf hatte Herr Halphen (Comptes rendus, 1876) gemeint nachweisen zu können, dass der Chasles'sche Satz schlechthin falsch sei. Herr Study zeigt nun, dass Herr Halphen nur die an die „Beweglichkeit" der Lösungen geknüpfte Fassung im Auge gehabt, und nichts anderes bewiesen habe, als dass die Zahl der „beweglichen", einem ein- und einem vierstufigen Kegelschnittsysteme gemeinsamen Kegelschnitte unter selten eintretenden, besonders erst zu erfindenden Umständen kleiner sein könne, als die Chasles'sche Zahl. Ebenso habe Clebsch nur die beweglichen Curven als eigentliche Lösungen des Problems betrachtet und dadurch eine einseitige Auffassung des Chasles'schen Satzes, neben der noch andere denkbar seien, hervorgerufen. So sei es gekommen, dass die gegen den Chasles'schen Satz gerichteten Angriffe im Grunde nicht ihn selbst,

sondern eben nur jene besondere Auffassung treffen. Herr Study interpretirt daher die Formel $\alpha\mu+\beta\nu$ in der vorliegenden Abhandlung auf eine Art, die ebenso berechtigt ist, wie die Clebsch-Halphen'sche Deutungs-Art, und dennoch der Formel eine ausnahmslos gültige Deutung verleiht. Stellt man nämlich ein einstufiges und ein vierstufiges Kegelschnittsystem zusammen, von welchen das erstere eine Doppelgerade enthält, so wird diese im allgemeinen auch in dem letzteren System enthalten sein; man erhält durch die bezüglichen Grenzübergänge im ersten Falle ein einziges Punktepaar auf der Geraden, im zweiten Falle eine Reihe von ∞^1 solchen Punktepaaren, unter welchen das erste im allgemeinen sich nicht befindet. Dieses Punktepaar wird man also nicht als eine den beiden Systemen gemeinsame Curve ansehen dürfen. Bringt man nun die nach Abzug aller derartigen Vorkommnisse noch übrig bleibenden, nun beiden Systemen wirklich gemeinsamen Curven mit der richtigen Multiplicität in Anschlag, so wird ihre Gesamtzahl immer durch die Chasles'sche Formel genau angegeben, wie der Verfasser ausführlich beweist. Der Beweis wird analytisch geführt, indem die Aufgabe als ein Gegenstand der Formentheorie behandelt wird. Wenn der Verfasser in der Einleitung von der Entwickelung der umfangreichen, fast von Anfang an schon „mit einem eigenen Namen bezeichneten Theorie der Charakteristiken" spricht, so ist hierauf zu erwidern, dass der Referent und infolgedessen auch dieses Jahrbuch schon seit dem Jahre 1872 den Namen „Charakteristikentheorie" für das in Rede stehende Gebiet verworfen hat, in der Erkenntnis, dass es für Gebilde von höherem als dem zweiten Grade keine Charakteristiken giebt. Gerade der Referent und unser Jahrbuch haben für dieses Gebiet den Namen „Geometrie der Anzahl" oder „abzählende Geometrie" eingeführt, ein Name, der allmählich überall, auch im Auslande, Eingang gefunden hat. Scht.

E. Study. Ueber die Cremona'sche Charakteristikenformel. Klein Ann. XXVII. 102-105.

Während die vorhergehende Abhandlung (s. vorstehendes Referat) erörtert, inwiefern die Anzahl der einem ein- und einem vierstufigen Kegelschnittsysteme gemeinsamen Kegelschnitte durch die Chasles'sche Formel $\alpha\mu+\beta\nu$ ausgedrückt wird, behandelt die vorliegende Abhandlung die analoge Frage für die einem zwei- und einem dreistufigen Kegelschnittsysteme gemeinsamen Kegelschnitte. Scht.

H. Schubert. Lösung des Charakteristiken - Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. Hamb. Mitt. 134-155.

Unter „Charakteristikenproblem" eines Gebildes mit der Constantenzahl c versteht der Verfasser (Kalkül der abzählenden Geometrie § 37) die Aufgabe, die Zahl der gemeinsamen Elemente eines s-stufigen Systems (S) und eines von ihm unabhängigen $(c-s)$-stufigen Systems (S') solcher Gebilde durch Zahlen (Gradzahlen) auszudrücken, von denen jede angiebt, wieviel Elemente von S, bezw. von S' gewisse Bedingungen (Grundbedingungen) erfüllen. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert eine Reihe von Begriffen und Symbolen, welche der Verfasser bereits in einer früheren Abhandlung (F. d. M. XVII. 1885. 668) aufgestellt hat. Nach wiederholter Zusammenstellung derselben im § 1 der vorliegenden Abhandlung wird zunächst der Begriff der centrischen Collineation auf den n-dimensionalen Raum übertragen. Ist P das Centrum der Collineation, A ein beliebiger Punkt, E_a der Schnittpunkt der Geraden PA mit dem festen $(n-1)$-dimensionalen Raume E und λ eine beliebige Zahl, so heisst der Punkt A', welcher aus der Gleichung

$$\frac{PA}{PA'}:\frac{E_aA}{E_aA'}=\lambda$$

hervorgeht, das „λ-Bild" des Punktes A. Wie den Punkten, so entsprechen auch linearen Räumen ihre λ-Bilder. Von besonderer Wichtigkeit sind hier die Nullbilder, weil die Gradzahl eines Systems S von Räumen $[k]$ (d. h. die Zahl derjenigen $[k]$, welche dem System S angehören und gleichzeitig eine gegebene

Grundbedingung erfüllen) mit den Gradzahlen gewisser seinem Nullbilde angehörigen Systeme entweder übereinstimmt oder wenigstens in einfachem Zusammenhange steht. Durch wiederholte Transformation eines Systems S mittels dieser Collineation (für $\lambda = 0$) gelingt es nun, dasselbe in ein anderes nur aus „Grundgebilden" bestehendes (G) zu verwandeln (§ 3). Die Bestimmung der Anzahl gemeinsamer Elemente der Systeme S und S' wird jetzt dadurch vereinfacht, dass das System G an die Stelle von S tritt, und die Lösung des Problems wird schliesslich in dem Satze ausgesprochen: Ist die Stufensumme zweier Systeme von k-dimensionalen linearen Räumen gleich $(k+1)(n-k)$, so ist die endliche Anzahl der den beiden Systemen gemeinsamen Räume gleich der Summe der Producte aller möglichen conjugirten Gradzahlen der beiden Systeme (§ 4). Dieses Resultat wird durch einige Zahlenbeispiele erläutert, wobei durch die Annahme $k = 1$ der Halphen'sche Satz der Liniengeometrie auf das n-dimensionale Gebiet ausgedehnt wird (§ 5). Weiter wird der Fall erledigt, dass die beiden gegebenen Systeme unendlich viele Elemente gemeinsam haben (§ 6), und zuletzt die Anzahl der Strahlen bestimmt, welche $(n-1)$ gegebenen $(2n-4)$-stufigen Strahlsystemen gemeinsam angehören. Schg.

H. Schubert. Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. Acta Math. VIII. 97-118.

In seiner Abhandlung „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes" (S. F. d. M. XVII. 1885. 668) hatte der Verfasser u. a. die Anzahl der Strahlen bestimmt, welche in einem $[n]$ (d. h. n-dimensionalen Raume) einen gegebenen $[a]$ schneiden, dabei in einem durch diesen $[a]$ gehenden $[\alpha]$ liegen und ausserdem $(\alpha+a-1)$ beliebig gegebene $[n-2]$ schneiden. Diese Untersuchung wird in der vorliegenden Abhandlung in folgender Weise verallgemeinert. Es wird die Anzahl der $[p]$ bestimmt, welche in einem $[n]$ einem gegebenen Grundgebilde $[a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p]$ angehören (d. h. mit a_0 einen Punkt, mit a_1 einen Strahl, etc. ge-

meinsam haben) und ausserdem mit $a_0 + a_1 + \cdots + a_p - \frac{1}{2}p(p+1)$ beliebig gegebenen $[n-p-1]$ je einen Punkt gemeinsam haben.

Schg.

C. Burali-Forti. Sui sistemi di coniche. Batt. G. XXIV. 309-333.

Nach dem Erscheinen der wichtigen Arbeiten (von denen die umfangreichste einen Teil des Cah. XLV des J. de l'Éc. Pol. ausmacht), in welchen Herr Halphen die notwendigen Abänderungen an der berühmten Chasles'schen Formel über die Systeme ∞^1 von Kegelschnitten feststellt, gelangte Herr Del Pezzo (Napoli Rend. 1884; F. d. M. XVI. 625) auf einem mehr geometrischen Wege als der französische Gelehrte zu denselben Ergebnissen und dehnte sie auf die Systeme ∞^2 aus. In dem zu besprechenden Aufsatze hat Herr Burali-Forti die Halphen'sche Methode wieder aufgenommen und ihre Tragweite durch den Nachweis vergrössert, dass dieselbe das Problem der Charakteristiken für das System ∞^i lösen könnte.

Zur Erforschung eines derartigen Systems unter den allgemeinsten Voraussetzungen nimmt der Verfasser an, die Coefficienten der Gleichung eines Kegelschnitts seien algebraische Formen m^{ten} Grades der Parameter $l_1, l_2, \ldots, l_{i+2}$, die durch eine Relation von der Form $\varphi(l_1, l_2, \ldots, l_{i+2}) = 0$ mit einander zusammenhängen (φ eine algebraische Form n^{ten} Grades). Von dieser Gleichung kann man aussagen, sie stelle eine i-dimensionale Oberfläche n^{ten} Grades dar, in einen linearen Raum von $i+1$ Dimensionen eingetaucht, von welchem jeder Punkt einem Kegelschnitte des Systems entspricht. Ist Δ die Discriminante des Kegelschnittes, so stellt die Gleichung $\Delta = 0$ eine andere ähnliche Oberfläche $(3m)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, welche die erstere in denjenigen Punkten schneidet, die den ausgearteten Kegelschnitten des Systems entsprechen. Die Ausartung einer Systemcurve kann jedoch auf mehrere Arten eintreten. Die Ergründung dieser verschiedenen Ausartungs-Möglichkeiten ist die Grundlage der ganzen Theorie der Charakteristiken, und der Verfasser widmet

ihr den § II seiner Abhandlung. Die Resultate, zu denen er kommt, sind wohlbekannt. Die zu betrachtenden Ausartungen sind dreierlei, jede wird durch zwei bezügliche, geometrischer Deutungen fähige Zahlen gekennzeichnet. Im folgenden Paragraphen führt Herr Burali-Forti die Betrachtung einer Bedingung ein, welcher alle Curven des Systems genügen müssen, und definirt die Zahl, welche „Charakteristik einer Bedingung" genannt wird. Die Beziehungen, zu denen er in diesem und im folgenden Paragraphen gelangt, und die Bemerkungen über die Minimalgruppen bezüglich einer gegebenen Bedingung und Ausartung ermöglichen ihm die Lösung der folgenden Aufgabe:

„Die Anzahl der Systemkegelschnitte zu finden, welche gegebenen Bedingungen genügen."

Es seien α_r und β_r die Charakteristiken der r^{ten} unter den gegebenen Bedingungen und man bezeichne mit $\Sigma(\alpha)_{i-r}(\beta)_r$ die Summe aller Producte von je $i-r$ Zahlen α und r Zahlen β; endlich sei $\mu_{i-r,r}$ die Anzahl der Systemcurven, welche durch $i-r$ Punkte gehen und r Gerade berühren, so hat die Zahl, welche das obige Problem löst, den Ausdruck:

$$\sum_{r=0}^{r=i} \mu_{i-r,r}\, \Sigma(\alpha)_{i-r}(\beta)_r - L_i,$$

worin L_i eine Zahl ist, die sich bestimmen lässt (durch eine Formel, die in der Original-Abhandlung gegeben ist), wenn man die den Curven des Systems auferlegten i Bedingungen kennt.

Im letzten Paragraphen der Arbeit wendet der Verfasser seine Ergebnisse auf die Systeme ∞^1 an. Er findet das Halphen'sche Theorem wieder, und nachdem er die Bedingungen dafür festgestellt hat, dass auf ein derartiges System der Chasles'sche Satz sich anwenden lasse, kommt er zu dem Schlusse, dass die ähnlichen, von Halphen aufgefundenen Bedingungen bloss genügend sind, und er stellt andere auf, die notwendig und genügend sind. La. (Lp.)

C. Burali-Forti. Sui sistemi i-volte infiniti di quadriche. Batt. G. XXIV. 334-345.

Die Hrn. Halphen angehörende, von Hrn. Burali-Forti zur Erforschung der Kegelschnittsysteme benutzte Methode (s. das vorstehende Referat) lässt sich mit Erfolg zur Erforschung ähnlicher Systeme ∞^i von Oberflächen zweiter Ordnung verwenden; sie führt mithin zur Erweiterung der von Hrn. Halphen im Falle $i = 1$ aufgestellten Resultate (Cah. XLV. des J. de l'Éc. Pol.). Durch den Uebergang von der Ebene zum Raume wird jedoch die Untersuchung weit verwickelter. Während ein Kegelschnitt als Ort von Punkten und als Hüllcurve von Geraden zu betrachten ist, muss eine Fläche zweiter Ordnung als Ort von Punkten, als Hüllfläche von Ebenen und als Complex von Geraden angesehen werden. Wenn ein Kegelschnitt zwei Ausartungen erleidet, die durch zwei Zahlen charakterisirt sind, so kommen bei einer Oberfläche zweiter Ordnung sieben, durch drei Zahlen charakterisirte vor. Endlich während in der Ebene eine Bedingung durch zwei Zahlen definirt wird, sind im Raume drei dazu erforderlich.

Wir werden dem Verfasser nicht in alle Einzelheiten seiner Arbeit folgen, deren Analogie mit derjenigen über die Kegelschnitte auf der Hand liegt. Wir wollen uns darauf beschränken, (mit einigen Abänderungen in der Form) die Formel anzuzeigen, welche er als Lösung der folgenden Aufgabe giebt:

„Die Anzahl der Systemflächen zu finden, welche i gegebenen Bedingungen genügen."

Man bezeichne mit α_r, β_r, γ_r die Charakteristiken der r^{ten} unter den gegebenen Bedingungen; mit $\Sigma(\alpha)_r(\beta)_s(\gamma)_t$ $(r+s+t = i)$ die Summe aller Producte von je r Zahlen α, s Zahlen β, t Zahlen γ; mit $\mu_{r,s,t}$ die Anzahl der Systemflächen, welche durch r Punkte gehen, s Geraden und t Ebenen berühren. Die Zahl, welche die obige Aufgabe löst, ist:

$$\sum_{r,s,t} \mu_{r,s,t} \; \Sigma(\alpha)_r(\beta)_s(\gamma)_t - L_i,$$

worin L_i eine Zahl ist, die sich bestimmen lässt, wenn man die den Systemflächen auferlegten Bedingungen kennt. In einigen Fällen, welche der Verfasser angiebt, ist dieser Ausdruck von

einem bei Chasles vorkommenden nicht verschieden; ist $i = 1$, so bietet derselbe einige Besonderheiten, welche man im letzten Paragraphen der besprochenen Abhandlung findet.

La. (Lp.)

M. Pieri. Sopra alcuni problemi riguardanti i fasci di curve e di superficie algebriche. Batt. G. XXIV. 13-22.

Auf Grund des behandelten Stoffes und der gewählten Methode lässt sich diese Abhandlung in zwei Teile sondern. Der erste, die neun ersten Nummern umfassende, erledigt die folgenden Aufgaben:

a) Den Ort der Fusspunkte der Normalen zu finden, welche man von einem Punkte P an die Curven oder Oberflächen eines Büschels ziehen kann.

In der Ebene ist der Ort eine Curve $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch den Punkt P, durch die n^2 Grundpunkte des Büschels, durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte ihrer singulären Curve, durch die $2(n-1)$ Berührungspunkte der Geraden im Unendlichen mit den parabolischen Curven des Büschels und durch die Kreispunkte im Unendlichen geht. Im Raume ist der Ort eine Raumcurve von der Ordnung $3n^2-2n-1$, welche durch den Punkt P, durch die $4(n-1)^3$ Doppelpunkte der singulären Curve des Büschels, durch die Fusspunkte der von P an die Grundcurve des Büschels gezogenen $n^2(2n-1)$ Normalen, durch die $3(n-1)^2$ Berührungspunkte der Ebene im Unendlichen mit Oberflächen des Büschels und durch die $2(2n-1)$ Punkte geht, in welchen der imaginäre Kreis im Unendlichen durch solche Oberflächen berührt wird.

b) Den Ort der Punkte zu finden, wo sich die Curven zweier Büschel ebener Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung rechtwinklig schneiden.

Dieser Ort ist von der Ordnung $2(m+n-1)$; er geht durch die Grundpunkte und durch die Doppelpunkte beider Büschel, durch die Kreispunkte im Unendlichen und durch die Punkte, in denen die Gerade im Unendlichen von den parabolischen

Curven der beiden Büschel berührt wird. Der Verfasser löst diese Aufgaben mittels des Chasles'schen Correspondenz-Prinzipes und fügt seinen Lösungen einige nicht uninteressante Zusätze bei, welche wir jedoch in dieser Uebérsicht übergehen müssen.

Der zweite Teil ist wichtiger; er hat die Bestimmung der Verkleinerung in der Anzahl der Curven und Oberflächen eines Büschels zum Ziele, welche einen Doppelpunkt besitzen, falls es einen gewöhnlichen i-fachen Punkt giebt. Diese Verkleinerung beträgt $(i-1)(3i+1)$ in der Ebene (Vgl. Cremona, Annali di Matematica 1864) und $(i-1)^2(4i+2)$ im Raume. Zu diesen Folgerungen kommt Hr. Pieri durch die Benutzung eines Systemes projectivischer Coordinaten und die Beihülfe geometrischer Betrachtungen. La. (Lp.)

Sc. Rindi. Alcune proprietà delle superficie e dei sistemi di superficie. Batt. G. XXIV. 94-105

Die zahlreichen in dieser Note entwickelten Eigenschaften sind grösstenteils metrischer Natur, und diejenigen, welche projectivisch sind, erscheinen nur in der Rolle von Hülfssätzen. Dieselben scheinen uns nicht die Bestimmung zu haben, eine hervorragende Stelle in der Geometrie einzunehmen, sei es durch ihren innern Wert, sei es durch die zu ihrem Beweise führende Methode, welche in einem fast durchgängigen Gebrauche des Correspondenzprinzips besteht. Wir wollen den Wortlaut einiger der vom Verfasser aufgestellten Sätze mitteilen, damit der Leser sich selber über ihren Wert ein Urteil bilden kann.

1. Der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf zwei Oberflächen von der Ordnung n und n' einen gegebenen Winkel φ mit einander bilden, ist eine Oberfläche von der Ordnung $2(n+n'-2)$, wenn $0<\varphi<\frac{1}{2}\pi$; eine Oberfläche von der Ordnung $n+n'-2$, wenn $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; endlich eine Curve von der Ordnung $(n+n'-2)^2-(n-1)(n'-1)$, wenn $\varphi=0$. Die erste Oberfläche erhält den Namen „geneigte Jacobi'sche" der beiden Flächen bezüglich des Winkels φ, die zweite „senk-

rechte Jacobi'sche", die Curve wird die „parallele Jacobi'sche" genannt.

2. Es seien eine Oberfläche n^{ter} Ordnung und ein Büschel von Oberflächen m^{ter} Ordnung gegeben. Der Ort eines Punktes P, dessen Polarebene in Bezug auf die Oberfläche einen gegebenen Winkel φ mit der Berührungsebene der durch P gehenden Fläche des Büschels in P bildet, ist eine Oberfläche von der Ordnung $2(n+2m-2)$, wenn $0<\varphi<\frac{1}{2}\pi$; eine Oberfläche von der Ordnung $n+2m-2$, wenn $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; eine Curve von der Ordnung $(n+2m-2)^2-(n-1)(2m-1)-m^2$, wenn $\varphi=0$. Die erste Oberfläche wird „geneigte Jacobi'sche" der Oberfläche und des Büschels bezüglich des Winkels φ, die zweite „senkrechte Jacobi'sche" genannt, während die obige Curve den Namen „parallele Jacobi'sche" erhält.

3. Die geneigten Jacobi'schen Oberflächen einer festen Oberfläche und der Oberflächen eines Büschels für einen Winkel φ bilden eine Schar mit dem Index 2; die senkrechten Jacobi'schen Oberflächen bilden einen anderen Büschel.

4. Die geneigten Jacobi'schen Oberflächen der Paare entsprechender Oberflächen zweier projectivischen Büschel für einen Winkel φ bilden eine Schar mit dem Index 4; die senkrechten Jacobi'schen bilden eine mit dem Index 2.

5. Der Ort eines Punktes, in welchem sich die entsprechenden Oberflächen zweier projectivischen Bündel n^{ter} und n'^{ter} Ordnung unter einem gegebenen Winkel φ schneiden, ist eine Oberfläche von der Ordnung $2[3(n+n')-3]$; diese Ordnung geht auf die Hälfte zurück, wenn $\varphi=\frac{1}{2}\pi$. La. (Lp.)

M. Pieri. Sulle normali doppie di una curva gobba algebrica. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 327-329.

Man bezeichne mit n eine Doppelnormale einer algebraischen Raumcurve; mit P_1 und P_2 die Punkte, in denen sie die Curve trifft; mit t_1 und t_2 die entsprechenden Tangenten. Da t_1 und t_2 zu n senkrecht sind, so sind die Spurpunkte T_1 und T_2 der Geraden t_1 und t_2 auf der Ebene im Unendlichen conjugirt be-

züglich des imaginären Kugelkreises C_∞ zur Spur N der Geraden n auf derselben Ebene, und die Gerade $T_1 T_2 \equiv p$ ist die Polare von N. Dies beweist, dass die Anzahl der Doppelnormalen der Curve, welche nicht in der Ebene im Unendlichen liegen, gleich der Anzahl der Coincidenzen ist, welche in der Verwandtschaft zwischen einem Punkte N der Ebene im Unendlichen und dem in Bezug auf C_∞ genommenen Pole P der Geraden auftreten, welche von den beiden Tangenten der Curve in zwei Punkten, wo sie von einer aus dem Punkte N gezogenen Geraden getroffen wird, die Punkte im Unendlichen verbindet. Die Curve sei von der Ordnung n, der Klasse m, dem Range r, habe h scheinbare Doppelpunkte, θ stationäre Erzeugende. Jedem Punkte N entsprechen h Punkte P, jedem Punkte P ferner $\frac{1}{2}r(r-1)$ Punkte N, und auf jeder Geraden der Ebene im Unendlichen befinden sich $n(r-1)-\frac{1}{2}(n+m-\theta)$ entsprechende Punktepaare N, P. Wendet man daher Salmon's Correspondenz-Prinzip an, so erschliesst man die Anzahl

$$h+\tfrac{1}{2}r(r-1)+n(r-1)-\tfrac{1}{2}(n+m-\theta)$$

von Doppelnormalen der Curve ausserhalb der Ebene im Unendlichen. Ist z. B. die betrachtete Curve rational, so findet man die wohlbekannte Zahl

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(9n-14).$$

La. (Lp.)

M. Pieri. Sulle normali doppie di una superficie algebrica. Rom. Acc. L. Rend. (4) II₂. 40-42.

Man bezeichne mit S_n eine allgemeine Oberfläche n^{ter} Ordnung, welche keine besondere Beziehung zur Ebene im Unendlichen oder zum imaginären Kugelkreise C_∞ hat; mit n eine Normale zur Oberfläche in den Punkten P_1 und P_2. Die Ebenen π_1 und π_2, welche S_n in P_1 und P_2 berühren, schneiden die Ebene im Unendlichen in einer und derselben Geraden p, der Polaren des Punktes N im Unendlichen auf n in Bezug auf C_∞. Diese Bemerkung giebt ein Mittel an die Hand zur Bestimmung der Anzahl der Binormalen von S_n. Wenn man nämlich eine von Hrn. Zeuthen (C. R. Juni 1874) entdeckte Relation anwendet, so sieht

man ein, dass jedem Punkte N der Ebene im Unendlichen x Gerade p derselben Ebene entsprechen, sodass in jeder derselben sich zwei Berührungsebenen von S_n schneiden, deren Berührungspunkte mit N in einer Geraden liegen, mithin auch x Pole P der Geraden p in Bezug auf C_x; der Wert von x ist

$$x = \tfrac{1}{2}n(n-1)(3n^2-9n+7).$$

Dagegen entsprechen jedem Punkte P eine Gerade p und x' Punkte N, wo

$$x' = \tfrac{1}{2}n(n-1)^2[n(n-1)^2-1].$$

Endlich befinden sich auf jeder Geraden der Ebene im Unendlichen y entsprechende Punktepaare N, P, wo

$$y = \tfrac{1}{2}n(n-1)(2n^3-4n^2-2n+5).$$

Mithin sind $x+x'+y$ Coincidenzen eines Punktes N mit einem Punkte P vorhanden, d. h. $x+x'+y$ Binormalen von S_n. Die gesuchte Anzahl wird also durch den Ausdruck gegeben

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n^4-n^3+2n^2-13n+13).$$ La. (Lp.)

P. Visalli. Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. Rom. Acc. L. Mem. (4) III. 597-671.

Battaglini e De Paolis. Relazione. Rom. Acc. L Mem. (4) III. 595-596.

Wie allgemein bekannt ist, haben die denkwürdigen Untersuchungen von Chasles über die Charakteristiken von Kegelschnittsystemen durch Hrn. Hirst eine beachtenswerte Vervollkommnung erfahren, der dadurch zur Theorie der Charakteristiken der Correlations-Systeme zwischen zwei Ebenen geführt ist (Vgl. „On the correlation between two planes“ in Lond. M. S. Proc. V. 40-70 und in Brioschi Ann. (2) VI. 260-297 nebst den Berichten in F. d. M. VI. 1874. 347 und VII. 1875. 358). Derselbe Gelehrte hat später die ersten Umrisse zu einer ähnlichen Theorie der Correlations-Systeme zwischen zwei dreidehnigen Räumen entworfen („On the correlation in space“ in Lond. M. S. Proc. VI. 7-9, F. d. M. VII. 1875. 374), ohne dieselbe jedoch, wofern wir uns nicht irren, näher durchzuführen. In der zu besprechenden Abhandlung beabsichtigt Hr. Visalli die Ausführung des

Hirst'schen Planes; hierzu hat er die von jenem Geometer in seiner Arbeit aus den Annali dargelegten Methoden verallgemeinert.

Bekanntlich hat die Lösung der Aufgabe der Charakteristiken betreffs eines geometrischen Gebildes ihre Grundlage in der Betrachtung der Ausartungen, welche dies Gebilde erfahren kann; aus diesem Grunde ist die erste Frage, welche Hr. Visalli aufgeworfen und beantwortet hat, die nach der Bestimmung aller ausgearteten Correlationen zwischen zwei Räumen. Durch die Bemerkung, dass, wenn die beiden Räume Σ und Σ' collinear sind, und wenn man das zu einem der beiden collineare Gebilde Σ_1 construirt, die beiden Räume Σ und Σ_1 correlativ sind, führt der Verfasser diese Aufgabe auf die Bestimmung der ausgearteten Collineationen zwischen zwei Räumen zurück. (Vgl. eine ähnliche Zurückführung bei Hirst, „Corr. of two planes" no. 11ff.). Zur Erledigung derselben denkt er sich eine Collineation zwischen zwei Räumen Σ und Σ' durch zwei Paare σ und σ', σ_1 und σ'_1 von collinearen projectivischen Ebenen mit der Bedingung bestimmt, dass die Geraden $\sigma\sigma_1$ und $\sigma'\sigma'_1$ sich entsprechen; unter der Voraussetzung dass die ebenen Collineationen der Reihe nach alle Ausartungen erleiden, deren sie fähig sind, gelangt man zu allen ausgearteten Collineationen zwischen zwei dreidehnigen Räumen. Es sind die folgenden:

I. Collineation mit einem Ausartungspunkte in einem der Räume und einer Ausartungsebene in dem andern.

II. Collineation mit einer Ausartungsgeraden in jedem Raume.

III. Collineation mit einem Ausartungspunkte und einer Ausartungsgeraden, welche durch den Punkt geht, in einem der Räume und mit einer Ausartungsebene und einer Ausartungsgeraden, welche auf der Ebene liegt, in dem anderen.

IV. Collineation mit einem Ausartungspunkte und einer Ausartungsebene, welche durch den Punkt geht, in jedem Raume.

V. Collineation mit einem Ausartungspunkte und einer Ausartungsgeraden, welche durch den Punkt geht, und einer Ausartungsebene, welche durch die Gerade geht, in jedem Raume.

Daraus folgen die sieben folgenden Ausartungs-Correlationen:

I. Correlation mit einem Ausartungspunkte in jedem Raume;

II. C. m. einer Ausartungsebene i. j. R.;

III. C. m. einer Ausartungsgeraden i. j. R.;

IV. C. m. einem Ausartungspunkte und einer durch den Punkt gehenden Ausartungsgeraden i. j. R.;

V. C. m. einer Ausartungsebene und einer in der Ebene liegenden Ausartungsgeraden i. j. R.;

VI. C. m. einem Ausartungspunkte und einer durch den Punkt gehenden Ausartungsebene i. j. R.;

VII. C. m. einem Ausartungspunkte und einer durch den Punkt gehenden Ausartungsgeraden nebst einer durch die Gerade gehenden Ausartungsebene i. j. R.

Die drei ersten heissen von der ersten Ordnung (dieselben waren schon von Hrn. Hirst, „Corr. in space" no. 4, betrachtet worden), die drei folgenden von der zweiten, die letzte von der dritten. Eine allgemeine Correlation wird durch 15 Bedingungen bestimmt. Nennt man bei einer Correlation zwei Elemente „conjugirt" (Punkte, Gerade oder Ebenen), wenn das dem einen von ihnen entsprechende durch das andere geht, und zwei Gerade „polar", sobald die eine der Ort der Punkte ist, welche den durch die andere hindurchgehenden Ebenen entsprechen, so erkennt man, dass, wenn zwei Punkte oder zwei Ebenen in einer Correlation conjugirt sind, diese einer Bedingung unterworfen ist; wenn ein Punkt oder eine Ebene einer Geraden conjugirt ist, so macht dies zwei Bedingungen aus; wenn ein Punkt oder eine Ebene einem bestimmten Punkte oder einer bestimmten Ebene entsprechen, so giebt dies drei Bedingungen; wenn endlich zwei gegebene Gerade polar sind, so macht dies vier Bedingungen.

Die eben zusammengefassten Untersuchungen können als die Elemente der von uns durchzuarbeitenden Abhandlung angesehen werden; die anderen können in zwei Abschnitte gegliedert werden, von denen der erste alle die ∞^1 Correlationssysteme behandelt, welche 14 Bedingungen befriedigen, der zweite die ∞^2 Correlationssysteme, welche 13 Bedingungen befriedigen.

In einem Systeme von ∞^1 Correlationen giebt es im allgemeinen nur Ausartungscorrelationen erster Ordnung. Es sei die Anzahl

derer mit einer Ausartungsebene in jedem Raume λ,
„ „ einem Ausartungspunkte in jedem Raume π,
„ „ einer Ausartungsgeraden in jedem Raume ψ.

In dem Systeme ist eine endliche Anzahl μ von Correlationen vorhanden, in welchen zwei gegebene Punkte conjugirt sind, und eine endliche Anzahl ν von Correlationen, in welchen zwei gegebene Ebenen conjugirt sind; μ ist die Ordnung und ν die Klasse des Systems, während μ und ν seine Charakteristiken sind (Hr. Hirst hat in der „Correlation in space" eine dritte Charakteristik betrachtet, die Anzahl der Correlationen des Systems, in Bezug auf welche die einer gegebenen Geraden conjugirte Gerade eine andere gegebene Gerade schneidet). Die fünf Zahlen λ, π, ψ, μ, ν sind (Vgl. Hirst, „Corr. in space" no. 5) durch die Relationen verbunden:

$$(1) \qquad 4\mu = 3\lambda + 2\psi + \pi, \quad 4\nu = 3\pi + 2\psi + \lambda,$$

welche die Charakteristiken jedes Systems ∞^1 liefern, deren Ausartungscorrelationen man kennt.

Man bezeichne mit m, n, p, q vier ganze nicht negative Zahlen, welche die Gleichung befriedigen:

$$3m + 3n + p + q = 14,$$

und mit (m, n, p, q) das System ∞^1 von Correlationen, bei denen

m Punkte des ersten Raumes m gegebenen Ebenen des zweiten entsprechen,

n Ebenen des ersten Raumes n gegebenen Punkten des zweiten entsprechen,

p Punktepaare conjugirt sind, q Ebenenpaare conjugirt sind.

Jeder Zahlengruppe m, n, p, q entspricht ein System ∞^1 von Correlationen; auf diese Weise gelangt man zu 66 Systemen. Beachtet man jedoch, dass die beiden Lösungen m, n, p, q und n, m, p, q uns dasselbe System von Correlationen geben, weil sie dieselben Bedingungen darstellen, und dass die Charakteristiken des Systems (m, n, p, q) sofort die des correlativen Systems (m, n, q, p) geben, so sieht man ein, dass man sich auf

die Erforschung von 36 Systemen beschränken kann. Für jedes derselben bestimmt der Verfasser drei von den Zahlen λ, π, ψ, μ, ν und gewinnt die beiden anderen aus den Relationen (1). Er verfährt direct, indem er sich oft einiger allgemeiner Sätze bedient, welche er zuvor bewiesen hat. Von diesen Sätzen wollen wir den folgenden anführen: Die Klasse des Systems (m, n, p, q) ist gleich der Ordnung des nächstfolgenden Systems $(m, n, p-1, q+1)$. Wir citiren ihn, weil er die Einteilung der folgenden, die Ergebnisse des Verfassers zusammenfassenden Tabelle in neun Gruppen beleuchtet.

		λ	π	ψ	μ	ν
I Gruppe	(4, 0, 2, 0)	0	4	0	1	3
	(4, 0, 1, 1)	0	0	6	3	3
II „	(3, 1, 2, 0)	1	1	0	1	1
	(3, 1, 1, 1)	1	1	0	1	1
III „	(2, 2, 2, 0)	0	0	0	0	0
	(2, 2, 1, 1)	0	0	0	0	0
IV „	(3, 0, 5, 0)	0	4	0	1	3
	(3, 0, 4, 1)	0	6	3	3	6
	(3, 0, 3, 2)	1	3	9	6	7
V „	(2, 1, 5, 0)	0	2	1	1	2
	(2, 1, 4, 1)	0	4	2	2	4
	(2, 1, 3, 2)	3	5	1	4	5
VI „	(2, 0, 8, 0)	0	4	0	1	3
	(2, 0, 7, 1)	0	10	1	3	8
	(2, 0, 6, 2)	0	12	10	8	14
	(2, 0, 5, 3)	0	10	23	14	19
	(2, 0, 4, 4)	4	4	30	19	19
VII „	(1, 1, 8, 0)	0	4	0	1	3
	(1, 1, 7, 1)	0	6	3	3	6
	(1, 1, 6, 2)	0	12	6	6	12
	(1, 1, 5, 3)	0	12	18	12	18
	(1, 1, 4, 4)	6	6	24	18	18
VIII „	(1, 0, 11, 0)	0	4	0	1	3
	(1, 0, 10, 1)	0	12	0	3	9
	(1, 0, 9, 2)	0	24	6	9	21

		λ	π	ψ	μ	ν
VIII Gr.	(1, 0, 8, 3)	0	32	26	21	37
	(1, 0, 7, 4)	0	26	61	37	50
	(1, 0, 6, 5)	0	10	95	50	55
IX „	(0, 0, 14, 0)	0	4	0	1	3
	(0, 0, 13, 1)	0	12	0	3	9
	(0, 0, 12, 2)	0	36	0	9	27
	(0, 0, 11, 3)	0	68	20	27	61
	(0, 0, 10, 4)	0	84	80	61	103
	(0, 0, 9, 5)	0	60	176	103	133
	(0, 0, 8, 6)	0	20	256	133	143
	(0, 0, 7, 7)	0	0	286	143	143.

Aus diesen Zahlen kann man diejenigen der, fünfzehn Bedingungen befriedigenden Correlationen erhalten. Sind m, n, p, q vier ganze nicht negative Zahlen, welche der Gleichung genügen:

$$3m + 3n + p + q = 15,$$

und bezeichnet man mit $[m, n, p, q]$ die Anzahlen der Correlationen zwischen zwei Räumen, bei denen

m Punkte des ersten Raumes m gegebenen Ebenen des zweiten,
n Ebenen „ „ „ n „ Punkten „ „

entsprechen, p gegebene Punktepaare conjugirt sind und q gegebene Ebenenpaare ebenfalls conjugirt sind, so gelangt der Verfasser nach einer Darlegung gewisser allgemeiner vorgängiger Betrachtungen zu den folgenden Ergebnissen:

$[2, 2, 3, 0] = [3, 2, 0, 0] = 0,$

$[3, 1, 3, 0] = [4, 1, 0, 0] = [3, 0, 6, 0] = [2, 0, 9, 0] = [1, 0, 12, 0]$
$= [0, 0, 15, 0] = [2, 1, 6, 0] = [1, 1, 9, 0] = 1,$

$[2, 1, 5, 1] = 2,$

$[1, 1, 8, 1] = 3.$

Ein System ∞^3 von Correlationen begreift Ausartungscorrelationen erster und zweiter Ordnung in sich. Die zweiter Ordnung sind von endlicher Anzahl. Wir wollen die Anzahl

derer mit Ausartungs-Punkten und -Ebenen mit ϱ,
„ „ Ausartungsgeraden mit σ,
und „ „ Ausartungsebenen mit τ

bezeichnen. Diejenigen erster Ordnung bilden drei Systeme.

(Von diesen Ausartungscorrelationen allein hatte Hr. Hirst gesprochen, „Correlation in space“ no. 11). Wir wollen bei dem System der ∞^1 Correlationen erster Ordnung

mit Ausartungspunkten die Ordnung π_A und die Klasse π_a,
„ Ausartungsebenen „ „ λ_A „ „ „ λ_a,
„ Ausartungsgeraden „ „ ψ_A „ „ „ ψ_a

nennen. Diese neun Zahlen sind nicht ganz unabhängig von einander; denn man hat z. B. die Relationen:

$$2\pi_A = 2\varrho + \tau, \quad 2\lambda_A = 2\varrho + \sigma.$$

Jeder Lösung der Gleichung $3m + 3n + p + q = 13$ entspricht ein System ∞^2 von Correlationen, die wir im Verfolg der Analogie mit den vorangehenden Relationen mit (m, n, p, q) bezeichnen wollen. Beachtet man, dass die Lösungen m, n, p, q und n, m, p, q dasselbe System geben und dass die auf die beiden Systeme (m, n, p, q) und (m, n, q, p) bezüglichen Zahlen nur durch die Vertauschung von σ und τ unterschieden sind, so darf man schliessen, dass sich die Untersuchung auf 30 Systeme beschränken lässt. Die auf diese Systeme bezüglichen Zahlen $\varrho, \sigma, \tau, \lambda_A, \lambda_a, \pi_A, \pi_a$ werden vom Verfasser im letzten Teile seiner Abhandlung bestimmt und sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

		ϱ	σ	τ	π_A	π_a	λ_A	λ_a
I Gruppe	(4, 0, 1, 0)	0	0	12	4	0	0	0
II „	(3, 1, 1, 0)	1	0	0	1	1	1	1
III „	(2, 2, 1, 0)	0	0	0	0	0	0	0
IV „	(3, 0, 4, 0)	0	0	6	4	6	0	0
	(3, 0, 3, 1)	0	3	15	6	3	0	1
	(3, 0, 2, 2)	1	6	6	3	1	1	3
V „	(2, 1, 4, 0)	0	0	2	2	4	0	0
	(2, 1, 3, 1)	3	3	1	4	5	0	3
	(2, 1, 2, 2)	5	2	2	5	3	3	5
VI „	(2, 0, 7, 0)	0	0	2	4	10	0	0
	(2, 0, 6, 1)	0	0	18	10	12	0	0
	(2, 0, 5, 2)	0	0	26	12	10	0	0
	(2, 0, 4, 3)	0	12	26	10	4	4	0

		ϱ	σ	τ	π_A	π_a	λ_A	λ_a
VII Gr.	(1, 1, 7, 0)	0	0	6	4	6	0	0
	(1, 1, 6, 1)	0	0	6	6	12	0	0
	(1, 1, 5, 2)	0	0	24	12	12	0	0
	(1, 1, 4, 3)	0	18	30	12	6	6	0
VIII „	(1, 0, 10, 0)	0	0	0	4	12	0	0
	(1, 0, 9, 1)	0	0	12	12	24	0	0
	(1, 0, 8, 2)	0	0	40	24	32	0	0
	(1, 0, 7, 3)	0	0	70	32	26	0	0
	(1, 0, 6, 4)	0	0	68	26	10	0	0
	(1, 0, 5, 5)	0	30	30	10	0	10	0
IX „	(0, 0, 13, 0)	0	0	0	4	12	0	0
	(0, 0, 12, 1)	0	0	0	12	36	0	0
	(0, 0, 11, 2)	0	0	40	36	68	0	0
	(0, 0, 10, 3)	0	0	120	68	84	0	0
	(0, 0, 9, 4)	0	0	192	84	60	0	0
	(0, 0, 8, 5)	0	0	160	60	20	0	0
	(0, 0, 7, 6)	0	0	60	20	0	0	0.

La. (Lp.)

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Lehrbücher, Coordinaten.

L. Bianchi. Lezioni di geometria differenziale fatte nella Università di Pisa nell' anno 1885-86. Pisa. Nistri.

Wir machen die Leser des Jahrbuchs auf diese Vorlesungen über die infinitesimale Geometrie aufmerksam, welche jüngst autographirt worden sind. Nach unserer Meinung füllen sie eine bedauerliche Lücke in der mathematischen Literatur aus; denn wenngleich die Zahl der Werke, in denen die projectivische Geometrie vollständig dargestellt wird, ziemlich gross ist, so kannten wir kein Buch, welches die infinitesimale Geometrie ex professo behandelt. Wer diesen so interessanten Zweig der Mathematik kennen lernen wollte, sah sich genötigt, die Originalquellen zu Rate zu ziehen. Jetzt findet man in dem Buche des Herrn Bianchi einen sicheren Führer, der bis in die entlegensten Teile der Wissenschaft geleitet. In diesen beachtungswürdigen Vorlesungen hat man nicht nur die Klarheit der Darstellung, die Eleganz der Rechnung, die grosse Zahl interessanter Beispiele zu bewundern, sondern auch die Auswahl und die Gliederung des Stoffes. Damit die Leser sich selber von der Richtigkeit dieses Urteils überzeugen können, wollen wir die Capitelüberschriften des Werkes von Herrn Bianchi hersetzen.

I. Raumcurven. II. Krummlinige Coordinaten auf den Oberflächen. Conforme Abbildung. III. Geodätische Linien. Geodätische Krümmung. IV. Krümmung der Oberflächen. V. Von den durch ihr Linienelement definirten Oberflächen. VI. Von den abwickelbaren Oberflächen. VII. Von den Oberflächen, bei denen die Krümmungshalbmesser gegebene Functionen von einander sind. VIII. Von den Oberflächen constanter Krümmung. 1ter Teil. Pseudosphärische Geometrie. 2ter Teil. Transformation der Oberflächen constanter Krümmung. IX. Von den Oberflächen, deren mittlere Krümmung gleich Null oder gleich einer Constanten ist. X. Von den durch Eigenschaften ihrer Krümmungslinien definirten Oberflächen. XI. Von den Regelflächen. XII. Krummlinige Coordinaten im Raume. Dreifach orthogonale Flächensysteme. XIII. Elliptische Coordinaten. Geodätische Linien des Ellipsoids. XIV. Von den dreifach orthogonalen Weingarten'schen Systemen. Anhang. Codazzi'sche Formeln. La. (Lp.)

Percival Frost. Solid geometry. Third edition. London. Macmillan and Co. XXIII. u. 408 S.

Die zweite Ausgabe dieses Buches war eine neue, von Herrn Frost besorgte Auflage des Lehrbuchs von Frost und Wolstenholme, und in der Vorrede zu jener Auflage, von welcher der Band I veröffentlicht wurde, fand sich die Absicht ausgesprochen, dass das Ganze zwei Bände umfassen sollte; der erste enthielt solche Teile des Gegenstandes, die für physikalische Anwendungen die nützlichsten waren; der zweite sollte diejenigen Teile geben, die vornehmlich ein geometrisches Interesse haben. Die Absicht, eine zweibändige Ausgabe zu veröffentlichen, scheint indessen aufgegeben zu sein, da diese dritte Auflage an sich vollständig ist und mehrere neue Capitel enthält, welche ihre geeignete Stelle in dem geplanten zweiten Bande gefunden haben würden. Infolge des Gebrauches der „solidus"-Bezeichnung für Brüche und der Anwendung kleinerer Typen beim Drucke mancher Artikel überschreitet der Umfang des jetzi

den des früheren nicht. Das Buch hat mit Recht einen solchen festen Platz in der Zuneigung englischer Studirender erhalten, dass die Erwähnung genügen wird, dass fast jedes Capitel Vermehrungen erhalten hat und dass die neuen Capitel behandeln: reciproke Polaren, Scharen von Konikoiden und auf ein Tetraeder bezogene Konikoide, geodätische Linien, krummlinige Coordinaten, auf Oberflächen beschriebene Curven, Verbiegung unausdehnbarer Oberflächen, Functional-Gleichungen und Differentialgleichungen von Oberflächen, Hüllflächen, die allgemeine Theorie der Polaren und Tangenten. Es wird bemerkt werden, dass der Name Konikoid für den Ort der allgemeinen Gleichung zweiten Grades beibehalten ist. Ferner soll hinzugefügt werden, dass die Beispiele zu jedem Capitel zahlreich und wohl geordnet sind und dem Buche ein besonders charakteristisches Aussehen geben.

Gbs. (Lp.)

C. Prediger. Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Clausthal. Brauns. XIV. u. 358 S.

R. Geigenmüller. Elemente der höheren Mathematik, zugleich als Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der algebraischen Analysis, analytischen Geometrie, Differential- und Integralrechnung. Für technische Lehranstalten und zum Selbststudium. Mittweida. R. Schulze. 102 S.

Es ist dies der zweite Teil des im Titel genannten Werkes (S. S. 192 dieses Bandes) unter dem besonderen Titel: Analytische Geometrie der Ebene mit besonderer Berücksichtigung der Kegelschnitte. Zweite, neu bearbeitete und vermehrte Auflage, mit zwei Figurentafeln. Der Gang dieses Buches ist nicht verschieden von demjenigen in vielen andern Büchern desselben Inhaltes, aber das vorliegende Buch zeichnet sich durch vielfach eingestreute, passend gewählte Beispiele und Uebungsaufgaben aus. An die Darlegung der elementarsten Sätze von den Kegel-

schnitten knüpft sich die Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen x und y. Am Schlusse folgen dann noch einige algebraische Linien höherer Ordnung, ferner einige transcendente Curven und die Cykloiden. Mz.

DESCARTES. Géométrie. (Réimpression.) Paris.

E. G. MALCOR. Le calcul géométrique. Partie II. gr. 8°. 52 S.

G. A. WENTWORTH. Analytic geometry. Boston. 12mo. 247 S.

T. H. BAGLES. Constructive geometry of plane curves. With numerous examples. London. 8°. 390 S.

J. KOEHLER. Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure. Questions et solutions. I[re] Partie: Géométrie plane. II[me] Partie: Géométrie de l'espace. Paris. Gauthier-Villars. 1886, 1887.

Anzeige in Darboux Bull. (2) XII. 158. Lp.

P. J. HOLLMAN. Verzameling van vraagstukken op het gebied van de analytische meetkunde der ruimte. Alkmaar. H. Ooster & Zoon.

Eine recht zweckmässige Sammlung von Aufgaben über die analytische Geometrie des Raumes. Die Auflösung ist den meisten derselben beigegeben, die der übrigen bleibt dem Scharfsinne des Lesers überlassen. G.

A. MUKHOPÂDHYÂY. Solutions of some old questions. Ed. Times XLIV. 144-182, XLV. 146-168.

In einem Appendix (III) zum XLIV., (II) zum XLV. Bande der Ed. Times behandelt der Verfasser nach seiner Auffassung eine grosse Anzahl früher gestellter Aufgaben, die meistenteils der analytischen Geometrie angehören, aber auch aus anderen Gebieten entnommen sind. Lp.

M. Falk. Lärobok i plan analytisk geometri för elementarläroverken och högre läroanstalter. Stockholm. Lamm 1886.

Ein Lehrbuch der analytischen Geometrie für die höheren Lehranstalten berechnet. M. L.

K. Hattendorff. Einleitung in die analytische Geometrie. (3. Ausgabe.) Hannover. Schmorl. XII. 224 S.

G. Loria. Studi sulla teoria delle coordinate triangolari e sulla geometria analitica di un piano nello spazio. Batt. G. XXIV. 164-241.

Triangularcoordinaten eines Punktes P in der Ebene eines Fundamentaldreiecks Δ werden die drei Dreiecke zwischen P und je einer Seite von Δ genannt, bei solchen Vorzeichen, dass ihre Summe $= \Delta$ ist. Es werden die Fundamentalaufgaben für Punkte und Gerade, dann für Kegelschnitte in der Ebene behandelt, dann auf Aufgaben über Systeme von Punkten, Geraden und Kegelschnitten im Raume angewandt, dann die Untersuchung von Flächen zweiten Grades auf die ihrer ebenen Schnitte gegründet. H.

M. F. Dumont. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) V. 300-301.

Eine Prioritätssache. Herr Dumont hat entdeckt, dass das von Schwering und d'Ocagne gefundene, dem Cartesischen reci-

proke Coordinatensystem (S. F. d. M. XVI. 1884. 613 u. 614) schon von Chasles (Mém. sur le principe de dualité) erwähnt worden ist. Chasles' Antheil an der Sache beschränkt sich aber auf die Bemerkung, dass man im Coordinatentetraeder statt einer Ebene auch eine Ecke unendlich fern legen kann. Hiermit ist zwar der Kern der Sache getroffen, aber das Verdienst der beiden Autoren, welche das noch völlig unbearbeitete Gebiet dieser Coordinaten selbständig aufgefunden und in mannigfachster Weise sachgemäss verwertet haben, natürlich nicht im mindesten geschmälert. Schg.

C. Reuschle. Logische Einführung der Liniencoordinaten in der Ebene. Schlömilch Z XXXI. 371-374.

Clebsch hatte die Wahl der negativen reciproken Werte der Axenabschnitte als Coordinaten der Geraden die zweckmässigste genannt. Der Verfasser ist mit diesem Motiv der Einführung nicht zufrieden und kommt durch Ueberlegungen zu derselben Bestimmung. H.

W. Story. A new method in analytic geometry. Newcomb Am. J. IX. 38-44.

Ist α verbunden mit k andern Grössen $x, y, z, \ldots$ durch eine Gleichung $f(\alpha, x, y, z, \ldots) = 0$, wo f rationales Polynom in diesen Grössen, welches sicher α, möglicherweise auch $x, y, z, \ldots$ enthält, sind ferner $x, y, z, \ldots$ unter sich verbunden durch $k-1$ Hülfsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$ und können die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$ für einen bestimmten Wert von α durch keine reellen noch imaginären $x, y, z \ldots$ erfüllt werden, so sind die aus $f = 0$ hervorgehenden Werte von α constant für alle den Hülfsgleichungen entsprechenden $x, y, z, \ldots$ Auf dieses Theorem, findet der Verfasser, lassen sich die Beweise zahlreicher geometrischer Sätze stützen, deren sechs hier ausgeführt sind. H.

E. Cesaro. Sur l'emploi des coordonnées intrinsèques.
Nouv. Ann. (3) V. 127-142.

Der Bogen s, der Krümmungs- und der Torsionsradius ϱ und r bestimmen durch ihre Abhängigkeit die Natur einer Curve unabhängig von deren Lage. Sie heissen hier innere Coordinaten, ihre Relationen innere. Das wesentlich Neue der gegenwärtigen Arbeit besteht darin, dass sie zur Untersuchung äusserer Beziehungen angewandt werden. Sind die Tangente, Binormale, Hauptnormale für einen Curvenpunkt M Axen der x, y, z, so sind die Variationen der Coordinaten x, y, z eines äussern Punktes und die der Richtungscosinus λ, μ, ν einer äussern Geraden in Bezug auf die x, y, z:

$$\delta x = dx - \frac{z-\varrho}{\varrho}ds, \quad \delta y = dy - \frac{z}{r}ds, \quad \delta z = dz + \left(\frac{x}{\varrho} + \frac{y}{r}\right)ds;$$

$$\delta\lambda = d\lambda - \frac{\nu}{\varrho}ds, \quad \delta\mu = d\mu - \frac{\nu}{r}ds, \quad \delta\nu = d\nu + \left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{r}\right)ds.$$

Null gesetzt, ergeben sie die Bedingungen eines festen Punktes und einer parallel bewegten Geraden. Es werden ferner gefunden die Bedingungen einer festen Ebene, die Bedingungen, unter denen eine Linie auf gegebener Fläche, namentlich auf einer Kugelfläche liegt, ferner die Gratlinie der „Polarfläche" der Curve, die einzigen „Heliken" auf einer Kugelfläche, die Linien, deren Normalebenen durch einen festen Punkt gehen, der Uebergang zu den innern Coordinaten, die sphärischen Evolventen, die einzigen sphärischen Linien als geodätische auf abwickelbaren Helikoiden, die Loxodromen. H.

P. H. Schoute. Ein Raumcoordinatensystem der Kreise in der Ebene. Wien. Ber. XCIV. 786-793.

Sind ABC das Coordinatendreieck, x, y, z die Abstände des Punktes P von dessen Seiten, so werden der dem ABC umgeschriebene Kreis U und die unendlich entfernte Gerade G bezw. durch die Gleichungen gegeben:

$$yz\sin A + zx\sin B + xy\sin C = 0,$$
$$x\sin A + y\sin B + z\sin C = 0.$$

Eliminirt man nach einander jede der drei Coordinaten x, y, z aus beiden, so erhält man:

$$a_1^2 \equiv y^2 + z^2 + 2yz\cos A = 0,$$

analog b_1^2, c_1^2, wo a_1, b_1, c_1 die Seiten des von den Projectionen des Punktes P auf die Seiten von ABC als Eckpunkten bestimmten Fusspunktdreiecks von P bedeuten. Also geben diese drei Gleichungen die als Punktkreise betrachteten Eckpunkte des Dreiecks ABC an. Damit ist die Bedeutung von

$$\lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$$

gegeben als die Gleichung eines bestimmten Kreises des Netzes, das U zum Orthogonalkreise hat. Daher gilt der Satz: Jeder Kreis der Ebene hat eine Gleichung, die in die Gestalt

$$U + \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 + \nu c_1^2 = 0$$

gebracht werden kann. Oder: Der Ort der Punkte P, für welche der Inhalt und die Seitenquadrate des Fusspunktdreiecks einer bestimmten linearen Gleichung genügen, ist ein Kreis. Es werden nun λ, μ, ν die cyklischen Coordinaten des Kreises genannt und die Beziehungen untersucht, in welchen zwei Punkte des Raumes mit orthogonalen Coordinaten λ, μ, ν zu einander stehen, wenn die zwei Kreise, deren Bildpunkte sie sind, sich rechtwinklig schneiden. H.

DE SALVERT. Mémoire sur l'emploi des coordonnées curvilignes dans les problèmes de mécanique et les lignes géodésiques des surfaces isothermes. Brux. S. sc. X. B. 293-408.

Erster und zweiter Teil einer Abhandlung, von welcher der dritte im folgenden Bande erscheinen soll. Mn. (Lp.)

L. AUTONNE. Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona. Deuxième mémoire: Groupes cubiques. Jordan J. (4) II. 49-104.

In einer früheren Arbeit (Jordan J. (4) I, F. d. M. 1885. 792) hat der Verfasser die Theorie der Gruppen endlicher Ordnung,

welche in der quadratischen Cremona'schen Gruppe enthalten sind, vollständig dargestellt. In der vorliegenden Arbeit werden die endlichen Gruppen, welche in der kubischen Gruppe enthalten sind, untersucht. Diese Gruppe wird ausschliesslich von linearen, quadratischen und kubischen Substitutionen gebildet. Es sei

$$S = | z_i \; \varphi_i(z_1, z_2, z_3) | \qquad (i = 1, 2, 3)$$

eine kubische Substitution, dann hat die allgemeine Curve des Netzes

$$\varphi = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + u_3 \varphi_3 \qquad (u_i = \text{const.})$$

einen von den u_i unabhängigen festen Doppelpunkt ω und vier gleichfalls feste einfache Punkte. ω und diese letzten vier Punkte sind die Fundamentalpunkte von S.

Der Verfasser beschränkt sich hier darauf, solche kubischen Gruppen zu bestimmen, bei welchen erstens keine Substitution der Gruppe zwei unendlich nahe Fundamentalpunkte hat und zweitens der Punkt ω derselbe für alle kubischen Substitutionen der Gruppe ist.

Es wird zunächst in dem ersten Teile das wichtige Theorem bewiesen: „Eine kubische Gruppe G endlicher Ordnung ist isomorph einer linearen Gruppe Σ endlicher Ordnung für zwei homogene Variabeln." Σ heisst die Directionsgruppe (Groupe directeur) von G. Diejenige Gruppe Γ, welche in G enthalten ist und der Einheitssubstitution von Σ entspricht, heisst die Normalgruppe von G.

Der zweite Teil der Arbeit enthält die vollständige Theorie der Normalgruppen. Es giebt deren sieben verschiedene Typen, welche alle aufgestellt werden.

In dem dritten Teile wird nach der Natur der Directionsgruppe Σ gefragt, wenn Γ der Reihe nach den sieben vorher bestimmten Typen angehört, und es werden die von Herrn Jordan (Kronecker J. LXXXIV) aufgezählten linearen Gruppen endlicher Ordnung den Typen der Normalgruppe zugeteilt.

In dem vierten Teile werden besondere Fälle, die „normolinearen" Gruppen behandelt. Eine solche Gruppe G geht hervor aus der Zusammenstellung einer Normalgruppe Γ mit einer

linearen Gruppe L dreier homogenen Variabeln. Solcher normolinearen Gruppen giebt es ebenfalls sieben Typen.

Um das Studium der kubischen Gruppen endlicher Ordnung abzuschliessen, würde es nötig sein auch zu untersuchen, wie die vorhergehenden Betrachtungen sich modificiren, erstens, wenn zwei der Fundamentalpunkte einer Substitution unendlich nahe rücken, und zweitens, wenn der Punkt ω nicht für alle Substitutionen der Gruppe der nämliche ist. W. St.

J. Brill. On the application of the theory of complex quantities to plane geometry. Mess. XVI. 8-20.

Der Verfasser greift algebraische Identitäten heraus und deutet sie geometrisch, indem er annimmt, dass alle Buchstaben complexe Grössen bedeuten. Indem er z. B. die Identität $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0$ nach dieser Art deutet, erhält er den geometrischen Satz, dass für ein Dreieck ABC und einen Punkt O im Innern desselben

$$\frac{OA.BC}{\sin(BOC-BAC)}=\frac{OB.CA}{\sin(COA-CBA)}=\frac{OC.AB}{\sin(AOB-ACB)}$$

ist. Ebenso giebt die Identität:

$$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)$$

die Beziehung:

$$OA.BC^2.\cos(C-B+POA)+OB.CA^2.\cos(A-C+POB)$$
$$+OC.AB^2.\cos(B-A+POC)=3.BC.CA.AB.OP.$$

Eine Anzahl solcher Deutungen wird mitgeteilt. Glr. (Lp.)

E. R. Neovius. Einige Bemerkungen über di[illegible]tellung von Punkten, deren beide cartesische C[illegible] imaginär sind. Helsingf. Vetensk. soc. Öfv. XXIX[illegible]

Sind x und y reelle Zahlen, so fällt der durc[illegible] winkligen Coordinaten (x, y) bestimmte Punkt mit de[illegible] der complexen Zahl $x+iy$ zusammen. Setzt man nun [illegible] fest, dass unter einem Punkt (x, y), dessen Coordinaten [illegible]

imaginär sind, der Träger der complexen Zahl $x+iy$ verstanden werden soll, so ist demgemäss der imaginäre Punkt $(a+ib, c+id)$ durch den reellen Punkt $(a-d, b+c)$ erklärt. „Die so gewonnene Darstellung von Punkten, deren Coordinaten imaginär sind, erhält bei der Lösung von Aufgaben ein besonderes Interesse dadurch, dass in vielen Fällen, in welchen die Lösung auf imaginäre Punkte führt, die geometrischen Repräsentanten dieser Punkte eine besondere Bedeutung für die betrachtete geometrische Figur erhalten, wodurch in manchen Fällen die vollständige Lösung der vorgelegten Aufgabe auch vereinfacht werden kann." Es wird dies an einigen Beispielen erläutert. M—n.

H. Grassmann. Anwendung der Ausdehnungslehre auf die allgemeine Theorie der Raumcurven und krummen Flächen. I. Raumcurven. Pr. Halle a. S.

Der Verfasser begründet in dieser Abhandlung die Theorie der Raumcurven lediglich mit den Mitteln der Streckenrechnung. Der erste, vorbereitende Abschnitt stellt die aus der „Ausdehnungslehre" bekannten Principien dieser Rechnung zusammen und behandelt namentlich die geometrische Addition, die äussere und innere Multiplication der Strecken und die Differentialquotienten des äusseren und des inneren Productes. Im zweiten Abschnitt wird ein veränderlicher Curvenpunkt P durch seinen Abstand x von einem festen Punkte O bestimmt, und x als Function des Bogens $s = AP$ dargestellt, wo A ein fester Punkt der Curve ist. Diese Grundlagen reichen aus, um Tangente und Normale, Schmiegungsebene und Contingenzwinkel, sowie die als Strecke erscheinende erste Krümmung einer Raumcurve in einfachster Weise und lediglich als Function von s darzustellen. Etwas complicirter werden die Gleichungen, wenn statt des Bogens s eine beliebige Grösse t als unabhängige Variable zu Grunde gelegt wird. Nachdem im dritten Abschnitt die innere Multiplication von Strecken auf Flächenräume ausgedehnt und der Begriff des äusseren Productes von vier Strecken erörtert worden ist, folgt im vierten Abschnitte eine noch weiter verein-

fachte Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes und darauf die Theorie der zweiten Krümmung und der Schmiegungskugel in analoger und zu ebenso einfachen Resultaten führender Darstellung. Schg.

F. Aschieri. Sullo spazio delle sfere Euclidee. Lomb. Rend. (2) XIX. 355-361, 416-424, 449-458.

Die Gesamtheit der Kugeln des euklidischen Raumes kann als eine ebene vierdimensionale Mannigfaltigkeit (S_4) betrachtet werden, insofern jede dieser Kugeln durch vier Variable, nämlich die drei Coordinaten und die Potenz ihres Mittelpunktes, bestimmt ist. Demnach lässt sich auch die euklidische Kugel als Raumelement des ebenen vierdimensionalen Raumes betrachten und als solches mit den Mitteln der analytischen Geometrie untersuchen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Eine lineare Gleichung zwischen den oben erwähnten vier Variablen stellt eine dreifach unendliche „Kugelgruppe" (X_r) dar, zwei solche Gruppen (X_1, X_2) haben ein (zweifach unendliches) „Kugelnetz" ($X_1 X_2$) gemeinsam, ebenso eine Gruppe (X_3) mit einem Netze ($X_1 X_2$) einen (einfach unendlichen) „Kugelbüschel" ($X_1 X_2 X_3$), endlich eine Gruppe (X_4) mit einem Büschel ($X_1 X_2 X_3$) eine einfache Kugel ($X_1 X_2 X_3 X_4$). Punkte und Ebenen, als Ausartungen der Kugel, sind gleichfalls als Elemente zu betrachten. Die aus Ebenen bestehende Gruppe (G) bildet den unendlich fernen Raum des vierdimensionalen Raumes S_4. Jede Gruppe hat einen Mittelpunkt, jedes Netz eine Mittellinie, jeder Büschel eine Mittelebene. Parallel werden zwei solche Gebilde genannt, wenn ihre Mittelelemente zusammenfallen, resp. das Mittelelement des einen in dem des anderen liegt. Die Bedingungen der Parallelität werden dann in den einzelnen Fällen analytisch ausgedrückt. Durch Nullsetzung der einzelnen vier Variablen entstehen vier „Fundamentalgruppen", zu denen die Gruppe G als fünfte hinzukommt, und aus denen wieder 10 entsprechende Netze, 10 Büschel und 5 Kugeln hervorgehen. Alle zusammen können als ein homogenes Coordinatensystem

betrachtet werden, in welchem z. B. ein Büschel durch die Gruppen bestimmt ist, die er mit den 10 Fundamentalbüscheln bildet. Es folgen dann weiter Untersuchungen über projectivische, reciproke und orthogonale Gebilde in dem betrachteten Kugelraume, über sphärische Complexe und Winkel zwischen Gruppen, Netzen und Büscheln. Schg.

F. Aschieri. Sopra gli spazi composti di spazi lineari di uno spazio lineare di quarta spezie. Lomb. Rend. (2) XIX. 614-619, 698-703.

Fortsetzung der vorigen Arbeit. Es werden zunächst die Bedingungen festgestellt, unter welchen entweder zwei Kugelbüschel ein gemeinsames Element haben, d. h. demselben Netze angehören, oder zwei Kugelnetze einen gemeinsamen Büschel haben, d. h. derselben Gruppe angehören. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den 10 Coordinaten eines Büschels oder Netzes ist der Ausdruck eines algebraischen fünfdimensionalen Systems von Büscheln oder Netzen. Diese Systeme hängen, wie im einzelnen dargethan wird, mit den Plücker'schen Complexen zusammen. Vier solcher Systeme haben eine zweifach unendliche Schar von Büscheln gemeinsam. Diese bilden einen dreidimensionalen Raum, der eine Regelfläche des zu Grunde liegenden vierdimensionalen Gebietes darstellt. Fünf Systeme haben eine einfach unendliche Schar von Büscheln gemeinsam, die zusammen eine zweidimensionale Regelfläche bilden. Hieran schliessen sich Untersuchungen über die eindimensionalen Erzeugenden dieser Regelgebilde und über Berührungen zwischen den letzteren.

Schg.

A. Buchheim. On the theory of screws in elliptic space. Lond. M. S. Proc. XVII. 240-254.

Fortsetzung früherer Arbeiten des Verfassers über denselben Gegenstand (S. F. d. M. XVI. 1884. 465). Die dort zuletzt gegebenen Formeln über unendlich kleine Bewegungen innerhalb

eines beliebig gekrümmten dreidimensionalen Raumes werden hier auf endliche Bewegungen ausgedehnt. In dem ersten, mit den Methoden der Ausdehnungslehre geführten Teile der Untersuchung werden Formeln über Strecken und Winkel abgeleitet, um welche Punkte, Ebenen und Linien gedreht werden. Im zweiten Teile wird gezeigt, wie jede derartige Drehung durch eine Biquaternion darstellbar ist, wobei auch auf zusammengesetzte Bewegungen eingegangen wird. Schg.

J. Kraus. Die geometrische Deutung von Invarianten, welche bei ebenen Collineationen auftreten. Diss. Giessen. 22 S. 4°.

O. Mey. Ueber die Darstellung binärer Formen auf den Normcurven. Diss. Königsberg. 40 S. 8°.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

C. Reuschle. Praxis der Curvendiscussion. I T. Curvendiscussion in Punktcoordinaten mit einem Anhang über analytisch-geometrische Principien. Stuttgart. Metzler. VII u. 159 S.

E. W. Symons. Analytic investigation of formulae for radii of curvature etc. Ed. Times. XLV. 25.

Es sei $x\cos\omega + y\sin\omega - p = 0$ die Gleichung der Tangente

in irgend einem Punkte einer gegebenen Curve. Man betrachte p als Function von ω und differentiire die Gleichung nach ω, so folgt $-x\sin\omega + y\cos\omega - \frac{dp}{d\omega} = 0$, die Gleichung der Normale der Curve in dem betrachteten Punkte, also $\frac{dp}{d\omega}$ das Lot vom Nullpunkte auf die Normale. Durch solche und ähnliche Schlüsse gelangt der Verfasser u. a. zu dem Ausdrucke

$$\varrho = p + \frac{d^2p}{d\omega^2} = r\frac{dr}{dp}$$

für den Krümmungsradius, der sich jedoch schon bei Frenet (Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal, § XIII, No. 272) findet. Lp.

E. Cesaro. Sur les lignes de poursuite. Nouv. Ann. (3) V. 65-83.

Bei den graphischen Constructionen der Gewölbe, speciell bei der Darstellung der Gewölbespannungen kommt man auf die Betrachtung gewisser Linien, deren Beziehungen hier ganz allgemein untersucht werden. Denkt man sich eine Linie so mit Masse belegt, dass die Masse des Bogenelementes ds gleich qds ist, und nennt man M_0 den Schwerpunkt des Bogens AM, der von einem festen Curvenpunkt A bis zum veränderlichen M reicht, so ist der Ort des Punktes M_0 eine gewisse Curve, und es handelt sich darum, die Beziehungen zwischen den Curven (M) und (M_0) zu erforschen. Der Herr Verfasser beschränkt sich auf den Fall, dass (M), also auch (M_0) eine ebene Curve sei, wiewohl sich die Betrachtung auch auf den Raum ausdehnen liesse.

Man erkennt sogleich, dass die Curve (M_0) die Gerade M_0M zur Tangente hat, und dass zwischen den entsprechenden Bogenelementen die Relation besteht

$$(1) \qquad \frac{ds_0}{ds} = \frac{qr}{Q} = K,$$

wo $r = M_0M$ und $Q = \int qds$ die Masse des ganzen Bogens AM ist.

Die Curve (M_0) kann demnach auch aufgefasst werden als „Verfolgungscurve“, wobei die Geschwindigkeiten des verfolgenden Punktes M_0 und des verfolgten M das Verhältnis K haben. Umgekehrt kann auf diese Weise jede Verfolgungscurve erhalten werden, wenn man die Massenverteilung der obigen Gleichung gemäss wählt, die man als Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dQ}{Q\,ds} = \frac{K}{r}$$

schreiben kann. Als Grundlage für die Untersuchungen entwickelt nun der Herr Verfasser folgende Relationen, in denen ϑ den Winkel bedeutet, welchen zwei entsprechende Elemente mit einander bilden, ϱ und ϱ_0 die Krümmungsradien, ε und ε_0 die Contingenzwinkel, so dass $\varepsilon - \varepsilon_0 = d\vartheta$ ist,

$$\frac{ds}{\varepsilon_0} = \frac{r}{\sin(\vartheta - \varepsilon_0)} = \frac{r + dr + ds}{\sin\vartheta}, \tag{2}$$

$$\varrho_0 = \frac{Kr}{\sin\vartheta}, \quad \frac{d(r + s_0)}{ds} = \cos\vartheta, \tag{3}$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho} - \frac{K}{\varrho_0}, \tag{4}$$

$$\cos\vartheta = 2K + Q\frac{d}{ds}\frac{K}{q}. \tag{5}$$

In den Fällen, wo statt einer eigentlichen Verfolgungscurve eine „Fliehcurve“ auftritt, ist in diesen Formeln ds_0 und K durch $-ds_0$ und $-K$ zu ersetzen. Diese allgemeinen Formeln werden nun auf gewisse speciellere Fälle angewandt. Setzt man zunächst $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so wird (M_0) die Evolute von (M). Setzt man ϑ mit einem beliebigen anderen Werte constant, so erhält man die sogenannten Developpoiden, welche von Lancret zuerst untersucht sind. Ueber diese werden nun eingehende Betrachtungen angestellt, welche teils auf bereits bekannte Eigenschaften zurückführen, teils neue Resultate ergeben.

Die Betrachtung der Developpoiden führt dann noch zu der der Rückkehrcurven (courbes de rebroussement). Diese Curven scheiden diejenigen Teile der Ebene, in welcher die Developpoiden Verfolgungscurven sind, von denjenigen, in welchen sie Flieh-

curven sind. Diese Betrachtungen werden auf eine Anzahl specieller Curven angewandt. Zum Schluss wirft der Herr Verfasser die Frage auf, ob nach dem Princip der Dualität die hier untersuchten Beziehungen eine Analogie haben. Dies ist natürlich nicht ohne weiteres der Fall, weil es sich nicht nur um projectivische, sondern auch um metrische Beziehungen handelt. Der Verfasser behält sich aber über diesen Punkt eingehendere Untersuchungen vor. A.

C. Nies. Untersuchungen über Curven, deren Bogen einer Potenz der Abscisse proportional ist. Pr. Realgymn. Darmstadt. 4°. 25 S.

Die hier behandelten Curven sind durch die Gleichung $s = ax^{\mu}$ definirt, worin s die Bogenlänge, x die Abscisse, a einen Proportionalitätsfactor, μ eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Nur der kleinere Teil der vom Verfasser gegebenen Resultate ist von Wert, Ref. denkt auf diese nicht uninteressanten Curven demnächst ausführlich zurückzukommen. (Pr. Kgl. Realgymn. Berlin 1889.)

R. M.

A. Bassani. Curve piane derivate. Batt. G. XXIV. 371-375.

Von einer ebenen Curve wird eine andere dadurch abgeleitet, dass in den Punkten M, M', ... der ersteren (c) die Tangenten construirt werden und auf jeder Tangente vom Berührungspunkte aus eine Strecke l abgetragen wird, die eine stetige Function des Contingenzwinkels ist. Die Endpunkte M_1, M'_1, ... dieser Strecken bilden dann die abgeleitete Curve (c_1). Insbesondere wird der Fall betrachtet, in welchem die Strecke l der jedesmalige Krümmungsradius der Curve (c) in M ist. Es werden nun verschiedene Sätze über die Normalen beider Curven, über den Krümmungsradius der abgeleiteten Curve, über dessen Construction, und über das Bogendifferential der abgeleiteten

Curve gegeben. Auch werden noch weitere dahin gehörende Sätze und Aufgaben behandelt. Mz.

G. Pirondini. Note géométrique. Nouv. Ann. (3) V. 460-480.

Der Herr Verfasser betrachtet eine ebene Curve h und deren Evolute h_1, hierauf wieder die Evolute von h_1, die mit h_2 bezeichnet wird, u. s. f. Ferner nennt er s, s_1, s_2, ... die Bogen; $d\varepsilon$, $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$, ... die Contingenzwinkel; ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ... die Krümmungsradien. Da nun $ds_1 = d\varrho$, $ds_2 = d\varrho_1$, $ds_3 = d\varrho_2$, ... und $d\varepsilon = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 = \dots$, so hat man auch

$$\varrho_1 = \varrho \frac{d\varrho}{ds}, \quad \varrho_2 = \varrho \frac{d\varrho_1}{ds}, \quad \varrho_3 = \varrho \frac{d\varrho_2}{ds}, \dots$$

Es wird nun unter Zugrundelegung der Beziehung $\varrho = \varphi(s)$ die Frage behandelt, welche Bedingung notwendig und hinreichend ist, damit h und eine der übrigen Curven h_1, ... identisch sind; und es werden hierbei bestimmte Formen von $\varphi(s)$ und gewisse Curven, unter andern die logarithmische Spirale und die Cykloide aufgefunden. Weiterhin werden auch sphärische Curven in ähnlicher Weise behandelt. Mz.

W. J. C. Miller, A. H. Curtis, J. Neuberg. Solution of question 8110. Ed. Times. XLIV. 36-37.

Wenn die Fusspunktencurve irgend eines geschlossenen Ovals mit dem Inhalte A bezüglich eines inneren Punktes gebildet ist, und wenn durch jeden Punkt der Fusspunktencurve eine Gerade gezogen wird, welche den Winkel α mit dem Radiusvector nach dem Punkte einschliesst, so wird der Inhalt A' der durch diese Linien umhüllten Curve durch die Gleichung $A' = A . \sin^2\alpha$ gegeben. Lp.

M. Jenkins. A proof of Holditch's theorem. Mess. XVI. 110-111.

Beweis des Satzes, dass, wenn CC' eine gegebene Strecke

ist, die sich mit ihren Endpunkten auf zwei festen geschlossenen Curven bewegt, P ein gegebener Punkt auf der Strecke, der sie in die Teile $CP = c$, $PC' = c'$ teilt, und wenn (C), (P), (C') die Flächeninhalte der bei einer vollen Umdrehung durch C, P und C' beschriebenen Curven bezeichnen, die Relation stattfindet:

$$c'(C)+c(C') = (c+c')(P)+\pi cc'(c+c').$$

Glr. (Lp.)

Ol. Olsson. Några geometriska satzer. Zeuthen T. (5) IV. 120-128.

Beweise der folgenden Sätze und anderer ähnlicher Art: 1) Vollzieht man mit einem ebenen convexen Polygon eine ganze Umdrehung, so dass die Seiten geschlossene Curven ohne singuläre Punkte umhüllen und dass ein gegebener fester Punkt immer innerhalb desselben bleibt, bezeichnet man ferner die Polygonseiten durch l_1, l_2, ..., l_n und die Längen der Curven durch L_1, L_2, ..., L_n, so wird $\Sigma lL = 4\pi\Delta$, wo Δ den Flächeninhalt des Polygons bezeichnet.

2) Eine unveränderliche Gerade bewegt sich so, dass die Endpunkte derselben auf einer geschlossenen convexen Curve gleiten. Die Bogenlängen der beiden Enveloppencurven, welche von der gegebenen Geraden und einer anderen, mit derselben fest verbundenen, beschrieben werden, sind dann durch eine lineare Relation verbunden.

Gm.

E. Cesaro. Sur une condition définissant des familles de courbes. Mathesis VI. 33-34.

1) Sind P und Q Functionen des Bogens s, so haben diejenigen Curven, für welche

$$(\int Pdx)^2+(\int Pdy)^2 = Q^2$$

ist, als Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{PQ\sqrt{P^2-Q'^2}}{P(P^2-Q'^2)+Q(P'Q'-PQ'')},$$

worin die Ableitungen nach s genommen sind. 2) Die loga-

rithmischen Spiralen sind die einzigen Linien, für welche, wenn ein Punkt sie durchläuft, der Abstand desselben vom Schwerpunkte des durchlaufenen Weges proportional zur Länge dieses selben Weges wächst. Mn. (Lp.)

B. Theorie der algebraischen Curven.

R. DE PAOLIS. Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari. Rom. Acc. L. Mem. (4) III 265-280.

Die zu besprechende Arbeit besteht aus vier Paragraphen, von welchen die beiden ersten von Curven beliebiger Ordnung (oder Klasse) handeln, der dritte von den Curven zweiter Ordnung (oder Klasse), der vierte von den Curven dritter Ordnung (oder Klasse) Zur Kennzeichnung der geführten Untersuchungen wollen wir beim Berichte die Berührungspunkte derselben mit bekannten Arbeiten angeben.

Wir beginnen mit § 1. Eine Curve (Ort) C_n n^{ter} Ordnung, welche durch die Gleichung $\alpha_x^n = 0$ dargestellt wird, und eine Curve (Hüllcurve) Γ_n n^{ter} Klasse, welche durch die Gleichung $a_\xi^n = 0$ dargestellt wird, heissen „harmonisch“, wenn ihre simultane Invariante $(a\alpha)^n$ gleich Null ist; dann gehört C_n dem linearen Curvensystem n^{ter} Ordnung an, welches durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ unabhängige Tangenten von Γ_n, jede n Mal gerechnet, bestimmt wird, und umgekehrt. Bekanntlich gründet sich auf die Betrachtung der Invariante $(a\alpha)^n$ (der „Harmonicante“, armonizzante nach Hrn. Battaglini, der ihre Bedeutung in den Atti della R. Acc. di Napoli 1864, 67, 68 nachgewiesen hat) ein Princip zur Anordnung der algebraischen Formen, welches von Hrn. Rosanes erforscht worden ist (Borchardt J. LXXV u. LXXVI). Die Curve Γ_n der voranstehenden Definition kann in n Punkte zerfallen (Vgl. Battaglini l. c. 1868, Rosanes in Borchardt J. LXXXVII, Caporali in Rom. Acc. L. (3) I). Es giebt Gruppen von $n+1$ Punkten, von denen n beliebige eine zu einer gegebenen Curve

C_n harmonische Γ_n bilden. (Reye in Borchardt J. LXXII, Caporali l. c.).

Alle Curven $(n-m)^{\text{ter}}$ Klasse, welche mit einer Curve Γ_m (der Klasse $m < n$) $a_\xi^m = 0$ eine zur Curve C_n mit der Gleichung $\alpha_x^n = 0$ harmonische Curve Γ_n bilden, machen ein lineares System aus; der Ort der in m zusammenfallende Punkte zerfallenden Curven dieses Systems ist eine Curve P_{n-m} $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche „erste Polarcurve" von Γ_n in Bezug auf C_n heisst; ihre Gleichung ist $\alpha_a^m\, \alpha_x^{n-m} = 0$ (Clifford, Lond. M. S. Proc. II; Reye, Borchardt J. LXXII. u. LXXVIII). Ist $n-m > m$, so kann man mit Γ_m und P_{n-m} ebenso verfahren, wie es mit Γ_m und C_n geschehen ist. So gelangt man zu einer Curve P_{n-2m} von der $(n-2m)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche „zweite Polarcurve" von Γ_m in Bezug auf C_n heisst. Ist auch $n-2m > m$, so kann man in dieser Weise weiter gehen. Bezeichnet i das grösste in dem Bruche $\frac{n}{m}$ enthaltene Ganze, so kann man i „auf einander folgende Polarcurven" von Γ_m in Bezug auf C_n betrachten, welche für $m = 1$ in die gemeinen Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Ortscurve übergehen. Indessen kann es auch vorkommen, dass die Polare P_{n-m} von Γ_m in Bezug auf C_n unbestimmt wird; dann heissen Γ_m und C_n „apolar" (Reye, Borchardt J. LXXVII, LXXIX u. LXXXII). Ist $\frac{1}{2}m(m+3) \geqq \frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)+1$ oder $2m(n+3) \overline{\gtrless} (n+1)(n+2)$, so giebt es ein lineares System $\infty^{2m(n+3)-(n+1)(n+2)}$ Curven, die zu einer gegebenen Curve C_n apolar sind.

Der Ausgangspunkt für die im zweiten Paragraphen enthaltenen Untersuchungen ist die Aufgabe, das erste Glied der Gleichung einer Curve C_n durch die Summe der n^{ten} Potenzen von r linearen Formen auszudrücken. Zu diesem Behufe stellt der Verfasser fest: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das erste Glied der Gleichung C_n sich als lineare Function der ersten Glieder von $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$ $(r \overline{\lessgtr} \frac{1}{2}n(n+3))$ ausdrücken lässt, ist die, dass jede zu $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \ldots, C_n^{(r)}$ harmonische Curve Γ_n auch zu C_n harmonisch ist." Daraus zieht

er die Folgerung: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das erste Glied der Gleichung von C_n sich durch die Summe der n^{ten} Potenzen der ersten Glieder der Gleichungen von r Geraden ausdrücken lässt, ist die, dass jede diese Geraden berührende Γ_n zu C_n harmonisch ist.“ Alsdann bilden diese r Geraden ein harmonisches r-Seit in Bezug auf C_n. Diese Figur besitzt wichtige Eigenschaften, von denen wir einige angeben wollen.

Es sei ein harmonisches r-Seit und ein harmonisches s-Seit in Bezug auf C_n gegeben und

$$m < n, \quad r \leqq \tfrac{1}{2}m(m+3), \quad s \leqq \tfrac{1}{2}m(m+3),$$
$$r+s \leqq \tfrac{1}{2}m(m+3) + \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3) + 1,$$

so giebt es ein lineares System $\infty^{\frac{1}{2}m(m+3)+\frac{1}{2}(n-m)(n-m+3)+1-(r+s)}$ von Γ_m, die jedem der beiden Vielseite einbeschrieben sind. Ist $r \leqq \frac{1}{2}n(n+3)$, $s \leqq \frac{1}{2}n(n+3)$, so giebt es ein lineares System $\infty^{\frac{1}{2}n(n+3)+1-(r+s)}$ von Γ_n, die beiden Vielseiten einbeschrieben sind. Eine C_n hat $\infty^{n(n+3)-1}$ harmonische $\frac{1}{2}n(n+3)$-Seite, $\infty^{n(n+3)-4}(\frac{1}{2}n(n+3)-1)$-Seite, $\infty^{n(n+3)-7}(\frac{1}{2}n(n+3)-2)$-Seite. In Bezug auf eine solche Curve ist jedes $\frac{1}{2}m(m+1)$-Seit conjugirt, das von den Geraden gebildet wird, welche paarweise die Punkte jener oben besprochenen Gruppen von $n+1$ Punkten verbinden (Vgl. Rosanes, Borchardt J. LXXVI; Reye ibid. LXXXII).

Wenn die Curve C_n zweiter Ordnung ist, so verwandeln sich die allgemeinen oben angeführten Sätze auf bemerkenswerte Weise in eigenartige und geben meist bekannte nach Brianchon, Poncelet, Steiner u. s. w. benannte Theoreme, wie der Verfasser in § 3 nachweist. In § 4 stellt er eine ähnliche Untersuchung für die Curven dritter Ordnung an, wobei er besonders auf die Construction der harmonischen Vielseite eingeht. Unter den zahlreichen vom Verfasser gewonnenen Sätzen wollen wir bloss den folgenden hersetzen, dessen Analogie mit einem wohl bekannten Lehrsatze über die Kegelschnitte in die Augen springt: „Sind eine Curve dritter Ordnung und eine Curve dritter Klasse unter einander harmonisch, so giebt es ∞^1 dem ersten umbeschriebene und zum zweiten harmonische Fünfseite und ∞^1 dem zweiten einbeschriebene und zum ersten harmonische Fünfecke.“

La. (Lp.)

G. Maisano. Sulle curve k^{ma} Hessiana, k^{ma} Steineriana, k^{ma} Cayleyana. Palermo Rend. I. 66-68.

Bekanntlich kann man in Beziehung auf eine algebraische Curve mehrere Hesse'sche, Steiner'sche und Cayley'sche Curven betrachten. (Vgl. Salmon „Höhere ebene Curven", 1873. S. 429). Von diesen Curven sagt Hr. Maisano folgende Eigenschaften aus, von denen die beiden ersten die Verallgemeinerungen bekannter Eigenschaften sind.

I. Die $(n-k)^{ten}$ Polaren der Punkte der k^{ten} Hesse'schen Curve berühren in den entsprechenden Punkten die k^{te} Steiner'sche.

II. Die k^{ten} Polaren der Punkte der k^{ten} Steiner'schen Curve in Bezug auf die Grundcurve berühren uneigentlich die Hesse'sche in den entsprechenden Punkten.

III. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Undulationspunktes einer Curve ist die, dass die erste und die zweite Hesse'sche Curve sich auf der Curve selbst schneiden. La. (Lp.)

J. C. Malet. Geometrical theorems. Dublin Trans. XXVIII. 759-778.

Enthält Erweiterungen nebst neuen Beweisen in einigen Fällen von den Sätzen Newton's, Maclaurin's und Chasles' hinsichtlich der Durchmesser, Polaren und parallelen Tangenten ebener Curven beliebigen Grades. Der Aufsatz giebt auch Verallgemeinerungen auf Sätze für Oberflächen. Gbs. (Lp.)

M. d'Ocagne. Théorème sur les courbes algébriques et le cercle. Nouv. Ann. (3) V. 225-229.

Der Herr Verfasser beweist folgenden Satz: Der Schwerpunkt derjenigen Punkte, in denen irgend eine gegebene algebraische Curve von einem Kreise getroffen wird, ist ein unveränderlicher Punkt, so lange das Centrum des Kreises unverändert bleibt — wie auch der Radius variiren möge. (Vgl.

G. Humbert, „Application géométrique d'un théorème de Jacobi“, Jordan J. (4) I. 347-356; F. d. M. XVII. 1885. 684. Red.)

Dieses Theorem wird hierauf benutzt, um zwei andere herzuleiten, das eine mittels reciproker Polaren, und das andere mittels reciproker Radien vectoren. Endlich wird eine Anwendung von diesen Sätzen auf die Kegelschnitte, insbesondere auf den Krümmungskreis an Kegelschnitten gemacht. Mz.

C. Weltzien. Zur Theorie der Doppelpunkte und Doppeltangenten der ebenen rationalen Curven. Klein Ann. XXVI. 516-533.

Eine ebene rationale Curve n^{ter} Ordnung wird durch die Parameterdarstellung

$$x_1 : x_2 : x_3 = A(t) : B(t) : C(t)$$

gegeben.

Sie hat $(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte, deren Parametergleichung von Herrn Haase (Klein Ann. Bd. II) gegeben wurde. Sind t_1 und t_2 die Parameterwerte für denselben Doppelpunkt und wird $\sigma = t_1 + t_2$, $\tau = t_1 t_2$ gesetzt, so bestimmt der Verfasser für σ eine Gleichung vom Grade $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. τ ist dann rational durch σ ausdrückbar und die Doppelpunkte sind durch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Gleichungen von der Form: $T^2 - \sigma T + \tau = 0$ gegeben.

Für $n = 4, 5, 6$ werden diese Gleichungen für σ abgeleitet.

In analoger Weise wird die Gleichung der Parameter für die Berührungspunkte der Doppeltangenten behandelt. Die Lösung derselben wird zurückgeführt auf diejenigen einer Gleichung $2(n-3)(n-2)^{\text{ten}}$ Grades und $2(n-3)(n-2)$ quadratischer Gleichungen. W. St.

B. Guccia. Generalizzazione di un teorema di Nöther. Palermo Rend. I. 139-156.

Wenn ein lineares System ebener algebraischer Curven vom Geschlecht p mit k Parametern vorliegt, so werden sich je zwei

dieser Curven, ausser in gewissen festen Basispunkten noch in einer festen, charakteristischen Anzahl D von beweglichen Punkten treffen. Für $p = 0$, $D = 1$ nennen die italienischen Geometer ein solches System ein „homaloidisches". Man kann dann dem bekannten Nöther'schen Satze, demzufolge eine beliebige birationale (sog. Cremona-) Transformation zweier Ebenen durch eine endliche Anzahl von quadratischen Transformationen ersetzt werden kann, die Fassung geben:

„Mittels einer geeigneten quadratischen Transformation kann man immer ein homaloidisches Netz ($k = 2$) der Ordnung $n > 1$ in ein anderes von geringerer Ordnung überführen."

Der Verfasser löst die analoge Aufgabe für ein beliebiges k und D mit Hülfe von Methoden, die von Hrn. Bertini angegeben sind, über die in den früheren Jahrgängen dieser Zeitschrift berichtet worden ist. Es ergiebt sich unter anderem, dass ein derartiges Curvensystem vermöge quadratischer Transformationen nur auf irgend eines von vier speciellen Systemen kleinster Ordnung zurückgeführt werden kann. My.

B. Guccia. Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. C. R. CIII. 594-596.

Bezeichnet C die Anzahl willkürlicher Bedingungen, die eine ebene Curve n^{ter} Ordnung noch erfüllen kann, wenn sie in einem Punkte P die Singularität $[\sigma]$ besitzt, E die durch letztere bewirkte Verkleinerung der Geschlechtszahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und $\dot{I}$ die Anzahl mit P zusammenfallender Schnittpunkte zweier ebenen Curven n^{ter} Ordnung mit der Singularität $[\sigma]$ in P, so ist:

$$C = \dot{I} - E.$$

Js.

F. Hofmann. Notiz über die Wendepunkte einer algebraischen Curve sowie einen Satz von Clebsch aus der Theorie der Curven III. Ordnung. Schlömilch Z. XXXI. 374-378.

Ein analytischer Beweis des Satzes, dass die Schnittpunkte einer algebraischen Curve mit ihrer Hesse'schen Curve Wendepunkte sind, giebt Anlass, bekannte Beziehungen zwischen einer Curve III. Ordnung und ihrer Hesse'schen Curve zu behandeln.

Js.

J. J. Sylvester. Sur l'équation différentielle d'une courbe d'ordre quelconque. C. R. CIII. 408-411.

Stellt $U = 0$ die Gleichung einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung zwischen den Coordinaten x und y dar, so bildet der Verfasser die Ableitungen von U nach x von den Ordnungen

$$n+1,\ n+2,\ \ldots,\ \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

wodurch $\frac{n^2+n}{2}$ Gleichungen sich ergeben. Aus diesen kann man ebenso viele Coefficienten, d. h. alle Coefficienten von U, mit Ausnahme derjenigen, welche keine Potenz von y enthalten, eliminiren und erhält so die gesuchte Differentialgleichung, „critérium différentiel", einer Curve n^{ter} Ordnung. Der Grad des Kriteriums für eine Curve n^{ter} Ordnung ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ und sein Gewicht ist $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, wenn das Gewicht von $d_x^i y$ für i gezählt wird. Diese Zahlen sind, wie der Verfasser bemerkt, in Uebereinstimmung mit den von Herrn Halphen gefundenen.

W. St.

J. J. Sylvester. On the differential equation to a curve of any order. Nature. XXXIV. 365-366.

Herr Sylvester giebt an dieser Stelle ohne Beweis einen Satz über die Differentialgleichung einer Curve von beliebiger Ordnung. Es sei $m.\mu$ eine Bezeichnung für den Coefficienten von h^μ in

$$\left(\frac{1}{2!}y''h^2+\frac{1}{3!}y'''h^3+\frac{1}{4!}y^{\text{IV}}h^4+\cdots\right)^m.$$

Man bilde die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2.1 & 3.1 & 3.2 & 4.1 & 4.2 & 4.3 & 5.1 & 5.2 & 5.3 & 5.4 \\ 3.1 & 4.1 & 4.2 & 5.1 & 5.2 & 5.3 & 6.1 & 6.2 & 6.3 & 6.4 \\ 4.1 & 5.1 & 5.2 & 6.1 & 6.2 & 6.3 & 7.1 & 7.2 & 7.3 & 7.4 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 11.1 & 12.1 & 12.2 & 13.1 & 13.2 & 13.3 & 14.1 & 14.2 & 14.3 & 14.4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist das „Kriterium“ für eine Curve vierter Ordnung. Fügt man nach dem augenfälligen Gesetze fünf weitere Zeilen und Colonnen hinzu, so hat man das Kriterium für die Curven fünfter Ordnung; durch abermalige Hinzufügung von sechs Zeilen und Colonnen folgt das Kriterium für die Curven sechster Ordnung. Ebenso liefern die Subdeterminanten aus den ersten 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$ Zeilen und Colonnen die Kriterien für die Curven der drei ersten Ordnungen, das der Kegelschnitte behaftet mit dem Factor $\frac{1}{2}y''$. Uebrigens ist $m.\mu=0$, sobald $m<2\mu$; also z. B. 3.2, 4.3, 5.3, 6.4, 7.4 alle gleich Null. (Vgl. das voranstehende Referat). Lp.

C. Taylor. On the order of orthoptic loci. Mess. XVI. 1-5.

Zieht man an irgend einer Curve zwei zu einander rechtwinklige Tangenten, so heisst der Ort ihres Schnittpunktes der „orthoptische Ort“ der Curve, da diese von jedem seiner Punkte aus unter rechtem Winkel erscheint. Es wird nachgewiesen, dass der orthoptische Ort irgend einer Curve von der Klasse n die Ordnung $n(n-1)$ besitzt und $\frac{1}{2}n(n-1)$-mal durch die Kreispunkte im Unendlichen geht. Die besonderen Fälle der Ellipse, Parabel und Kardioide werden einzeln durchgegangen. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 685.) Glr. (Lp.)

M. d'Ocagne. On homological polar reciprocal curves. Ed. Times. XLIV. 95-96.

Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 688. Lp.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

FR. GRAEFE. Auflösungen und Beweise der Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. Leipzig. B. G. Teubner. IV + 258 S. 8°.

Das Buch enthält die Auflösungen der Aufgaben, die gesondert erschienen sind. (Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 689.) Für die einfacheren Aufgaben sind bloss die Resultate angegeben; bei den schwierigeren dagegen ist der Gang der Lösung vollständig mitgeteilt, und dadurch ist das ganze Werk eine wertvolle Ergänzung der Lehrbücher geworden, welche in die analytische Behandlung der Kegelschnitte einführen. Die verschiedenen Methoden, welche in der analytischen Geometrie zur Anwendung kommen, haben gebührende Berücksichtigung gefunden. Die Theorie der Determinanten ist vorausgesetzt, dagegen ist keine Anwendung von der Differential- und Integral-Rechnung gemacht. Die Beweise sind nicht immer nach den Methoden der analytischen Geometrie, sondern zuweilen nach denen der Geometrie der Lage gegeben. Manche Ungenauigkeiten der Fragestellung bei den Aufgaben werden bei fortgesetztem Gebrauche erkannt werden und in einer künftigen neuen Auflage sich verbessern lassen. Lp.

O. JANISCH. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene mit den Resultaten für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Herausgegeben von H. Funcke. Potsdam. A. Stein. IV + 200 S. 8°.

In dem Nachlasse des am 2. August 1883 gestorbenen Verfassers fand sich ein zur Herausgabe bestimmtes reiches Material aus der analytischen Geometrie mit den Lösungen. Aus demselben hat sein Sohn die vorliegende Sammlung mit den Resultaten zusammengestellt; Herr Funcke hat im Auftrage des Ver-

legers die Herausgabe besorgt. Nach einer Einleitung mit Beispielen zur Lösung von Aufgaben folgen in fünf Abschnitten die Aufgaben, welche fast nur die Auffindung geometrischer Oerter verlangen. Abschnitt I, die gerade Linie, mit 73 Nummern; Abschnitt II, der Kreis, mit 136; Abschnitt III, die Parabel, mit 100; Abschnitt IV, die Ellipse, mit 149; Abschnitt V, die Hyperbel, mit 88. Manche Nummer enthält eine ganze Reihe von Fragen. In einem Anhange sind die gebräuchlichsten Formeln aus der analytischen Geometrie vom Herausgeber zusammengestellt. Die Art der Aufgaben ist wenig mannigfaltig; alle beziehen sich auf die Durchschnitte beweglicher Linien, deren Entstehung analytisch sich leicht verfolgen lässt. Für Schüler mit geringen Vorkenntnissen dürfte daher die Sammlung zur Einübung des Lehrstoffes und zur Ausbildung nach einer bestimmten Richtung sich gut eignen. Lp.

A. Hochheim. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. Leipzig. B G. Teubner.

In zwei gesonderten Heften, das eine betitelt: Aufgaben und das zweite: Auflösungen, werden hier 450 Probleme aus der analytischen Geometrie aufgestellt und gelöst.

Es sind dies aber solche Probleme, die einem Anfangscursus der analytischen Geometrie nicht mehr angehören; nämlich Aufgaben über projectivische Strahlenbüschel in schiefer Lage, concentrische projectivische Strahlenbüschel, Erzeugnisse projectivischer Strahlenbüschel in einer Ebene; hierauf projectivische Punktreihen in schiefer Lage, conjectivische Punktreihen und Erzeugnisse projectivischer Punktreihen in einer Ebene. Dann folgen Punktreihen und Strahlenbüschel zweiter Ordnung, involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel zweiter Ordnung, die Sechsecke von Pascal und Brianchon, Pol und Polare, Mittelpunkt, Durchmesser, Axen, Asymptoten, Brennpunkte. Dann Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, vermischte Aufgaben. Zum Schluss werden trimetrische Coordinaten angewandt

und die homogenen Gleichungen zweiten Grades, Pol und Polare, das Polardreieck, Mittelpunkt und Durchmesser, Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen, vermischte Aufgaben mit diesen Coordinaten behandelt. Das Buch wird dem angehenden Studirenden jedenfalls sehr nützlich sein. Mz.

É Lemoine. Quelques questions se rapportant à l'étude des antiparallèles des côtés d'un triangle. S. M. F. Bull. XIV. 107-131.

Während in früheren Arbeiten die Figur betrachtet wurde, welche entsteht, wenn zu den Seiten eines Dreiecks ABC Parallelen construirt werden, die durch denselben Punkt gehen, wird in dieser Arbeit die Figur näher discutirt, die man erhält, wenn zu den Seiten des Dreiecks ABC antiparallele Gerade, die durch denselben Punkt gehen, gezogen werden. Das Dreieck ABC dient als Coordinatendreieck, und die Coordinaten eines Punktes P sind die Lote ξ, η, ζ zu den Seiten BC, CA, AB, deren Längen resp. a, b, c. Wenn nun $O(\alpha, \beta, \gamma)$ der Punkt ist, durch den die drei Antiparallelen gehen, so ist die Gleichung der mit BC antiparallelen Geraden:

$$\xi a(b\gamma+c\beta)+\eta[(b^2-c^2)\gamma-ac\alpha]+\zeta[(c^2-b^2)\beta-ab\alpha]=0,$$

und analog die der beiden anderen. Es werden nun in der Voraussetzung $a>b>c$ die Längen der hauptsächlichen Linien in der Figur als Functionen von a, b, c, α, β, γ ermittelt; dann werden der umschriebene Kreis und die vier Kreise, die die Seiten von ABC berühren, mit herangezogen, und eine grosse Zahl von Sätzen und Beziehungen angegeben, was in der Arbeit selbst nachzusehen ist. Mz.

J. Neuberg. Sur le point de Tarry. Mathesis VI. 5-7.

Dieser Artikel hängt eng mit der folgenden Aufgabe zusammen, die in Mathesis V. 208-212 behandelt ist: „In der Ebene eines Dreiecks ABC den Ort eines Punktes M so zu bestimmen, dass die Lote zu den Geraden MB, MC, MA in den Ecken sich in einem und demselben Punkte M' schneiden."

1. In Normal-Coordinaten haben die Oerter der Punkte M und M' die Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\cos B \sin C}{\alpha} + \frac{\cos C \sin A}{\beta} + \frac{\cos A \sin B}{\gamma} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\sin B \cos C}{\alpha} + \frac{\sin C \cos A}{\beta} + \frac{\sin A \cos B}{\gamma} = 0.$$

Es sind dies Kegelschnitte, welche durch A, B, C gehen und ausserdem bezw. durch die Schnittpunkte der Höhen AH, BH, CH mit den zu AB, BC, CA durch B, C, A oder zu AC, CB, BA durch C, B, A gezogenen Senkrechten.

2. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben durch Addition und Subtraction:

$$(3) \qquad \frac{\sin A}{\alpha} + \frac{\sin B}{\beta} + \frac{\sin C}{\gamma} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\sin(B-C)}{\alpha} + \frac{\sin(C-A)}{\beta} + \frac{\sin(A-B)}{\gamma} = 0,$$

die Gleichungen des Umkreises von ABC und der Kiepert'schen Hyperbel. Die vier Curven (1), (2), (3), (4) schneiden sich in einem und demselben Punkte N, der „Tarry'scher Punkt" heisst. Dieser Punkt N hat die Eigenschaft, dass die Lote auf NA, NB, NC bezw. durch A, B, C, oder B, C, A, oder C, A, B in drei Punkten R, R', R'' zusammentreffen. R ist der Schnittpunkt des Umkreises von ABC mit der Steiner'schen Ellipse. Er ist der den drei Krümmungskreisen dieser Ellipse in A, B, C gemeinsame Punkt. Aus diesem Grunde ist R der „Steiner'sche Punkt" des Dreiecks ABC.

Das Dreieck $RR'R''$ ist der Steiner'schen Ellipse einbeschrieben und hat denselben Schwerpunkt wie ABC. Von den Punkten R', R'' aus sieht man die Seiten a, b, c unter den Winkeln B, C, A oder C, A, B, was eine merkwürdige Annäherung zwischen diesen Punkten und den Brocard'schen herstellt.

3. Man lege durch einen beliebigen Punkt M Lote zu BC, CA, AB; ihre Fusspunkte seien A_1, B_1, C_1; ferner mögen die Schnittpunkte von MA_1, MB_1, MC_1 mit b, c, a und c, a, b bezw. A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3 heissen. Dann ist

$$2\,A_1 B_1 C_1 = S\beta\gamma \sin A,$$
$$2\,A_2 B_2 C_2 \,.\, \cos A \cos B \cos C = S\beta\gamma \cos B \sin C,$$
$$2\,A_3 B_3 C_3 \,.\, \cos A \cos B \cos C = S\beta\gamma \sin B \cos C.$$

Daraus folgen ganz merkwürdige Sätze, z. B.: 1) Die Kegelschnitte (1) und (2) sind die Oerter solcher Punkte, für welche die Punkte A_2, B_2, C_2 oder A_3, B_3, C_3 in einer Geraden liegen. 2) Bewegt sich der Punkt M auf dem Umkreise von ABC oder auf der Kiepert'schen Hyperbel, so haben die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$ absolut genommen gleichen Flächeninhalt. 3) Wenn der Punkt M sich auf einem durch die Punkte A, B, C, N gehenden Kegelschnitte bewegt, so besteht zwischen den Flächeninhalten von je zweien der Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$: $A_3B_3C_3$ ein constantes Verhältnis. 4) Die vom Tarry'schen Punkte auf die Seiten von A, B, C gefällten Lote treffen diese in neun Punkten, die auf drei Geraden $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ verteilt liegen.

Mn. (Lp.)

A. Cayley. Analytical-geometrical note on the conic. Mess. XV. 192.

Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes auf dem Kegelschnitte $yz+zx+xy=0$, so sind offenbar (y, z, x) und (z, x, y) die Coordinaten zweier anderen Punkte auf demselben Kegelschnitte. Der Verfasser zeigt, dass diese drei Punkte die Ecken eines dem Kegelschnitte:

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$$

umgeschriebenen Dreieckes sind.

Glr. (Lp.)

G. Egidi. Sulle formole trigonometriche comuni alle sezioni coniche dotate di centro. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVII. 295-302.

In der Gleichung $x^2+c^2y^2=1$ sollen dem c drei verschiedene Werte beigelegt werden, $c=1$, $c>1$, $c=\sqrt{-1}$; sie repräsentirt dann drei Kegelschnitte mit demselben Mittelpunkte und gemeinsamer Abscissen-Axe, Kreis, Ellipse, gleichseitige Hyperbel.

Die beiden letzteren können als orthogonale, reelle resp. imaginäre Projection des ersteren angesehen werden. Construirt man nun die zur Definition der trigonometrischen Functionen am Kreise nötigen Längen, und verwendet ihre Projectionen in analoger Weise als Definition der gleichnamigen trigonometrischen Functionen des Ellipsen- resp. Hyperbelbogens, so lassen sich eine grosse Reihe von Formelgruppen aufstellen, welche für alle drei Curven Geltung haben, je nach dem Werte, welcher dem c beigelegt wird. R. M.

H. M. Taylor. On a geometrical interpretation of the algebraical expression which equated to zero, represents a curve or a surface. Mess. XVI. 39-41.

Ist $S=0$ die Gleichung eines Kegelschnitts (oder einer Fläche zweiter Ordnung), so zeigt sich, dass S das Product der Normalen von irgend einem Punkte an den Kegelschnitt (oder an die Fläche) $S=0$ und der Lote vom Mittelpunkte des Kegelschnittes (oder der Fläche) auf die Tangenten (oder Tangentialebenen) an dem Kegelschnitte (an der Fläche) in den Punkten ist, wo diese Normalen gezogen sind, das Ganze noch mit einer Constanten multiplicirt. Glr. (Lp.)

J. Wolstenholme, G. B. Mathews. Solution of question 8159. Ed. Times XLV. 65 66.

Zwei Kreise haben die Mittelpunkte A, B, die Radien a, b $(a>b)$, die Centrale c. Eine Gerade bewegt sich so, dass die durch die beiden Kreise aus ihr herausgeschnittenen Segmente das gegebene Verhältnis $\lambda:1$ haben. Die Hüllcurve der Geraden ist ein Kegelschnitt. Nimmt man AB als positive x-Axe, eine Senkrechte zu AB in A als y-Axe, so findet man die Gleichung des Kegelschnittes:

$$(a^2-\lambda^2b^2)(\lambda^2+1)\,.\,x^2+\{(a^2-\lambda^2b^2)(\lambda^2-1)-\lambda^2c^2\}\,.\,y^2$$
$$-2\lambda^2c(a^2-\lambda^2b^2)\,.\,x+(a^2-\lambda^2b^2)(a^2-\lambda^2b^2+\lambda^2c^2)=0.$$

Die verschiedenen Fälle, welche für $\lambda < 1$, $\lambda = 1$, $\lambda > 1$ oder für $\lambda < a:b$, $\lambda = a:b$, $\lambda > a:b$ u. s. w. eintreten können, werden erörtert. Lp.

GENESE. Correspondance. Nouv. Ann. (3) V. 493-494.

Der Herr Verfasser weist auf einen Fehler hin, den er in einem Beweise, welchen Tarry von einem Steiner'schen Satz gegeben hat, findet. (Vgl. F. d. M. XVI. 1884. 549). Er zeigt, dass es vier Kegelschnitte giebt, in Bezug auf welche zwei gegebene Kegelschnitte S und Σ reciproke Polaren sind. Der analytische Nachweis hiervon ist dieser: Wenn

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda\alpha^2+\mu\beta^2+\nu\gamma^2 = 0$$

die Gleichungen der Kegelschnitte S und Σ sind, und beide reciproke Polaren zu dem Kegelschnitt D, dessen Gleichung:

$$L\alpha^2 + M\beta^2 + N\gamma^2 = 0$$

ist, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{L^2}{\lambda . l} = \frac{M^2}{\mu . m} = \frac{N^2}{\nu . n},$$

oder:

$$L:M:N = \pm\sqrt{\lambda . l}:\pm\sqrt{\mu . m}:\pm\sqrt{\nu . n},$$

und daraus folgt, dass es vier Kegelschnitte D giebt. Mz.

R. GODEFROY. Sur le système d'une conique et d'un cercle. Nouv. Ann (3) V. 155-158.

In dieser kurzen Notiz wird ein Mittelpunktskegelschnitt:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

und ein Kreis:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0$$

in Betracht gezogen. Beide Curven schneiden sich in 4 Punkten, durch welche 3 Geradenpaare gehen; sind $(x_1 y_1)$ die Coordinaten des Kreuzungspunktes bei dem einen Paare und ebenso $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ bei den beiden andern, dann ist:

$$y_1 y_2 y_3 = -\frac{b^4\beta}{c^2} \quad \text{und} \quad x_1 x_2 x_3 = \frac{a^4\alpha}{c^2},$$

wie sehr einfach durch Rechnung gefunden wird. Diese Gleichungen werden geometrisch gedeutet; und es wird dann als besonderer Fall der Krümmungskreis, den der Kegelschnitt in (x, y) hat, angenommen, für welchen sich ergiebt:

$$\alpha = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad \beta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Tritt an die Stelle des Kegelschnitts: $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$ die Parabel $y^2-2px = 0$, so ergiebt eine ähnliche Rechnung:

$$x_1+x_2+x_3 = \alpha-p; \quad y_1y_2y_3 = -\beta p^2.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt der Satz: Hat man eine Parabel und einen Kreis und construirt das zu beiden Curven sich selbst conjugirte Polardreieck, so bewegt sich der Schwerpunkt dieses Dreiecks auf einer zur Axe senkrechten Geraden, wenn der Mittelpunkt des Kreises auf einer solchen Geraden fortschreitet. Für den Krümmungskreis hat man hier:

$$\alpha = 3x+p, \quad \beta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Mz.

S. Dautheville. Sur l'hypercycle et la théorie des cycles polaires. S. M. F. Bull. XIV. 45-67.

Zu dieser Arbeit bilden folgende Definitionen die Grundlage. (Vgl. Laguerre: „Sur les hypercycles", „Transformation par semi-droites réciproques", „Sur quelques propriétés des cycles". F. d. M. XIV. 1882. 541, 722; XV. 1883. 534. Red.) Ein Cykel (cycle) ist ein Kreis, der in einem bestimmten Sinn durchlaufen wird; wechselt der Radius das Vorzeichen, so wird der Bewegungssinn der umgekehrte. Ein Cykel ist daher durch die Coordinaten des Kreismittelpunktes und den Radius bestimmt. Eine Halbgerade D (semi-droite) ist eine in einem bestimmten Sinn durchlaufene Gerade; bildet sie mit OX den Winkel ω, und mit OY den Winkel ω' — wo ω und ω' kleiner als π — und setzt man $\cos\omega = \alpha$, $\cos\omega' = \beta$; ist ferner p der Abstand der Geraden von O, so ist D durch die drei Parameter (α, β, p) bestimmt, unter denen aber die Beziehung $\alpha^2+\beta^2 = 1$ bestehen muss. Hat man drei Halbgerade $A, A', B,$ so giebt es einen

Cykel der sie berührt; ist O Durchschnitt von A und A', b Berührungspunkt von B mit dem Cykel, so möge Ob den Cykel noch in b' treffen; dann ist die Halbgerade B', welche Tangente des Cykels in b' ist, die harmonische Conjugirte zu B in Bezug auf A, A'. Die Tangenten des Cykels haben nämlich einerlei Bewegungssinn mit dem Cykel im Berührungspunkt und sind somit als Halbgerade bestimmt. Die hierzu gehörigen Formeln werden nach analytischer Methode entwickelt. Hat man nun drei Halbgerade P, P', D und einen Cykel K, und betrachtet eine vierte Halbgerade A, deren harmonische Conjugirte in Bezug auf P, P' die Halbgerade A' sei; und ist ferner D' die harmonische Conjugirte von D in Bezug auf A, A' — so kann man A so wählen, dass D' Tangente des Cykels K wird. Man erhält dann eine unendliche Zahl von solchen Geraden A, deren Umhüllungscurve Hypercykel (hypercycle) genannt wird. Hierüber folgen mehrere Sätze, und im Anschluss daran weitere Definitionen. Mz.

M. d'Ocagne. Sur le cercle orthoptique. Nouv. Ann. (3) V. 97-106.

Wenn ein Kreis C und zwei senkrechte Durchmesser Ox, Oy desselben gegeben sind, so giebt es unendlich viele Rechtecke, die diesem Kreise eingeschrieben sind, und deren Seiten parallel zu Ox, Oy gehen. Jedem dieser Rechtecke kann ein Kegelschnitt K eingeschrieben werden, dessen Axen die Richtungen Ox, Oy haben, und zu jedem dieser Kegelschnitte K ist C der orthoptische Kreis; d. h. der Kreis, in dessen Punkten je zwei zu einander senkrechte Tangenten von K sich treffen. Es wird nun auf dem Kreise C, dessen Gleichung

$$x^2+y^2 = R^2,$$

ein Punkt $M(\alpha, \beta)$ angenommen und die Hüllcurve aller Polaren von M in Bezug auf die Kegelschnitte K gesucht. Diese Hüllcurve ist die Parabel, deren Gleichung:

$$(\alpha x-\beta y)^2-2R^2(\alpha x+\beta y)+R^4 = 0.$$

Fällt man von M die Lote Ma, Mb resp. auf Ox, Oy, so umhüllt

ab, während *M* die Peripherie von *C* durchläuft, eine Hypocykloide mit 4 Spitzen. Jede einem solchen Punkte *M* zugehörige Parabel berührt nun diese Hypocykloide, und zwar ist der Berührungspunkt der Scheitel der Parabel. In dieser Weise folgen noch mehrere Sätze. Späterhin wird der Punkt *M* festgehalten, dagegen das Axensystem gedreht; dann ist die Einhüllende aller Parabeln, die zu *M* gehören, das zu *MO* in der Mitte errichtete Lot. Es wird dann auch noch einer der Kegelschnitte *K* betrachtet, und von diesem angenommen, dass er an der Drehung Teil nimmt, was wieder zu neuen Sätzen führt.

Mz.

J. Brill, S. Aiyar. Solution of question 8273. Ed. Times XLV. 62-63.

Der Ort für den Schwerpunkt der Punkte, in denen eine bewegliche Tangente einer Parabel von *n* festen Tangenten derselben geschnitten wird, ist abermals eine Tangente der Parabel, und ihr Berührungspunkt liegt auf der Geraden, welche den Schwerpunkt der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Schnittpunkte der *n* festen Tangenten mit dem Schwerpunkte ihrer Berührungspunkte verbindet; derselbe teilt ferner diese Gerade nach dem Verhältnisse $1:n-1$.

Lp.

R. Godefroy. Sur les centres de courbure de l'ellipse et de la parabole. Nouv. Ann. (3) V. 237-245.

Einfache Ableitungen bekannter Formeln, welche den Krümmungsradius eines Ellipsen- und Parabelpunktes in kurzer Form ausdrücken, sowie elegante Constructionen des einem solchen Punkte zugehörigen Krümmungsmittelpunktes. Scht.

M. d'Ocagne. De la déviation dans l'ellipse. Nouv. Ann. (3) V. 370-380.

Die bekannte Erzeugung einer Ellipse aus zwei concentri-

schen Kreisen, deren Radien die beiden Halbaxen a und b sind, giebt Veranlassung zu dem vom Verfasser aufgestellten Begriff der Deviation eines Ellipsenpunktes. Darunter wird nämlich der Winkel δ verstanden, den die Tangente in dem fraglichen Punkte der Ellipse mit einer der beiden Tangenten bildet, welche die concentrischen Kreise in den beiden Punkten berühren, aus denen bei der erwähnten Erzeugung die Construction des Ellipsenpunktes hervorgeht. Für δ ergiebt sich: $\operatorname{tg}\delta = \frac{(a-b)\sin\varphi\cos\varphi}{a\sin^2\varphi + b\cos^2\varphi}$, wo φ den Winkel bedeutet, den die grosse Axe mit dem Radius bildet, der nach den eben genannten beiden Punkten gezogen werden kann. Durch Nullsetzung des Differentials dieses Ausdrucks ergiebt sich für die vier symmetrisch liegenden Punkte, in denen δ ein Maximum erreicht, $\operatorname{tang}\varphi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Es werden dann mehrere auf diese Punkte maximaler Deviation bezügliche Eigenschaften der Ellipse abgeleitet.

Scht.

M. d'Ocagne. Note sur la déviation dans l'ellipse. Nouv. Ann. (3) V. 534-535.

Der vom Verfasser in einer früheren Note (s. das vorige Referat) definirte und discutirte Deviationswinkel eines Punktes einer Ellipse wird hier auf eine Weise construirt, die es gestattet, die Veränderung der Deviation, während der Punkt die Ellipse durchläuft, zu verfolgen, und dadurch die Lage der Punkte maximaler Deviation ohne Differentialrechnung aufzufinden.

Scht.

R. Hoppe. Der Krümmungskreis der Ellipse. Hoppe Arch. (2) IV. 443-448.

Der Herr Verfasser erinnert daran, dass es vielfach als wünschenswert bezeichnet wird, auf Schulen, wo die Lehre von den Kegelschnitten betrieben wird, auch den Krümmungskreis, namentlich denjenigen der Ellipse zu beh[illegible] soll

aber keine Differentialrechnung, überhaupt kein Uebergang zum Grenzwert in Anwendung kommen. Es wird dies nun in vorliegender Arbeit geleistet, indem allerdings Coordinaten, die nur die Rolle von Hülfslinien spielen, vorkommen, aber keine genetische Betrachtung zugezogen wird, mit Ausnahme der Erzeugung der vorliegenden Curve durch den Punkt. Zuerst wird die Tangente, dann die Normale, dann der Krümmungskreis vorgenommen, indem aber durchweg nur von unveränderlichen Grössen und Lagen die Rede ist. Das Nähere ist in der Arbeit selbst nachzusehen. Es sei nur als Beispiel dieser Betrachtungsweise erwähnt, dass, wenn der Punkt P der Ellipse die Coordinaten

$$x = a \cos\varphi \quad \text{und} \quad y = b \sin\varphi$$

hat und durch P eine Sehne PL gezogen wird, die mit OX den Winkel ϑ bildet, und die Ellipse in L' trifft, wo L' die Coordinaten $a\cos\varphi_2$, $b\sin\varphi_2$ hat, die Relation sich ergiebt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{b}{a}\cot\frac{\varphi_2+\varphi}{2},$$

wonach einem gegebenen ϑ ein bestimmter Wert von φ_2 zugehört. Ist nun $\varphi_2 = \varphi$, so erhält man für die Tangente $\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{b}{a}\cot\varphi$, u. s. w. Mz.

R. Tucker, B. H. Rau, T. C. Simmons. Solution of question 7985. Ed. Times XLIV. 64-65.

Bekanntlich giebt es drei Krümmungskreise einer Ellipse, welche sich in einem Punkte P der Ellipse schneiden, und die drei Berührungspunkte Q, R, S liegen mit P auf einem Kreise. Man construire die Simsonlinie LMN für P in Bezug auf das Dreieck QRS. Beschreibt nun P die Peripherie der Ellipse, so umhüllt LMN die Curve

$$(\lambda x)^{\frac{2}{3}} + (\mu y)^{\frac{2}{3}} = (a^2+b^2)^{\frac{4}{3}},$$

wo $\lambda \pm \mu = (a \pm b)^2$ gesetzt ist. Lp.

R. F. Davis. Geometrical note on an envelope in connexion with confocal conics. Ed. Times XLV 169-172.

Asparagus. Note. Ed. Times XLV. 173.

In den letzten Bänden der Ed. Times waren wiederholt Aufgaben über Hüllcurven gestellt und gelöst worden, wenn die Gleichung der beweglichen Curve von zwei Parametern abhing. Man vergleiche z. B. F. d. M. XVII. 1885. 696. Die Note von Asparagus behandelt folgenden Satz: „Gegeben ist ein Kegelschnitt mit den Brennpunkten S, S', ausserdem ein Punkt O. Von irgend einem Punkte P auf der Polare von O wird eine Gerade gezogen, welche gegen die Polare von P unter einem gegebenen Winkel geneigt ist. Die Hüllcurve dieser Geraden ist eine Parabel, deren Brennpunkt O' so liegt, dass der Kegelschnitt, welcher durch O, O' und die Berührungspunkte der Tangenten von O, O' an den gegebenen Kegelschnitt geht, ein Kreis ist.“ So ist die Hüllcurve der durch P senkrecht zur Polaren von P gezogenen Geraden eine Parabel, die aus S, S', O allein construirt werden kann, und die Hüllcurve ist dieselbe für alle confocalen Kegelschnitte mit S, S' als Brennpunkten, obschon scheinbar zwei Parameter in Betracht kommen. Während die Untersuchung von Asparagus analytisch vorgeht, löst Hr. Davis dieselbe Frage und andere dahin gehörige auf synthetischem Wege. Lp.

R. A. Roberts. On Polygons circumscribed about a conic and inscribed in a cubic. Lond. M. S. Proc. XVII. 158-171.

Wenn ein Kegelschnitt in der Form $xz-y^2=0$ gegeben ist, so kann einer seiner Punkte durch $1:a:a^2$ und die Gleichung der Tangente in ihm durch $a^2x-2ay+z=0$ dargestellt werden. Ist daher $t_1=a_1^2x-2a_1y+z$, so ist $t_1=0$ die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts in dem Punkte a_1.

Die Curven dritten Grades, welche mit jenem Kegelschnitt in Verbindung gesetzt werden, sind:

$$(1)\qquad C \equiv \frac{\lambda_1}{t_1} + \frac{\lambda_2}{t_2} + \frac{\lambda_3}{t_3} + \frac{\lambda_4}{t_4} = 0,$$

$$(2)\qquad D \equiv t_1 t_2 t_3 - \lambda t_4 t_5 t_6 = 0,$$

wo die λ beliebige Coefficienten bedeuten. Eine dritte Curve R wird auf folgende Art hergeleitet. Von den acht Tangenten $t_1, t_2, \ldots, t_8$ mögen sich die Paare $t_1 t_5$; $t_2 t_6$; $t_3 t_7$; $t_4 t_8$ in vier Punkten schneiden, welche in gerader Linie gelegen sind. Sind ϑ und $\varkappa$ beliebige Coefficienten, so wird, wenn man für $\vartheta - a_1 = \vartheta_1$ schreibt und zwischen $a_1, a_2, \ldots, a_8$ die Relationen festsetzt $\vartheta_1 \vartheta_5 = \vartheta_2 \vartheta_6 = \vartheta_3 \vartheta_7 = \vartheta_4 \vartheta_8 = \varkappa$, die Gleichung jener Geraden durch $(\vartheta^2 - \varkappa)\, x - 2\vartheta y + z = 0$ gegeben. Die Function vierten Grades

$$\vartheta_5 \vartheta_6 \vartheta_7 \vartheta_8 t_1 t_2 t_3 t_4 - \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4 t_5 t_6 t_7 t_8$$

schliesst nun den linearen Factor $(\vartheta^2 - \varkappa)\, x - 2\vartheta y + z$ in sich; sie zerfällt also in diesen Factor und eine Function dritten Grades R, und die Curve $R = 0$ ist die dritte, welche mit dem Kegelschnitt in Beziehung gesetzt wird.

Diese drei Curven C, D, R haben die gemeinsame Eigenschaft, dass die Polygone, welche dem Kegelschnitt umgeschrieben und den kubischen Curven eingeschrieben sind, nicht bestimmt sind, sondern einen gewissen Grad von Freiheit besitzen, d. h., dass sie als abhängig von einem willkürlichen Parameter betrachtet werden können. Die Beziehung dieser Curven zu dem gegebenen Kegelschnitt und die Bestimmung des Kegelschnitts, wenn die Curven C, D, R als gegeben angesehen werden, bilden den Inhalt der Untersuchung. Schn.

A. Rémond. Sur un système de coniques, dont l'équation a ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres. Nouv. Ann. (3) V. 424-432

Sind $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte, α und β unbestimmte Coefficienten, so stellt die Gleichung

$$\alpha U + \beta V + W = 0,$$

oder ausführlicher, in rechtwinkligen Coordinaten, die Gleichung

$$0 = \Gamma = X x^2 + 2 Z x y + Y y^2 + 2 X' x + 2 Y' y + Z',$$

deren Coefficienten lineare Functionen von α und β sind, wieder einen Kegelschnitt Γ dar. Zunächst wird nun die Natur der durch diese Gleichung dargestellten Curven untersucht, d. h. die Lage angegeben, welche ein Punkt M mit den Coordinaten α und β einnehmen muss, wenn der Kegelschnitt Γ besondere Eigenschaften haben soll. Stellt die Gleichung $\Gamma = 0$ ein System von zwei Geraden dar, so ist die Bedingungsgleichung für $M = (\alpha, \beta)$ vom dritten Grade. Für einige besondere Arten der Gleichung $\Gamma = 0$ wird die Art der Curve dritter Ordnung, auf welcher sich M befinden muss, damit Γ in zwei lineare Factoren zerfällt, näher erörtert. Rdt.

J. Hahn. Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet. Leipzig. G. Fock. 14 S. 4°.

Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie I. 304 enthalten die irrtümliche Behauptung, dass ein Kegelschnittnetz mit den drei Grundcurven:

$$a_x^2 = 0, \quad b_x^2 = 0, \quad c_x^2 = 0$$

in einen Büschel ausartet, sobald die Jacobi'sche Form desselben $a_x b_x c_x (abc)$ identisch verschwindet. Der Verfasser weist nach, dass zu dieser Ausartung das gleichzeitige Verschwinden der Jacobi'schen und Hermite'schen Form $-(bcu)(cau)(abu)$ notwendig ist; wenn die Jacobi'sche Form allein verschwindet, zerfallen sämtliche Kegelschnitte des Netzes in zwei durch einen festen Punkt gehende Gerade; wenn die Hermite's[illegible] Form allein verschwindet, zerfallen alle Kegelschnitte in zw[illegible] von denen die eine allen gemeinsam ist. Zum Schl[illegible] der Verfasser noch die Frage, wie sich die von G[illegible] (Journ. f. Math. LXXX. 73) im allgemeinen gelöste Auf[illegible] Curve dritter Ordnung zu bestimmen, deren Polarkegels[illegible] mit einem gegebenen Netze congruent ist, für die von [illegible] sprochenen speciellen Netze gestaltet. R.

TH. KRAHL. Ueber gemischte Kegelschnittbüschel, welche durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmt sind. Pr. Gymn. Sagan. 4°. 16 S.

Der Verfasser untersucht dieses Gebilde auf analytischem Wege mittels trimetrischer Coordinaten in durchweg dualistischer Auffassung derselben, worauf die reciproke Natur der gegebenen Elemente von vornherein hinweist. Er entwickelt die allgemeinen Eigenschaften des Büschels, die Bedingung seiner Realität, das Zerfallen in zwei scharf getrennte Gruppen von Kegelschnitten, die Zusammengehörigkeit von je vier Kegelschnitten und ihre gegenseitigen Beziehungen, die Gattung der Kegelschnitte je nach der Lage der gegebenen Elemente, die polaren Eigenschaften des Büschels. R. M.

J. HELLER. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen. Linz. Selbstverlag. 51 S. 8°. 1 Taf.

Das vorliegende kleine Buch stellt in klarer übersichtlicher Weise die zumeist bekannten Eigenschaften der beiden geometrischen Gebilde zusammen. Es werden auf analytischem Wege mittels homogener Coordinaten das Wesen dieser Gebilde, ihre Eigenschaften in Bezug auf Pol und Polare, die Lage der Mittelpunkte, Brennpunkte und Tangenten entwickelt. Die projectivischen Eigenschaften vermitteln den Uebergang zu den weiteren Untersuchungen über Erzeugung und Construction der Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar. Hier werden die Methoden der synthetischen Geometrie verwandt und mittels derselben je nach der Lage der vier gegebenen Grundelemente die besonderen Verhältnisse der Gestalt, conjugirten Durchmesser, Asymptoten und Axen bestimmt. Die Beweisführung wird fast durchgängig nur für den Büschel ausgeführt und nach dem Grundsatze der Reciprocität auf die Schar übertragen.

R. M.

C. BERGMANS. Théorèmes sur la parabole Mathesis VI. 169-172. Mn.

G. Tarry. Représentation géométrique des coniques et quadriques imaginaires. Paris. Gauthier-Villars.

D. Andere specielle Curven.

F. Dingeldey. Ueber Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Klein Ann. XXVII. 272-276.

F. Dingeldey. Zur Construction der Hesse'schen Curve der rationalen Curven dritter Ordnung. Klein Ann. XXVIII. 81-83.

Der Herr Verfasser bezieht sich zunächst auf folgenden von Grassmann gegebenen Satz:

Wenn die vier Seiten und eine Diagonale eines Vierecks sich um feste Punkte drehen und die beiden Ecken, welche nicht von der Diagonale getroffen werden, in festen Geraden sich bewegen, so beschreiben die von der Diagonale getroffenen Ecken jede ein Gebilde dritten Grades.

Hieraus gewinnt der Herr Verfasser durch Specialisirung folgenden Satz:

Bewegt sich ein veränderliches Dreieck so, dass seine Seiten sich um feste Punkte b, b_1, a drehen, während zwei seiner Ecken auf festen Geraden C, C_1 fortrücken, so beschreibt ein beliebiger auf der durch diese zwei Ecken gehenden Seite gelegener Punkt x eine Curve dritter Ordnung, wenn seine Verbindungslinie mit einem festen Punkte d stets durch die dritte, noch freie Ecke des Dreiecks hindurchgeht. Diese Curve hat in dem mit x auf derselben Dreiecksseite liegenden festen Punkt a einen Doppelpunkt, ist aber eine allgemeine Curve ihres Geschlechtes.

Wenn nun eine beliebige Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt gegeben vorliegt, so kann sie dem vorstehenden Satz gemäss definirt werden, indem von einem beliebigen Curvenpunkte die beiden überhaupt möglichen Tangenten an die Curve con-

struirt werden; dies sind dann die Geraden C und C_1, ihre Berührungspunkte sind b_1 (auf C) und b (auf C_1), der Punkt d ist der dritte Schnittpunkt der Secante bb_1 mit der Curve, und a ist der Doppelpunkt.

Dies wird nun analytisch näher ausgeführt, indem:

$$\alpha x_2^2 x_1 + \beta x_2^2 x_3 + \gamma x_3^2 x_1 + \delta x_3^2 x_2 = 0$$

als Gleichung der Curve in trilinearen Coordinaten x_1, x_2, x_3 dient. Dabei ist $x_2 = x_3 = 0$ für den Doppelpunkt a; $x_3 = x_1 = 0$ für den Berührungspunkt b auf C_1; und $x_1 = x_2 = 0$ für den Berührungspunkt b_1 auf C. Die Wendepunktslinie hat die Gleichung:

$$4\alpha\gamma x_1 + \alpha\delta x_2 + \beta\gamma x_3 = 0.$$

In der zweiten Arbeit wird die Hesse'sche Curve zu dieser Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt untersucht; die Hesse'sche Curve ist eine Curve von ganz derselben Art wie die andere; es wird gezeigt, wie die Elemente: C', C'_1, b', b'_1, a, d' der Hesse'schen Curve aus den Elementen: C, C_1, b, b_1, a, d der ursprünglichen Curve dritter Ordnung abzuleiten sind. Mz.

P. H. Schoute. Over het onderzoek naar krommen met een middelpunt in een krommenbundel van den derden graad. Nieuw Archief. XIII. 1-10.

In der bekannten Abhandlung „Ueber algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven" teilt Steiner u. a. die folgenden Sätze mit (Ges. Werke II. 510): a) Unter den unendlich vielen Curven dritten Grades, welche durch beliebig gegebene acht Punkte gehen, und somit einen Curvenbüschel mit neun gemeinschaftlichen Punkten bilden, befindet sich im allgemeinen keine, welche einen Mittelpunkt hat. b) Hat aber insbesondere eine der Curven einen Mittelpunkt, so braucht deshalb von den übrigen keine einen Mittelpunkt zu haben. c) Befinden sich insbesondere zwei darunter, welche Mittelpunkte haben, aber nicht concentrisch sind, so kann von den übrigen keine einen Mittelpunkt haben. d) Weiss man von drei Curven dritten Grades, dass sie 8 Punkte

gemein haben, und dass jede einen Mittelpunkt hat, so folgt, dass sie concentrisch sein müssen, u. s. w.

Der Verfasser der obengenannten Abhandlung zeigt, dass die Sätze c) und d) unrichtig sind, und ersetzt sie durch andere, welche folgendermassen lauten. a) Ohne dass alle Curven eines Büschels des dritten Grades einen Mittelpunkt haben, lässt ein solcher Büschel höchstens drei Curven mit Mittelpunkten zu. Die Mittelpunkte dieser drei Curven können eine völlig willkürliche Lage zu einander haben; wenn jedoch alle Curven des Büschels Asymptoten haben, welche durch einen mit der Curve sich verändernden Punkt gehen, so liegen die drei Mittelpunkte sicher auf einer Geraden, und es osculirt die Curve des Büschels, die durch den unendlich fernen Punkt dieser Geraden geht, die unendlich ferne Gerade in diesem Punkt.

b) Wenn ein Curvenbüschel des dritten Grades vier Curven mit einem Mittelpunkt enthält, so haben alle Curven dieses Büschels einen Mittelpunkt. Hierbei kommen zwei Fälle vor: entweder die Mittelpunkte fallen in einen Punkt zusammen, oder sie haben eine Gerade zum geometrischen Ort, deren Punkte projectivisch mit den Curven des Büschels übereinstimmen, wenn man jedem Punkt dieser Geraden die Curve zuweist, welche diesen Punkt zum Mittelpunkt hat. Diese Gerade ist die gemeinschaftliche Asymptote aller Curven des Büschels, welche einander in ihrem unendlich fernen Punkt osculiren. Dieser unendlich ferne Punkt, welcher deshalb drei von den neun Basispunkten des Büschels vertritt, ist Doppelpunkt einer der Curven des Büschels; diese Curve hat in dem genannten Punkt die erwähnte Gerade der Mittelpunkte und die unendlich ferne Gerade zu Tangenten. Von den 12 Doppelpunkten, welche der Büschel besitzt, liegt ausser dem letzten Punkte, welcher drei Doppelpunkte vertritt, noch einer in unendlicher Entfernung; die acht andern dagegen werden durch vier Curven gegeben, welche aus einem Kegelschnitt und einer durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes gehenden Geraden bestehen und deshalb zwei Doppelpunkte besitzen. Schliesslich bemerkt der V[illegible] dass ein

völlig willkürlich gewähltes Netz von Curven dritter Ordnung 15 Curven mit einem Mittelpunkt besitzt.

Die Art der Behandlung ist im Gegensatz zu Steiner's Methode rein analytisch. G.

ROSENSTOCK. Ueber eine Gruppe ebener Curven dritter Ordnung. Pr. Gymn. Ernestinum Gotha. 16 S. 4° u. 1 Taf.

Legt man von einem Punkte auf der Centrale eines Kreisbüschels Tangenten an sämtliche Kreise, so ist der geometrische Ort der Berührungspunkte eine Curve dritter Ordnung, welche je nach der Lage des Punktes resp. der Beschaffenheit des Kreisbüschels die Hauptformen der Curven dritter Ordnung annehmen kann. Der Verfasser weist an ihr teils auf geometrischem Wege, teils mit Cartesischen Coordinaten eine grosse Zahl der den Curven dritter Ordnung im allgemeinen, sowie dieser Gruppe im besonderen zukommenden Eigenschaften nach.

R. M.

F. PURSER, SIRCOM, R. F. DAVIS. Solution of question 8396. Ed. Times XLV. 105-106.

Ein veränderlicher Kegelschnitt wird einem gegebenen Dreiecke so umbeschrieben, dass die Normalen in den drei Ecken durch einen Punkt P gehen. Der Ort von P ist dann eine kubische Curve, welche durch die Ecken des Dreiecks, durch seinen Höhenschnitt und durch die Mittelpunkte des Umkreises, des Inkreises und der drei Ankreise geht. Der Mittelpunkt des Umkreises ist gleichzeitig Mittelpunkt der kubischen Curve und die Verbindungslinien desselben mit den Mitten der drei Seiten des Dreiecks sind ihre drei Asymptoten. In Trilinear-Coordinaten ist ihre Gleichung:

$$(\beta+\gamma\cos A)(\gamma+\alpha\cos B)(\alpha+\beta\cos C)$$
$$=(\beta\cos A+\gamma)(\gamma\cos B+\alpha)(\alpha\cos C+\beta).$$

Lp.

J. Wolstenholme, D. Edwardes. Solution of question 8000. Ed. Times XLV. 26.

Bei einer ebenen kubischen Curve mit drei reellen Asymptoten und einem isolirten Punkte ist der Flächeninhalt zwischen jedem Curvenzweige und den beiden ihn einschliessenden Asymptoten ein Drittel von dem durch die Asymptoten gebildeten Dreiecke. Lp.

Ph. Gilbert. Sur quelques théorèmes de Sluse. Mathesis. VI. 241-244.

Massau. Généralisation du premier théorème de Sluse. Mathesis. VI. 245, 273.

C. Le Paige. Sur le théorème de Sluse. Mathesis. VI. 273.

Lässt man die gemeine Cissoide oder die Kreis-Cissoide um ihre Asymptote sich drehen, so ist der entstandene Körper inhaltsgleich mit dem durch den erzeugenden Kreis bei der Rotation um dieselbe Axe beschriebenen Ringkörper. Hr. Gilbert beweist diesen niedlichen Satz durch Integration, Hr. Le Paige vermittelst des Guldin'schen Satzes (Verfahren von Sluse); Hr. Massau zeigt, dass er für die Cissoide einer beliebigen Curve gilt, und dass ein ähnliches Theorem für das Trägheitsmoment einer Cissoidale zweiten Grades besteht. Noch andere Sätze von Sluse werden von Hrn. Gilbert verallgemeinert. Mn. (Lp.)

Haub. Ueber die geometrischen Eigenschaften der Curve, deren Gleichung $y^2(2a-x)-x(a-x)^2=0$ lautet. Pr. Gymn. Rössel. 4°. 18 S.

Fortsetzung einer früheren Arbeit (F. d. M. VII. 187?) Untersuchungen über den Krümmungskreis und die Rec[illegible] der Curve. R.

J. J. Sylvester. Sur une extension d'un théorè[illegible] Clebsch relatif aux courbes du quatrième [illegible] C. R. CII. 1532-1534.

Werden die Glieder der Entwickelung von $(\delta_x, \delta_y, \delta_z, \ldots)^\eta$ angewandt auf die Grösse $(x, y, z, \ldots)^{2\eta}$, so erhält man ebensoviele Functionen vom Grade η, als es Glieder in jeder Function giebt. Die Gesamtheit ihrer Coefficienten liefert somit die Matrix einer Determinante, welche wie in der Theorie der binären Formen als Katalektikante bezeichnet wird. Für eine Potenz einer linearen Function der Variabeln, und wie man sich leicht überzeugt, auch für eine Summe solcher Potenzen verschwindet die Katalektikante, sobald die Zahl dieser Potenzen kleiner ist, als die Ordnung der Katalektikante.

Es ergeben sich hieraus folgende Sätze: Eine binäre Form der Ordnung 2η kann nur dann als Summe von η Potenzen linearer Functionen dargestellt werden, wenn ihre Katalektikante verschwindet. Dann der Satz von Clebsch: Das erste Glied der Gleichung einer Curve vierter Ordnung ist im allgemeinen nicht ausdrückbar durch eine Summe von fünf Potenzen linearer Functionen der Variabeln.

Ferner der paradox scheinende Satz: Das erste Glied der Gleichung einer Fläche vierter Ordnung, welches nur 35 Constante enthält, kann im allgemeinen nicht durch eine Summe von neun Potenzen dargestellt werden, obgleich diese Summe 36 disponible Constante besitzt. W. St.

G. Frobenius. Ueber die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. Kronecker J. IC. 275-314.

Dieser Aufsatz bezweckt, der im Titel genannten Theorie einen gewissen Abschluss zu geben.

Einmal werden die bisher bekannten analytisch-geometrischen Entwickelungen in ihrer Tragweite mit einander verglichen und durch geeignete Ergänzungen zu einem übersichtlichen Ganzen ausgebaut. Sodann aber wird im einzelnen nachgewiesen, wie die gemeinten Untersuchungsrichtungen ihr Aequivalent finden in den bezüglichen Teilen der Theorie der Abel'schen Functionen

vom Geschlecht 3, wobei insbesondere auch die Ergebnisse von Hrn. Schottky berücksichtigt werden.

Die Spitzen der in einem durch acht Raumpunkte gehenden Flächennetz zweiter Ordnung enthaltenen Kegel erfüllen eine Raumcurve sechster Ordnung C_6 vom Geschlecht 3. Deutet man andererseits die Parameter des Netzes als Coordinaten eines Punktes der Ebene, so durchlaufen die den Kegelspitzen correspondirenden Punkte eine allgemeine Curve vierter Ordnung F_4, die demnach auf die Punkte von C_6 ein-eindeutig bezogen ist. Darauf gründet sich die bekannte Hesse'sche Theorie einer F_4 und ihrer Doppeltangenten.

Diese, zunächst rein analytische Beziehung zwischen der ebenen und der räumlichen Theorie lässt sich aber, wie Hr. Sturm nachwies, unmittelbar geometrisch realisiren, sobald man das Raumgebilde durch sein dualistisches Gegenstück, also ein Flächengewebe zweiter Klasse etc. ersetzt, und dieses mit einer beliebigen Ebene schneidet.

Fällt diese Schnittebene insbesondere mit einer der acht Grundebenen E des Gewebes zusammen, so entsteht zugleich die Aronhold'sche Figur des Gewebes von Curven dritter Klasse, welche sieben Gerade (nämlich die Spuren der sieben übrigen Grundebenen) berühren. Jede achte Gerade in E bestimmt eine Schar von Curven dritter Klasse, die noch eine neunte Tangente gemein haben. Jeder Curve K des Gewebes ordnet Aronhold eine Gerade T zu als Ort der Scheitel der die Curven R berührenden „letzten“ Tangentenpaare.

Indem sodann Hr. Godt bemerkte, dass jeder Punkt der Ebene der Scheitel von nur einem solchen Tangentenpaare ist, und demgemäss die eindeutige Zuordnung zwischen den letzten Tangentenpaaren und ihren Scheiteln einführte, hat er die Aronhold'sche Darstellung wesentlich vereinfacht. Eine analoge Vereinfachung lässt der Verfasser der Hesse-Sturm'schen Methode zu Teil werden. Es gelingt dies mittels des Hülfssatzes:

„Eine Fläche zweiter Klasse ist im allgemeinen vollständig bestimmt, wenn sieben ihrer Berührungsebenen gegeben sind und der Punkt, in dem sie eine derselben berührt.“

Daraus erwächst eine Darstellung, „die zu der von Godt in derselben Beziehung steht, wie die Hesse-Sturm'sche Theorie zu der von Aronhold."

Ueber den Inhalt der Arbeit ist ein Einzelbericht nicht gut möglich, da der Fortschritt wesentlich durch geschickte Combinirung einer verwirrenden Menge von Formeln bedingt ist.

Bei der analytischen Darstellung der 28 Doppeltangenten durch 7 unter ihnen ist von Einfluss der charakteristische Unterschied zwischen den „Determinanten dreier syzygetischen resp. asyzygetischen Doppeltangenten".

Die Beziehungen zwischen den 28 Doppeltangenten treten durch eine explicite Darstellung der Wurzelfunctionen zweiten und dritten Grades deutlich hervor. My.

G. LORIA. Remarques sur la géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4e ordre. Quart. J. XXII. 44-73.

Untersuchungen über das Product zweier Kreise dienen zur Besprechung der algebraischen Kreissysteme. Von diesen liefern die quadratischen eine Klassification der bicircularen Curven IV. Ordnung. Js.

F. ZUMKLEY. Analytische Untersuchung einer Gruppe verwandter Umhüllungslinien. Pr. Progymn. Eupen. 4°. I. (1886, No 452) 26 S. + 1 Taf., II. (1887, No. 411) 23 S. + 2 Taf.

Der Verfasser unternimmt eine Untersuchung der Hüllcurve eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich auf einer gegebenen festen Curve bewegt und dessen Peripherie durch einen gegebenen festen Punkt geht. Fällt man von dem letzteren Punkte die Lote auf alle Tangenten der gegebenen Curve, so sind nach einem bekannten Satze die Fusspunktencurve und die Hüllcurve ähnlich und ähnlich liegend in Bezug auf den festen Punkt als Aehnlichkeitspunkt mit dem Aehnlichkeitsverhältnis 1 : 2. Die

Eigenschaften der Hüllcurve sind also aus den zahlreichen Arbeiten über Fusspunktencurven und Brenncurven direct zu entnehmen. Der Verfasser scheint diesen Zusammenhang nicht gekannt zu haben, nach der Aeusserung der Einleitung: Diese „Frage hat eine eingehende und umfassende Beantwortung bis jetzt nicht gefunden.“ Seine nach den gewöhnlichen Methoden der Differential- und Integral-Rechnung geführte Untersuchung erstreckt sich auf diejenigen Hüllcurven, welche bei der Bewegung des Mittelpunktes des Kreises auf einer Curve zweiter Ordnung entstehen, und erstrebt nicht bloss eine Kenntnis der äusseren Form dieser Curven, sondern erledigt auch die ersten Integrationsaufgaben, welche über die Quadratur, Rectification, Kubatur, Complanation gestellt werden können. Natürlich findet man keine Beziehungen auf die eleganten Sätze für die Inhalte der Fusspunktencurven und -Flächen bei Steiner („Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven“, Ges. W. II. 97-159) und bei spätern Geometern; überhaupt ist die Litteratur der neueren synthetischen Geometrie noch weniger berücksichtigt als die der analytischen. Lp.

H. Amstein. Notice sur un théorème relatif aux podaires d'un certain système de coniques. Bull. Soc. Vaud. (3) XXII. 87-95.

Sucht man den Flächeninhalt der Fusspunktencurve des Kegelschnittes $Ay^2-2Bxy+Cx^2-(AC-B^2)=0$ für den Nullpunkt, so findet man im Falle der Ellipse $\frac{1}{2}\pi(A+C)$, also ist dieser Inhalt unabhängig von B und constant, wenn $A+C$ constant bleibt. Setzt man also $B=f(A)$ und $A+C=$ const., so haben alle Ellipsen, die von dem Parameter A abhängen, in Bezug auf den Mittelpunkt Fusspunktencurven von demselben Inhalt. Der Verfasser untersucht die beiden Scharen von Ellipsen, welche durch die Bedingungen charakterisirt sind: 1) A und C constant, B veränderlich; 2) A und C veränderlich, B constant. Im zweiten Teile der Arbeit wird gezeigt, wie die Resultate der Untersuchung für die Hyperbel abzuändern sind. Lp.

H. Willig. Beiträge zur Kenntnis der negativen Fusspunktscurven, insbesondere derjenigen der Kegelschnitte. Diss. Giessen. 4°. 16 S.

Ph. Friedrich. Die rationale Plancurve vierter Ordnung im Zusammenhang mit der binären Form sechsten Grades. Diss. Giessen. 4°. 30 S.

E. Dewulf. Tangente et foyer de la focale de Quetelet. Mathesis. VI. 217-218. Mn.

W. J. C. Miller. Solution of question 7896. Ed. Times XLV. 75-77.

In einem Kreise vom Radius a ist im Abstande $a \sin\alpha$ vom Mittelpunkte eine feste Sehne AX gezogen; eine bewegliche Sehne QQ' schneidet AX in R unter rechten Winkeln; über QR und $Q'R$ als Durchmessern werden Kreise beschrieben, und an letztere von A aus die Tangenten gezogen. Dann ist der Ort der Berührungspunkte P, P' dieser Tangenten eine herzförmige Curve, welche in die Kardioide übergeht, wenn AX ein Durchmesser ist. Ist A der Pol, AX die Axe, und sind r, θ die Polarcoordinaten, so ist die Gleichung der Curve:

$$r(1+4\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}\theta) = 2a(\cos\alpha + 2\sin\alpha\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\theta).$$

Mehrere hierauf bezügliche Aufgaben finden ihre Lösung.

Lp.

E. Marx. Ueber einige Trisectionscurven. Pr. Gymn. Friedland. 17 S. 4° u. 2. Taf.

In einem Dreiecke ABC sei $A=\alpha$, $C=2\alpha$, also $B=\pi-3\alpha$. Setzt man der Reihe nach BC, AB, AC der Lage und Grösse nach als fest gegeben voraus, so ist im ersten Falle der Ort von A eine Pascal'sche Schnecke, im zweiten der Ort von C die Projection des Cartesischen Blattes, im dritten der Ort von

B eine Hyperbel mit der Excentricität 2. Ausser diesen drei Curven, welche zur Trisection eines Winkels dienen können (wie bekannt), werden vom Verfasser noch die folgenden zur Lösung dieser Aufgabe geeigneten Curven untersucht: 1) Der Ort eines Punktes, sodass die von ihm an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangenten mit einem festen Durchmesser des Kreises ein dem obigen ähnliches Dreieck bilden, $x^2(4a^2-y^2) = (y^2-2a^2)^2$. 2) Die Curve $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{a^2}$. Ferner 3) der Ort für die Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie *AB* fest gegeben ist, wenn die Halbirungslinie des Winkels *C* gleich einer Dreiecksseite *BC* ist, $y^2(a-2x) = x^2(3a-2x)$; oder wenn 4) die Mediane von *C* nach der Mitte von *AB* den Winkel *C* im Verhältnis 1:2 teilt, $4a^2x^2 = (x^2+y^2)\{(a-x)^2+y^2\}$. Die letzte Curve führt zu einer einfachen Näherungs-Construction mit Zirkel und Lineal.

Lp.

Lazzeri et Habich. Division d'un angle en parties égales. Mathesis. VI. 122-123.

Construction einer Curve, die zur Teilung eines Winkels in n gleiche Teile dient. Für $n=\infty$ verwandelt sie sich in die Quadratrix des Dinostratus.

Mn. (Lp.)

G. Maisano. Sulle tangenti doppie e d'inflessione [d…] curva generale de 5^0 ordine. Palermo Rend. I. 86-88

In dieser Note verwendet der Verfasser zur Untersu[…] der Doppeltangenten einer Curve fünften Grades die Bedingu[…] die er in seinem Aufsatze: „Sulla forma binaria di quint'o[…] (Mem. della R. Acc. dei Lincei. (3) XIV. 1884) als Existenzbe[…] gung zweier linearen Doppelfactore[…] binären F[…] fünften Grades aufgestellt hat.

Setzt man

$$f = a_x^5 = b_x^5 = \cdots;\ (abu)^4 a_x b_x = \Theta_x^2 u_\theta^4;$$
$$(bcu)^2 (acu)^2 (abu)^2 a_x b_x c_x = \Pi_x^3 u_\pi^6,$$
$$\Phi = (\Theta\Theta' u)^2 u_\theta^4 u_{\theta'}^4,$$
$$\Psi = (\Pi\Pi' u)^2 (\Pi''\Pi''' u)^2 (\Pi\Pi'' u)(\Pi'\Pi''' u)\, u_\pi^6 u_{\pi'}^6 u_{\pi''}^6 u_{\pi'''}^6,$$
$$X = (\Pi\Pi' u)^2 (\Pi\Theta u)(\Pi'\Theta u) u_\pi^6 u_{\pi'}^6 u_\theta^4,$$

so finden folgende Sätze statt:

I. Die 45 Wendetangenten der allgemeinen Curve fünfter Ordnung $f = 0$ sind die den drei Curven

$$(1) \qquad \Phi_{10} = 0, \quad \Psi_{20} = 0, \quad X_{20} = 0$$

gemeinsamen Tangenten.

II. Die 120 Doppeltangenten derselben Curve gehören auch den Curven an:

$$(2) \qquad \Phi^2 - 64X = 0, \quad \Phi^2 + 2^6 . 3^2 . \Psi = 0,$$

die auch von den Wendetangenten der Curve $f = 0$ berührt werden.

III. Die 20 . 30 den Curven (2) gemeinschaftlichen Tangenten sind die Doppeltangenten der Curve $f = 0$, achtmal gezählt, und die Wendetangenten, zweimal gezählt. La. (Lp.)

J. Wolstenholme, D. Edwardes, W. T. Mitchell. Solution of questions 7772 and 7840. Ed. Times XLIV. 88-90.

Die Curve $x^5 + y^5 + 3ax^2y^2 = a^3xy$ besitzt eine Schleife mit dem Inhalte $0{,}3a^2$; dies ist gleichzeitig der Inhalt der Fläche zwischen der Curve und ihrer Asymptote $5x + 5y + 3a = 0$. Diese und ähnliche Eigenschaften der Curve werden mit Hülfe der Parameterdarstellung bewiesen:

$$x = \frac{a\lambda^4}{1+\lambda^5}, \quad y = \frac{a\lambda}{1+\lambda^5}.$$

Setzt man ferner

$$x = \frac{a\lambda^{n+1}}{1+\lambda^{2n+1}}, \quad y = \frac{a\lambda^n}{1+\lambda^{2n+1}},$$

so gelangt man zu entsprechenden Sätzen für die Curve

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = ax^n y^n.$$

Lp.

H. KROPP. Erzeugnisse zweier eindeutig auf einander bezogener Unicursal-Curven. Pr. Höh. Bürg. Schule. Bochum.

Die Geraden, welche homologe Punkte zweier projectivisch bezogener Unicursalcurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung verbinden, umhüllen bekanntlich eine Curve $(m+n-r)^{ter}$ Klasse, $2(m+n-1-r)^{ter}$ Ordnung, die Wendepunkte nicht besitzt, wofern beide Curven r Punkte entsprechend mit einander gemein haben. Die Anzahl der Spitzen und der Doppeltangenten ist hiernach mit Hülfe der Plücker'schen Formeln zu ermitteln. Nachdem der Verfasser das erstere kurz erläutert hat, geht er zur Behandlung zweier Beispiele über. Das erste, sehr interessante Beispiel betrifft die Evolute des Central-Kegelschnittes. Die Normale eines Kegelschnittes enthält nämlich die Mittelpunkte P_3 und P_4 zweier Kreise, die alle Seiten des durch den betreffenden Curvenpunkt A und die beiden Brennpunkte bestimmten Dreieckes berühren. Die zugehörige Tangente aber schneidet auf den Tangenten in den Endpunkten der grossen Axe die Mittelpunkte P_1 und P_2 der beiden anderen Kreise aus, die alle drei Seiten des bezeichneten Dreiecks berühren. Nach dem bekannten elementaren Lehrsatz schneiden sich daher $F_1 P_1$ und $F_2 P_2$ in dem einen und $F_1 P_2$ und $F_2 P_1$ in dem anderen der beiden Punkte P_3 und P_4. Hiernach beschreiben A, P_3, P_4 drei zu einander projectivische Kegelschnitte, deren homologe Punkte immer auf derselben Kegelschnittnormale liegen. Wirklich ist auch die Evolute des Centralkegelschnittes von der vierten Klasse und der sechsten Ordnung, welche Zahlen aus dieser Entstehungsweise sich ergeben.

Weniger interessant ist die zweite Enveloppe. Dieselbe wird von der Geraden beschrieben, welche von dem obigen Dreieck $A F_1 F_2$ den Schwerpunkt S, den Höhenschnittpunkt H und den Mittelpunkt M des umschriebenen Kreises enthält. Der Schwerpunkt durchläuft einen zum gegebenen ähnlichen Kegelschnitt, der Höhenfusspunkt beschreibt eine Curve vierter Ordnung, die die beiden Brennpunkte und den unendlich fernen Punkt der Nebenaxe zu Doppelpunkten hat. Als Parameter λ wird im Fall der Hyperbel die Länge des Lotes eingeführt, das

sich vom Curvenpunkt aus auf die eine Asymptote fällen lässt. Die Gleichung von SH wird dann vom sechsten Grade in λ, und es ist daher die Hüllcurve von der sechsten Klasse und der 10ten Ordnung. Dass die Ordnungszahl der Curve nicht unter 10 herabsinken kann, wird an der Nebenaxe gezeigt, die der Ort der Mittelpunkte der AF_1F_2 umschriebenen Kreise ist; dieselbe hat 10 Punkte, die an vier Stellen im Endlichen vereinigt liegen, mit der Curve gemein.

Geht nun der Kegelschnitt in einen Kreis über, so geht die Schwerpunktscurve in einen Kreis über, während die bisherige Höhenpunktscurve in eine Curve vierter Ordnung sich verwandelt, welche mit dem Kreise seine unendlich fernen Punkte entsprechend gemein hat. Die Enveloppe ist daher nur noch von der sechsten Ordnung, was durch Aufstellung ihrer Gleichung bestätigt wird. Die Spitzen und Doppelpunkte der Curve, deren Zahl der Regel entspricht, werden aufgesucht. E. K.

H. Ekama. De figuren van Lissajous. Nieuw Archief XIII. 184-212.

Analytische Betrachtungen über die bekannten Figuren von Lissajous. Der Gegenstand ist auch in der Dissertation von A. Himstedt (Göttingen 1884, F. d. M. XVI. 1884. 654) behandelt, doch betrachtet dieser nur den Fall, dass beide Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen. In der vorliegenden Arbeit werden die Figuren möglichst allgemein behandelt, indem angenommen wird, dass die beiden Richtungen einen Winkel ω mit einander bilden. So wird erstens die allgemeine Gleichung der Figuren für ein schiefwinkliges Coordinatensystem mit dem Winkel ω aufgestellt und daraus ihre Gestalt abgeleitet. Die besonderen Punkte und Knoten werden bestimmt, die Asymptoten gesucht, die Krümmung in jedem Punkte der Bahn berechnet. In einem zweiten Teile wird der Zusammenhang zwischen den Lissajous'schen Figuren und den goniometrischen Functionen von Winkelsummen betrachtet und dieser Zusammenhang benutzt, um eingehender die verschiedenen Formen zu erkennen, in welchen

die Figuren bei verschiedenen Phasenunterschieden auftreten. Danach werden dieselben in Zeichnungen vorgeführt. G.

R. A. ROBERTS. On some properties of certain plain curves. Dublin Trans. XXVIII. 709-722.

Die Curven sind in der Gleichungsform enthalten:

$$x^n + y^n + z^n = 0.$$

Die besonders behandelten sind diejenigen für $n = 3$, $n = \frac{1}{3}$, $n = -2$ (Bernoulli's Lemniskate, bemerkenswert erscheint die Construction für die Polare eines Punktes), $n = \frac{2}{3}$.

Gbs. (Lp.)

R. GODEFROY. Théorèmes sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques. Nouv. Ann. (3) V. 272-279.

Bei Ellipsen m^{ter} Ordnung, d. h. Curven, deren Gleichung $ex^m + fy^m = g$ ist, findet der Verfasser die folgende Formel für den Krümmungsradius R eines Punktes: $\frac{1}{R} = (m-1)\left(\frac{\sin B}{a} + \frac{\sin A}{b}\right)$, wo A und B die Winkel sind, welche die Tangente des Punktes mit den Coordinatenaxen bildet, und wo a und b die Abschnitte auf der Tangente des Punktes sind, die von ihm bis zu den Coordinatenaxen gehen. Hieraus wird das analoge Resultat für höhere Parabeln, d. h. Curven abgeleitet, welche die Gleichung $y^m = hx^n$ haben. Die Specialisirung auf gewöhnliche Kegelschnitte führt zu bekannten Relationen des Krümmungsradius.

Scht.

M. D'OCAGNE. Sur l'enveloppe de certaines droites variables. Nouv. Ann. (3) V. 88-97.

Es ist dies die Fortsetzung einer Arbeit, über welche F. d. M. XV. 1883. 622 referirt ist. Hier wird nun eine feste Curve C angenommen, und eine Reihe von Fragen folgend

wortet. Das Flächenstück zwischen einem auf C befindlichen Bogen (ab) und der zugehörigen Sehne soll constant sein; wo berührt dann die Sehne ihre Enveloppe? Ebenso, wenn die Differenz zwischen dem Bogen (ab) und seiner Sehne constant ist; ferner wenn die Projection der Sehne (ab) auf eine feste Axe constant ist; dann weiter, wenn der Bogen (ab) mit zwei von einem festen Punkte ausgehenden Geraden einen Sector von constantem Flächeninhalt bilden soll. Und so noch viele andere Fragen, die ohne viel Rechnungsaufwand auf sehr einfache Weise beantwortet werden. Mz.

A. Bassani. Sulle curve $r^m \cos m\theta = a^m$. Batt. G. XXIV. 23-43.

Die Curven, deren Gleichung in Polarcoordinaten r, θ

$$r^m \cos m\theta = a^m$$

ist, kommen bei manchen geometrischen und mechanischen Aufgaben vor. Sie besitzen zahlreiche schöne Eigenschaften, welche von verschiedenen Geometern entdeckt sind; es genüge, die geometrische Darstellung der Euler'schen Integrale durch sie als Beispiel anzuführen (Serret, Journ. de Math. (1) VII) und im übrigen auf den von Herrn Hâton de la Goupillière in den Nouv. Ann. (2) XV. 1876 veröffentlichten Aufsatz hinzuweisen. Herr Bassani hat es sich zur Aufgabe gestellt, unter Anwendung der Infinitesimalrechnung die schon bekannten Resultate zusammenzustellen und sie an den Stellen, wo eine Lücke vorhanden ist, zu ergänzen. Da es unmöglich ist, alle vom Verfasser bewiesenen Lehrsätze abzudrucken, so beschränken wir uns auf die Empfehlung des Studiums dieser Arbeit für alle, welche elementare Beispiele für die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Theorie der ebenen Curven suchen.

La. (Lp.)

G. Fouret. Sur une généralisation de la quadratrice. Nouv. Ann. (3) V. 39-43.

Die Polargleichung der Quadratrix des Dinostratus kann man schreiben:

$$\varrho = \frac{a\omega}{\sin\omega}.$$

Hier wird nun eine allgemeinere Curve, nämlich diejenige von der Gleichung:

$$\varrho = \frac{a(\omega - \alpha)}{\sin\omega}$$

betrachtet. Es wird gezeigt, wie einige Eigenschaften der Quadratrix auf die allgemeinere Curve sich übertragen lassen; und zum Schluss wird an letztere in einem beliebigen Punkte eine Tangente gelegt; es wird bewiesen, dass diese Tangente mit dem Radius vector, der nach dem Berührungspunkte hingeht, einen Winkel bildet, der demjenigen gleich ist, unter welchem dieser Radius vector von einem festen Punkte aus gesehen wird.

Mz.

M. du Châtenet. Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant. Nouv. Ann. (3) V. 233-237.

H. Brocard. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) V. 397-398.

1) Die ebenen Curven, bei denen sich die Projection des Krümmungsradius auf den Vector zu diesem verhält, wie $1:m$, haben im allgemeinen, d. h. wenn $m \lessgtr 1$ ist, die Polargleichung

$$r^{m-1} = a^{m-1}\sin(m-1)\varphi,$$

oder bei andrer Wahl der Anfangsrichtung

$$r^{m-1} = a^{m-1}\cos(m-1)\omega.$$

Für $m = 1$ werden es logarithmische Spiralen.

2) Herr Brocard macht darauf aufmerksam, dass die in der vorigen Arbeit gefundenen Resultate schon seit langer Zeit bekannt sind, und führt zum Belege eine Reihe älterer Arbeiten an.

A.

A. V. Lane. Note on a roulette. Newcomb Am. J. VIII. 132-137.

Der Herr Verfasser behandelt diejenige C[illegible] [illegible]lche der

Scheitel der grossen Axe einer Ellipse beschreibt, während letztere auf einer Geraden rollt. Diese Gerade wird zur X-Axe genommen, und Coordinatenanfang ist der Scheitel der beweglichen Ellipse im Anfang der Bewegung. Wird zur Abkürzung

$$\int_0^\alpha \frac{a^2b^2d\alpha}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = f(\alpha)$$

gesetzt, so lauten die Gleichungen dieser Rollcurve:

$$x = f(\alpha) + \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}} - a\sin\alpha,$$

$$y = (a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} - a\cos\alpha.$$

Hier ist $c^2 = a^2-b^2$ und α der Winkel, den die Ordinate des Centrums der beweglichen Ellipse mit dem Radius bildet, der vom Centrum nach dem Scheitel (x, y) gezogen ist. Es wird dann die Evolute dieser Curve gleichfalls durch zwei Gleichungen in ähnlicher Weise definirt. Nach einer Discussion über die Gestalt der Rollcurve wird ihre Rectification und ihre Quadratur vorgenommen. Mz.

E. Habich. Sur une question de roulettes. Mathesis. VI. 103-106.

Die Linie, auf der man einen Kreis rollen lassen muss, damit ein beliebiger Punkt seiner Ebene eine Gerade beschreibe, ist die Delaunay'sche Curve (Liouville J. VI. 1846. 309). Eine auf elementarem Wege geführte Untersuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, dass eine Umdrehungsoberfläche eine mittlere constante Krümmung habe. Mn. (Lp.)

W. Reinhardt. Untersuchung einiger durch das Rollen von Kegelschnitten auf einer Geraden entstehenden Curven. Diss. Marburg. 8°. 30 S.

J. Neuberg. Note sur la strophoïde. Mathesis. VI. 219-223.

Tangente, Normale, Krümmungsradius dieser Curven, nach verschiedenen Methoden abgeleitet. Mn. (Lp.)

P. MANSION. Longueur de la boucle de la logocyclique ou strophoïde. Mathesis. VI. 108-110.

Mn.

K. BOBEK. Ueber hyperelliptische Curven. Wien. Ber. XCIII. 601-617.

Auf Grund der Methoden von Brill und Nöther werden in der vorliegenden Note eine Reihe merkwürdiger Sätze über hyperelliptische Curven bewiesen. Eine solche Curve trägt bekanntlich eine einzige lineare Schar $g_2^{(1)}$ von Punktepaaren, wenn ihr Geschlecht p grösser ist als Eins, auf welchen Fall Herr Bobek seine Betrachtungen beschränkt. Die adjungirten Curven φ der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, unter m die Ordnung der Grundcurve verstanden, haben ferner die Eigenschaft, dass ihre $2p-2$ beweglichen Schnittpunkte mit der Grundcurve stets aus $p-1$ Punktepaaren der Schar $g_2^{(1)}$ bestehen. Herr Bobek beweist nun zunächst, dass die Ordnung einer hyperelliptischen Curve vom Geschlechte p nicht kleiner als $p+2$ sein kann. Hat die Ordnung den kleinsten Wert $p+2$, welcher zulässig ist, so besitzt die Curve notwendig einen p-fachen Punkt, und die durch diesen Punkt laufenden Strahlen schneiden aus der Curve die Schar $g_2^{(1)}$ aus. Zugleich zerfällt jede Curve φ in $p-1$ durch jenen Punkt laufende Strahlen. Betrachtet man eine hyperelliptische Curve von beliebiger Ordnung $m \geqq p+2$, so erhebt sich die Frage nach der Enveloppe derjenigen Geraden, welche je die Punkte eines Paares der Schar $g_2^{(1)}$ verbinden. Diese Enveloppe ist eine rationale Curve $\mathfrak{C}_k$ der Klasse $k = m-p-1$. Besitzt die hyperelliptische Curve einen Doppelpunkt, so kann man sie auffassen als Grenzfall einer Curve von nächst höherem Geschlecht (indem die Auflösung eines Doppelpunktes das Geschlecht um eine Einheit erhöht). Bei dieser Auffassung wird die Curve $\mathfrak{C}_k$ reductibel, indem sich von ihr das Strahlenbüschel durch jenen Doppelpunkt absondert. Die beiden in dem Doppelpunkt vereinigt liegenden Punkte der Curve bilden dann ein Paar der $g_2^{(1)}$, welches der Verfasser als „singulär“ bezeichnet. Ist ein solches singuläres Paar nicht vorhanden, so ist $\mathfrak{C}_k$ entweder irreductibel, oder eine mehr-

fach, etwa k_1-fach zählende Enveloppe $\mathfrak{C}_{k'}$, wo dann $k = k' . k_1$ sein wird. Der Fall $k' = 1$ wird näher betrachtet und in Betreff desselben auf eine frühere Arbeit des Verfassers (Wien. Ber. XCI; F. d. M. XVII. 1885. 597) verwiesen. Der Hauptsatz der Note bezieht sich nun auf den Fall, wo $\mathfrak{C}_k$ irreductibel und zugleich $k < p$ ist. Er lautet:

„Zieht man von einem Punkte x der Ebene die k Tangenten von $\mathfrak{C}_k$, welche die Paare $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, ..., $a_k\alpha_k$ tragen, so geht jede adjungirte Curve φ der $(m-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Paare $a_1\alpha_1$, $a_2\alpha_2$, ..., $a_k\alpha_k$ enthält, auch durch den Punkt x."

An diesen Satz knüpfen sich weitere Folgerungen. Man nehme $p-k-1$ feste Paare der $g_2^{(1)}$ und betrachte alle diese Paare enthaltenden Curven φ. Letztere bilden eine k-fach unendlich lineare Schar und durch die zu einem Punkte x gehörigen Paare $a_1\alpha_1$, ..., $a_k\alpha_k$ wird daher eine einzige Curve φ_x aus dieser Schar hindurchgehen. Die Gesamtheit der Curven φ_x bildet nun ein lineares Netz von Curven $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, dergestalt, dass φ_x einen Curvenbüschel beschreibt, wenn der Punkt x eine Gerade durchläuft. Auf dieser Geraden liegen immer $m-4$ Basispunkte des Büschels und jeder weitere Basispunkt ist ein gemeinsamer Punkt aller Curven des Netzes. Der Schluss der Note ist dem besonders interessanten Falle $m = p+3$ gewidmet, in welchem $k = 2$, also $\mathfrak{C}_k$ ein Kegelschnitt ist. Es wird gezeigt, wie man die diesem Falle entsprechenden hyperelliptischen Curven, ausgehend von dem Kegelschnitte $\mathfrak{C}_k$, erzeugen kann, und es wird die Gleichung dieser Curven aufgestellt.

Hz.

K. Bobek. Ueber hyperelliptische Curven. (Zweite Mitteilung.) Wien. Ber. XCIV. 861-873.

Die Gleichung einer hyperelliptischen Curve vom Geschlechte p und der Ordnung $p+3$ lässt sich, wie der Verfasser in der ersten Mitteilung gezeigt hat, in die Form setzen:

$$(1) \qquad \Phi \equiv \Delta \sum_1^p {}_i \sum_1^p {}_k \frac{\Theta_i \Theta_k}{A_i A_k} S_{i,k} = 0,$$

wobei $\Delta = A_1 A_2 \ldots A_p$, ferner $A_i \equiv T_0 + S\lambda_i + T_1 \lambda_i^2 = 0$ Tangenten des festen Kegelschnitts

$$(2) \qquad S^2 - 4 T_0 T_1 = 0$$

sind, Θ_i quadratische Functionen der Coordinaten bedeuten, endlich $S_{ik} = 0$ die zu $A_i = 0$ und $A_k = 0$ gehörige Berührungssehne darstellt, welche für $i = k$ mit der Tangente $A_i = 0$ zusammenfällt. Hiervon ausgehend, beweist der Verfasser zunächst den Satz:

„Eliminirt man λ aus den beiden Gleichungen

$$(3) \qquad A \equiv T_0 + S\lambda + T_1 \lambda^2 = 0,$$

$$(4) \qquad \Theta \equiv \prod_1^p{}_k (\lambda - \lambda_k) . \sum_1^p{}_i \frac{\Theta_i}{\lambda - \lambda_i},$$

so erhält man die Gleichung einer hyperelliptischen Curve von der Ordnung $p+3$ und dem Geschlechte p."

Dass diese Elimination auf die Gleichung (1) führt, erkennt man direct in folgender Weise. Man bezeichne mit λ, λ' die Wurzeln von (3) und zwar mit λ' diejenige, welche auch (4) befriedigt. Es ist dann offenbar

$$T_1 \Pi_k (\lambda - \lambda_k)(\lambda' - \lambda_k) . \Sigma_i \frac{\Theta_i (\lambda - \lambda_i)}{T_1 (\lambda - \lambda_i)(\lambda' - \lambda_i)} = 0$$

oder

$$(5) \qquad \Psi \equiv \Delta \sum_1^p{}_i \frac{\Theta_i}{A_i} (\lambda - \lambda_i) = 0.$$

Setzt man nun den aus vorstehender Gleichung entnommenen Wert von λ in (3) ein, so erhält man nach einer leichten Umformung genau die Gleichung $\Phi = 0$. Die Gleichung (5) stellt einen Büschel von Curven $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, falls λ als ein veränderlicher Parameter angesehen wird, und es zeigt sich, dass die Curve $\Phi = 0$ $\frac{1}{2}(p+2)(p-1) + 2$ von den Basispunkten dieses Büschels zu Doppelpunkten hat. Daher sind die Curven $\Psi = 0$ zu $\Phi = 0$ adjungirt. Wählt man insbesondere $\lambda = \lambda_k$, so zerfällt $\Psi = 0$ in $A_k = 0$ und die Curve p^{ter} Ordnung

$$(6) \qquad \varphi_k \equiv \frac{\Delta}{A_k} \sum_1^p{}_i \frac{\Theta_i}{A_i} (\lambda_i - \lambda_k) = 0,$$

und es gilt der Satz:

„Die Curven $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., $\varphi_p = 0$ sind p linear unabhängige zu $\Phi = 0$ adjungirte Curven p^{ter} Ordnung." Betrachtet man irgend eine φ-Curve

$$(7) \qquad \varphi \equiv c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_p\varphi_p = 0,$$

so schneidet dieselbe $\Phi = 0$ in $p-1$ Paaren von Punkten, deren Verbindungsgeraden $p-1$ Tangenten

$$(8) \qquad B_h \equiv T_0 + S\mu_h + T_1\mu_h^2 = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1)$$

des Kegelschnitts (2) sind. Wenn umgekehrt die $p-1$ Tangenten $B_h = 0$ gegeben sind, so ist durch dieselben die Curve $\varphi = 0$ eindeutig bestimmt. Es erwächst daher die Aufgabe, die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ aus den $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ zu berechnen. Der Verfasser findet, dass bei geeigneter Fixirung der in φ enthaltenen multiplicativen Constanten

$$(9) \qquad c_k = \frac{\prod_1^{p-1}{}_h(\mu_h - \lambda_k)}{\prod_1^{p}{}'_h(\lambda_h - \lambda_k)}$$

wird, wo im Nenner der verschwindende Factor $\lambda_k - \lambda_k$ fortzulassen ist, was durch den Accent angedeutet werden soll. Die Function φ, welche zu den Tangenten $B_h = 0$ gehört, lässt sich auch noch in anderer Weise darstellen. Man setze nämlich

$$(10) \qquad \vartheta_h = \prod_1^{p}{}_k(\mu_h - \lambda_k) \cdot \sum_1^{p}{}_i \frac{\Theta_i}{\mu_h - \lambda_i}, \qquad \alpha_h = \frac{1}{\prod_1^{p-1}{}'_k(\mu_h - \mu_k)},$$

so ist

$$(11) \qquad \varphi \equiv B_1 B_2 \ldots B_{p-1} \sum_1^{p-1}{}_h \frac{\alpha_h \vartheta_h}{B_h}.$$

Bei der Bildung von α_h ist wiederum im Nenner der verschwindende Factor $\mu_h - \mu_h$ fortzulassen. Auch die Aufgabe, die Werte von $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ zu bestimmen, wenn die $c_1, c_2, \ldots, c_p$ gegeben sind, gestattet eine elegante Lösung. Man rändere nämlich die Determinante $|\lambda_i^k|$, welche gleich dem Differenzenproducte der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ist, horizontal mit $1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^{p-1}$ und vertical mit $c_1\Pi'(\lambda_h - \lambda_1)$, $c_2\Pi'(\lambda_h - \lambda_2)$, ..., $c_p\Pi'(\lambda_h - \lambda_p)$. Vergleicht man diese geränderte Determinante mit Null, so entsteht eine

Gleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in μ, deren Wurzeln die gesuchten Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ sind. Hz.

G. de Longchamps. Sur la potentielle triangulaire. Mathesis. VI. 246-248.

Studie über die Curve, deren Gleichung in barycentrischen Coordinaten:

$$x : y : z = a^p : b^p : c^p$$

ist, worin a, b, c die Seiten des Dreiecks bedeuten.

Mn. (Lp.)

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

F. Schur. Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmungsmasses mit den projectiven Räumen. Klein Ann. XXVII. 537-567.

Herr Beltrami hat (Annali di Mat. (2) II, p. 232.) gezeigt, dass jeder Raum, für welchen sich das Linienelement in der von Riemann gegebenen Form ausdrückt, und den er einen projectiven Raum nennt, die Eigenschaft besitzt, dass die Gleichungen der kürzesten Linien in demselben linear sind, und dass solche Räume constantes Riemann'sches Krümmungsmass haben. Herr Lipschitz hat umgekehrt bewiesen (Borch. Journ. LXXII. 1), dass jeder Raum constanten Riemann'schen Krümmungsmasses ein projectiver ist.

Der Herr Verfasser hat diese Untersuchung von neuem aufgenommen, hauptsächlich in der Absicht, dem Beweise eine einfachere Gestalt zu geben. Eine solche Vereinfachung hat er

durch einige geometrische Betrachtungen erlangt. Ein projectiver Raum ist nämlich dadurch vollständig charakterisirt, dass jede seiner „geodätischen Flächen“ zweifach unendlich viele seiner geodätischen Linien enthält. (Unter geodätischen Flächen sind die Orte aller geodätischen Linien verstanden, welche in einem Punkte P eine durch P gehende Ebene berühren). Fragt man nun, ob es Räume giebt, welche diese Eigenschaft nicht allgemein besitzen, sondern nur für die durch einen festen Punkt gehenden Flächen, so lässt sich für sie das Linienelement aufstellen, und es folgen gewisse Eigenschaften des Krümmungsmasses; und daraus lässt sich dann der Beweis, um den es sich handelt, leicht finden.

Diesen specielleren Untersuchungen ist eine vollständige Begründung der Begriffe und Sätze der Theorie der Räume vorausgeschickt, und am Schlusse finden sich Betrachtungen über Verallgemeinerungen des Riemann'schen Krümmungsmasses.

A.

E. Picard. Sur la transformation des surfaces algébriques en elles-mêmes. C. R. CIII. 517-520, 549-552.

In Analogie mit dem von Herrn H. A. Schwarz im Journal für Math. LXXXVII aufgestellten und bewiesenen Satz, dass die Curven vom Geschlechte 0 und 1 die einzigen sind, welche durch eine Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich übergehen, stellt der Verfasser in der ersten Mitteilung die Behauptung auf, dass diejenigen algebraischen Flächen, welche durch eine von zwei Parametern abhängige rationale eindeutig umkehrbare Substitution in sich übergehen, vom Geschlechte 0 oder 1 sind (im Sinne des Herrn Noether). Es wird zuerst für den von Herrn Schwarz aufgestellten Satz ein anderer sehr einfacher Beweis gegeben, welcher lehrt, dass die Anzahl der unabhängigen Integrale erster Gattung, d. h. das Geschlecht der betreffenden Curve, nicht >1 sein kann, und gezeigt, dass sich dieser Beweis Schritt für Schritt auch auf die in Rede stehenden Flächen anwenden lässt.

In der zweiten Mitteilung wird zuerst bewiesen, dass, wenn die Substitution nur einen veränderlichen Parameter besitzt, das Flächengeschlecht ein beliebiges sein kann, und zwar sind die fraglichen Flächen durch folgende Bedingung festgelegt: Sind x_α ($\alpha = 1, 2, 3$) die Coordinaten eines Flächenpunktes, $\lambda, \mu; \lambda', \mu'$ vier Parameter, und setzt man

$$x_\alpha = R_\alpha(\lambda, \mu, \lambda', \mu'),$$

indem man die Parameter durch die Relationen $F(\lambda, \mu) = 0$, $f(\lambda' \mu') = 0$ verbindet, so muss $F = 0$ vom Geschlechte 1, $f = 0$ vom Geschlechte $p > 1$ sein.

Fasst man hingegen den Fall ins Auge, dass die unendliche Zahl der Substitutionen nicht notwendig von willkürlichen Parametern abhängt, so ergiebt sich der Satz: Wenn das Geschlecht der Fläche > 1 ist, so giebt es überhaupt nur eine endliche Zahl von Substitutionen, welche die Fläche in sich überführen, oder sie enthalten einen veränderlichen Parameter, in welchem Falle die Flächen zu den in der ersten Mitteilung behandelten gehören. Die zum Beweise dieses Satzes notwendige Bedingung dafür, dass die zur gegebenen adjungirte Fläche $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung die erstere (ausser in den singulären Linien und Punkten) in einem Punkte berühre: $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_p) = 0$ ist vom Grade D, welcher für alle die Flächen, die sich punktweise entsprechen, invariant ist. (Die A_μ sind die p willkürlichen Constanten, welche in der Gleichung der adjungirten Fläche $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung auftreten.) Setzt man hier $A_5 = A_6 = \cdots = A_p = 0$ und $\frac{A_1}{A_4} = x$, $\frac{A_2}{A_4} = y$, $\frac{A_3}{A_4} = z$, so geht die Relation über in die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0,$$

die als Gleichung einer Fläche aufgefasst werden kann, welche der gegebenen Fläche Punkt für Punkt entspricht. Daraus folgt, dass die algebraischen Flächen, welche dasselbe D besitzen, nur eine begrenzte Zahl von Klassen bilden. Nach Herrn Picard's Ansicht muss dieses D in der Flächentheorie der Geschlechtszahl

p an die Seite gestellt werden. Die analogen Betrachtungen für die Ebene ergeben, dass hier $D = 6p-6$ ist. Bm.

E. Picard. Sur la transformation des surfaces et sur une classe d'équations différentielles. C. R. CIII. 635-638.

Diese Note schliesst sich an zwei vorhergehende Mitteilungen, die im voranstehenden Referat besprochen sind, an, indem der Verfasser eine Anwendung seiner dort angestellten Betrachtungen auf eine Klasse von Differentialgleichungen giebt. Bedeutet nämlich in der Differentialgleichung

$$f(y, y', y'') = 0$$

f ein Polynom, sind y' und y'' die beiden ersten Abgeleiteten von y nach x, und setzt man voraus, dass das allgemeine Integral dieser Gleichung eine eindeutige Function von x ist, die nur im Unendlichen eine wesentlich singuläre Stelle besitzt, so ergiebt sich, dass das Geschlecht der Differentialgleichung (dieselbe als Gleichung einer Fläche betrachtet) 0 oder 1 sein muss.

Das inverse Problem: zu bestimmen, ob die obige Differentialgleichung mit Hülfe Abel'scher Functionen integrirt werden kann, wird für den Fall, dass das Geschlecht der Fläche 1 ist, vollständig gelöst. Bm.

E. Picard. Sur les surfaces algébriques susceptibles d'une double infinité de transformations birationnelles. C. R. CIII. 730-732.

Anschliessend an den in einer früheren Note (cf. p. 714) mitgeteilten Satz, dass die Flächen, welche eine doppelt unendliche Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Substitutionen zulassen, vom Geschlechte 0 oder 1 sein müssen, untersucht der Autor diese Flächen näher und gelangt zu dem Resultate, dass sich die Coordinaten irgend eines Flächenpunktes als eindeutige vierfach periodische Functionen zweier Parameter darstellen lassen müssen. Dieses Resultat erlaubt ihm dann den Satz auszusprechen, dass die in der Note C. R. CIII. 635-638 behandelte Differentialgleichung

$$f(y, y' y'') = 0,$$

wo f ein Polynom ist und das allgemeine Integral als eindeutig vorausgesetzt wird, als Gleichung einer Fläche betrachtet, eine Transformation der fraglichen Art mit mindestens einem willkürlichen Parameter zulässt. y, y', y'' lassen sich dann im allgemeinen durch Abel'sche Functionen zweier Parameter ausdrücken. Enthält aber die Transformation nur einen Parameter, so wird die Integration durch elliptische Functionen geleistet. Hiermit sind die Mittel zu einem eingehenden Studium der obigen Differentialgleichung gegeben. Der Verfasser giebt als vorläufiges Resultat seiner diesbezüglichen Untersuchungen, über die er eine grössere Abhandlung verspricht, den Satz: „In dem speciellen Falle, dass y, y', y'' selbst eindeutige Functionen sind, welche thatsächlich vier Periodenpaare besitzen, muss das allgemeine Integral der Differentialgleichung notwendig die Gestalt

$$y = \varphi(ax + C,\ a'x + C')$$

annehmen, woselbst a und a' zwei Constante, C und C' willkürlich sind und $\varphi(u, v)$ eine vierfach periodische Function von u und v repräsentirt". Bm.

H. Poincaré. Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes. C. R. CIII. 732-734.

Es wird hier der von Herrn Picard C. R. CIII. 730-732 aufgestellte und bewiesene Satz, dass die Coordinaten einer Fläche, welche eine doppelt unendliche Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Substitutionen zulässt, durch Abel'sche Functionen eines Parameters ausgedrückt werden können, noch einmal bewiesen. Durch eine kurze gruppentheoretische Betrachtung ergiebt sich zunächst das allgemein wichtige Theorem, dass drei Functionen zweier Variabeln, die ein Additionstheorem besitzen, in der ganzen Ebene eindeutig sind. Dabei ist zu bemerken, dass drei Functionen x, y, z von zwei Veränderlichen t, u nach des Verfassers Definition dann ein Additionstheorem haben, wenn ihre Werte für $t = t_1 + t_2$, $u = u_1 + u_2$ rationale Functionen der Werte sind, die sie für $t = t_1$ und $u = u_1$ einerseits und für $t = t_2$, $u = u_2$ andererseits annehmen. Hieraus

folgt dann leicht der Beweis des oben erwähnten Satzes von Picard, und es ergiebt sich ferner noch, dass die Bedingungen, welche Herr Fuchs dafür aufstellte, dass das allgemeine Integral einer Differentialgleichung nur eine endliche Zahl singulärer Stellen besitzt, nicht bloss im Falle der Differentialgleichungen erster Ordnung nur dann erfüllt werden, wenn man dieselben auf lineare Differentialgleichungen zurückführen kann, sondern dass dies auch für Gleichungen höheren Grades der Fall ist.

Bm.

A. R. Johnson. On Cayley's differential equation for orthogonal surfaces. Mess. XVI. 27-33.

A. R. Johnson. Correction. Mess. XVI. 111.

In diesem Artikel wird die fragliche Differentialgleichung als ein besonderer Fall der Differentialgleichung von Oberflächen erhalten, deren Haupttangenten sich in einer vorgegebenen Weise drehen, wenn der Berührungspunkt längs einer Trajectorie wandert. Die Form der Coefficienten wird angegeben, und es wird dargethan, dass sie alle in einem Nabelpunkte verschwinden. Ein kurzer Abriss von Catalan's Methode (C. R. LXXIX) zur Auffindung der anderen beiden Gleichungen eines dreifach-orthogonalen Systems, von welchem eins gegeben ist, wird hinzugefügt.

Glr. (Lp.)

G. S. Carr. Proof of the formula for the torsion of a geodesic. Mess. XVI. 110.

Beweis der bekannten Formel für den Radius σ der Torsion:

$$\frac{1}{\sigma} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Glr. (Lp.)

H. le Pont. Note sur les lignes asymptotiques et les lignes de courbure. Teixeira J. VIII. 43-45.

Der Verfasser beweist, dass die abwickelbaren Flächen die

einzigen sind, welche die Eigenschaft haben, dass das eine ihrer beiden Systeme von asymptotischen Curven übereinstimmt mit dem einen System der Krümmungslinien; und dass die Ebene die einzige Oberfläche ist, für welche beide Systeme der asymptotischen Curven zu gleicher Zeit Krümmungslinien sind.

Tx. (Hch.)

V. Lac de Bosredon. Étude sur les sections planes des surfaces. Théorie nouvelle des plans cycliques et des ombilics. Nouv. Ann. (3) V. 186-200, 214-223.

Es wird eine Methode besprochen, um bei rechtwinkligen Coordinaten die Durchschnittscurve einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ und einer Ebene $Ax + By + Cz = 0$ auf ein gewisses in dieser Ebene liegendes rechtwinkliges Coordinatensystem zu beziehen. Diese Methode wird angewandt zur Ermittelung der Kreisschnitte und der Nabelpunkte von Flächen zweiter Ordnung. Neues enthält die Arbeit nicht. A.

Bioche. Sur un mémoire de Poisson. S. M. F. Bull. XIV. 13-18.

Poisson hat in einer Abhandlung vom Jahre 1832, welche in der Pariser Akademie vorgelesen und später in Crelle's Journal und im J. de l'Éc. Polyt. veröffentlicht ist, im Anschluss an die Theoreme von Euler und Monge die Bemerkung gemacht, dass es einfache Punkte der Fläche mit einer einzigen Tangentialebene giebt, für welche die allgemeinen Gesetze der Krümmung nicht gelten.

Der Herr Verfasser weist nach, dass solche Punkte, wenn sie bei einer algebraischen Fläche vorkommen, im Sinne der algebraischen Theorie nicht als einfache Punkte gelten können, dass vielmehr, wenn die Gleichung von der Form $F(x, y, z) = 0$ ist, die drei partiellen Ableitungen von F für einen solchen Punkt verschwinden müssen, und knüpft daran noch einige Bemerkungen über die Zahl der Maxima und Minima der Krümmungen der Normalschnitte in einem solchen Punkte. A.

G. MORERA. Sui sistemi di superficie e le loro trajettorie ortogonali. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 282-285.

Ist w eine Function der drei rechtwinkligen Coordinaten x_1, x_2, x_3, so entspricht jedem constanten Werte von w eine Fläche, und allen möglichen Constanten eine Flächenschar.

Die orthogonalen Trajectorien dieser Flächenschar sind bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\Delta w}} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo $\Delta w = \sum_i \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2$.

Das Bogenelement auf einer solchen Trajectorie zwischen den benachbarten Flächen w und $w + dw$ ist $\frac{dw}{\sqrt{\Delta w}}$, bleibt also constant für alle Punkte, für welche $\Delta w =$ constant ist. Deshalb nennt der Herr Verfasser die Linien, in welchen die Fläche w von den Flächen $\Delta w =$ const. geschnitten wird, Aequidistanzlinien.

Die Normalebene einer solchen Linie fällt zusammen mit der Schmiegungsebene der rechtwinkligen Trajectorie.

Sind die Flächen $\Delta w =$ const. identisch mit den Flächen $w =$ const., ist also $\Delta w = f(w)$, so sind die orthogonalen Trajectorien gerade Linien, die Flächen w also Parallelflächen.

Im allgemeinen Falle, wo Aequidistanzlinien existiren, kann man noch auf der Fläche w das System der orthogonalen Trajectorien derselben bilden, und wenn man das Linienelement einer solchen mit ∂n_p bezeichnet, so ergiebt sich für die Krümmung der orthogonalen Trajectorien der Flächen w die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n_p} \lg \Delta w.$$

A.

R. HOPPE. Ueber Variation von Geraden, die an eine Fläche geknüpft sind. Hoppe Arch. (2) III. 290-301.

Die Arbeit schliesst sich an eine Abhandlung von Issoly: „Sur les diverses courbures des lignes qu'on peut tracer sur une

surface". Nouv. Ann. (3) III. 522-527 (Ref. F. d. M. 1884. XVI. 660) an, indem sie die dort gefundenen Resultate nach den Principien der Curven und Flächentheorie des Herrn Verfassers zusammenhängend entwickelt, geometrisch einfach deutet und in mehrfacher Hinsicht erweitert. Sind u und v orthogonale Parameter einer Fläche, so seien in einem Punkte P der Fläche die Tangenten der beiden Parameterlinien und die Flächennormale construirt. Dann handelt es sich um die Variation dieser drei Geraden beim Uebergang zu einem Nachbarpunkte, die der Herr Verfasser auf kinematischer Grundlage untersucht. A.

J. Weingarten. Ueber die Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. Kronecker J. C. 296-310.

J. Weingarten. Ueber die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. Berl. Ber. 83-91.

1. Nach einer von Jellet (Dublin Trans. XXII. 1883) ausgesprochenen Bemerkung ist eine biegsame und unausdehnbare Fläche mit positivem Krümmungsmass nicht deformirbar, wenn man ein in ihr befindliches Curvenstück festhält; dagegen kann eine solche mit negativer Krümmung noch deformirt werden, wenn man eine ihrer asymptotischen Linien festhält. Da aber die Schlüsse, durch welche dieses Resultat gewonnen ist, nicht einwandfrei sind, so hat der Herr Verfasser die Frage noch einmal aufgenommen. Er geht zu diesem Zwecke von zwei aufeinander abwickelbaren, sonst aber beliebig liegenden Flächen S' und S'' aus, bei denen die zu denselben Parametern p und q gehörigen Punkte einander entsprechen. Der Ort der Mitten der Verbindungslinie entsprechender Punkte heisst die Mittelfläche S. Sind die Coordinaten eines Punktes derselben x, y, z, so sind die der entsprechenden Punkte auf S' und S'' bezüglich $x\pm u$, $y\pm v$, $z\pm w$, und die Bedingungen lassen sich, wenn das Quadrat des Linienelementes auf S die Form hat

$$a_{1,1}\,du^2+2a_{1,2}\,du\,dv+a_{2,2}\,dv^2,$$

und gesetzt wird

$$a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}^2=a,$$

folgendermassen darstellen:

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial u}{\partial p}=0,\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}=\varphi\sqrt{a},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial p}=-\varphi\sqrt{a},\quad \Sigma\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial u}{\partial q}=0.$$

Für die Hülfsfunction φ ergiebt sich durch Elimination von u, v und w eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Jedem Integral dieser Gleichung entspricht bei gegebener Mittelfläche S ein System von entsprechenden Flächenpaaren S' und S''.

Setzt man nun voraus, dass auf S' und S'' zwei Linienstücke sich congruent entsprechen, dann können die Flächen so gelegt werden, dass diese Linienstücke zusammenfallen, und es kann diese Linie zur Parameterlinie $p=p_0$ gemacht werden, so dass für $p=p_0$ die Grössen u, v, w verschwinden. Hieraus folgt dann im allgemeinen mit Hülfe der aufgestellten Gleichungen, dass die Function φ in der Umgebung der betrachteten Linie verschwindet, und demgemäss auch u, v, w. Es fällt also dann ein gewisses endliches Stück beider Flächen S' und S'' mit S zusammen. Die Schlüsse sind aber nicht gültig, wenn das gemeinsame Linienstück einer ebenen Curve oder einer asymptotischen Linie von S angehört, und auch wenn es einer andern Linie angehört, ist das endliche Flächenstück, für welches die drei Flächen zusammenfallen müssen, durch gewisse asymptotische Linien begrenzt. Da aber auf positiv gekrümmten Flächen die asymptotischen Linien imaginär sind, so müssen diese, wenn sie in einem nicht ebenen Curvenstück zusammenfallen, ganz zusammenfallen.

Zur Vervollständigung dieser Betrachtungen dient der Nachweis, dass eine Fläche, auf der man eine asymptotische Linie festhält, noch eine unendlich kleine Biegung ohne Dehnung gestattet. Solche unendlich kleinen Biegungen werden durch dieselben vier Gleichungen wie oben bestimmt, wenn man mit x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Urfläche S bezeichnet und die unendlich kleinen Verschiebungen dieses Punktes proportional

mit u, v, w annimmt. Bei der Durchführung des Nachweises findet eine wichtige Bemerkung des Herrn Verfassers ihre Bestätigung, dass nämlich nicht jede unendlich kleine Deformation ohne Dehnung Zwischenglied einer endlichen Biegung ist. Im vorliegenden Falle ist sie es z. B. nur dann, wenn die festgehaltene Curve auch für die deformirte Fläche asymptotische Linie bleibt.

2. Die zweite der genannten Abhandlungen behandelt die unendlich kleinen Deformationen genauer. Die Art derselben ist wesentlich durch den Charakter der Function φ bedingt, welche der Herr Verfasser deswegen „Verschiebungsfunction" nennt, und welche, wie schon oben erwähnt, irgend ein Integral einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist.

Es ergiebt sich namentlich folgendes allgemeine Resultat: Jede lineare homogene Function der Richtungscosinus X, Y, Z der Normale der Urfläche, also $aX+bY+cZ$, ist eine Verschiebungsfunction, und die entsprechende Verschiebung besteht in einer unendlich kleinen Drehung der fest bleibenden Fläche um eine Gerade mit den Richtungscosinus a, b, c und in einer Parallelverschiebung (Translation) in beliebiger Richtung. Jeder anderen Verschiebungsfunction entspricht eine wirkliche Formänderung. Darauf geht der Herr Verfasser zu einem specielleren Problem über und findet folgendes Resultat: Damit bei einer unendlich kleinen Biegung einer unausdehnbaren Fläche die Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien übergehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Abbildung ihrer Krümmungslinien auf die Gauss'sche Kugel ein Isothermensystem darstelle. Mit Hülfe der Resultate einer früheren Arbeit des Herrn Verfassers (Berl. Ber. 1883. 1163-66; Ref. F. d. M. XV. 635) wird der analytische Ausdruck für diese Bedingung weiter vereinfacht.

A.

M. Pieri. Intorno ad un teorema dei sigg. Betti e Weingarten. Batt. G. XXIV. 290-308.

Die bekannten Focaleigenschaften der Ellipse und Hyperbel

sind von den Herren Betti und Weingarten (Ann. di Matem. (2) I, Journ. für Math. LXII. 166) erweitert, und Herr Beltrami hat das Weingarten'sche Theorem noch auf anderem Wege bewiesen. Das Weingarten'sche Theorem, welches das allgemeinere ist, lautet:

Die Orte der Punkte einer Fläche, für welche die Summe resp. die Differenz der geodätischen Abstände von zwei festen Curven der Fläche constant ist, bilden ein Orthogonalsystem.

Der Herr Verfasser leitet für den Raum folgendes analoge Theorem ab. Die Orte der Punkte im Raume, für welche die Summe, respective Differenz der auf zwei feste Flächen gefällten Normalen constant ist, bilden ein zweifaches Orthogonalsystem, welches in gewissen Fällen einem dreifachen Orthogonalsystem angehört. Er zeigt ferner, dass sich dieses Theorem, ebenso wie das vorher besprochene, auch auf einen Raum von *n* Dimensionen übertragen lässt. A.

P. Adam. Démonstration analytique d'un théorème relatif aux surfaces orthogonales. C. R. CIII. 996-998.

Analytischer Beweis des folgenden von Herrn Maurice Lévy aufgestellten und durch geometrische Betrachtungen bewiesenen Satzes. Damit ein System von Flächen einem Orthogonalsystem angehöre, ist notwendige Bedingung, dass seine Nabellinie (Ort der Nabelpunkte) orthogonale Trajectorie des Systems sei.

Der Beweis stützt sich darauf, dass jede Tangente in einem Nabelpunkt als Tangente einer Krümmungslinie angesehen werden kann, weil der Dupin'sche Kegelschnitt ein Kreis ist und irgend zwei senkrechte Durchmesser desselben als Hauptaxen angesehen werden können. Nun hat aber Herr Cayley (Phil. Mag. XXVI. 371-441) zuerst und später Herr Trost und Herr R. Hoppe (vgl. F. d. M. XV. 1883. 669) gezeigt, dass durch einen Nabelpunkt drei Krümmungslinien gehen, von denen keine auf der andern senkrecht steht. Es ist deshalb die Grundlage des Beweises nicht einwandfrei. A.

P. SERRET. Sur un théorème connu. C. R. CIII. 1116-1118.

Die Note soll einen methodischen Wink geben, wie man bei geometrischen Untersuchungen die grösste mögliche Eleganz erreicht, und zwar nach einer Vorschrift von Lagrange, indem man das Problem so unbestimmt lässt, als es bei der Natur desselben irgend angeht, also wohl in Uebereinstimmung mit der Regel, dass grösste mögliche Allgemeinheit zugleich die grösste Einfachheit zur Folge habe. Dies wird illustrirt an der Herleitung des Satzes, dass die Krümmungslinien zweier durch reciproke Radien aufeinander transformirbaren Flächen einander entsprechen. A.

A. R. JOHNSON. Extension of Cayley's differential equation for orthogonal surfaces. Quart. J. XXII. 81-88.

Der Verfasser bestimmt die Differentialgleichung der Flächen eines Systems, in dem sich die Haupttangenten (Krümmungsrichtungen) eines Flächenpunktes um einen Winkel $d\theta$ um die Normale drehen, wenn der Berührungspunkt längs einer Trajectorie zu der folgenden Fläche des Systems übergeführt wird. Indem nachher dieser Winkel gleich Null gesetzt wird, ergiebt sich Cayley's Gleichung (cf. Salmon: Analytic Geom. of 3 dimensions. Art. 338, 3[d] edit.). Zugleich zeigt sich, dass diese auch die Differentialgleichung eines anderen nicht orthogonalen Flächensystems ist, dessen Erzeugung der Verfasser angiebt. R. M.

L. BIANCHI. Aggiunte alla memoria „Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten“. Brioschi Ann. (3) XIV. 115-130.

Unter den in diesem Aufsatze, der eine Ergänzung einer früheren Abhandlung (Brioschi Ann. (2) XIII. 177-234; F. d. M. XVII. 1885. 729) bildet, aufgestellten Sätzen mögen die folgenden angeführt werden.

Wenn die Flächen des Systemes von constantem Krümmungsmasse eines Weingarten'schen Tripels Enneper'sche Flächen

sind, so sind sie sämtlich einander congruent und besitzen eine gemeinschaftliche Axe, um welche sie gegen einander gedreht sind. Das eine der zwei übrigen Flächensysteme besteht dann lediglich aus Kugeln, und das entsprechende Krümmungsliniensystem der Enneper'schen Flächen aus sphärischen Curven.

Damit das Krümmungsliniensystem v = constant aller Complementarflächen einer pseudosphärischen Fläche S (d. h. aller Flächen die aus S durch Complementartransformationen hervorgehen) aus sphärischen Curven bestehe, ist es notwendig und hinreichend, dass die Krümmungslinien $u = 0$ von S ebene Curven seien, dass also S eine Enneper'sche Fläche sei. Unter den Complementarflächen einer Enneper'schen Fläche S giebt es im allgemeinen nur zwei Enneper'sche Flächen. Sind umgekehrt unter den Complementarflächen einer pseudosphärischen Fläche zwei Enneper'sche Flächen vorhanden, so ist dieselbe notwendig eine Enneper'sche Fläche; sind deren drei oder mehr vorhanden, so sind sämtliche Complementarflächen Enneper'sche Flächen, und S ist eine Umdrehungsfläche.

Sind sämtliche aus einer pseudosphärischen Fläche S durch die Bäcklund'sche Transformation erhaltenen Flächen Enneper'sche Flächen, so ist S ein Dini'sches Helikoid.

Transformirt man eine pseudosphärische Fläche S durch eine beliebige complementare, dann durch eine beliebige Bäcklund'sche, dann endlich durch eine passend gewählte complementare Transformation in eine Fläche S_1, so giebt es eine Bäcklund'sche Transformation, welche S in S_1 überführt.

Ein kurzer Nachtrag enthält den Beweis des folgenden Satzes der Integralrechnung:

Jede lineare totale Differentialgleichung, welche die abhängige Variable linear enthält und den Integrirbarkeitsbedingungen genügt, kann auf Quadraturen zurückgeführt werden.

Vi.

L. Bianchi. Sopra i sistemi tripli di superficie ortogonali che contengono un sistema di superficie pseudosferiche. Rom Acc. L. Rend. (4) II. 19-22.

In einer früheren Abhandlung (Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten, Brioschi Ann. (2) XIII. 177-234; Bericht darüber in F. d. M. XVII. 1885. 729) untersuchte Herr Bianchi diejenigen Tripel von Flächensystemen, welche ein System von pseudosphärischen Flächen von constantem Krümmungsmasse enthalten. Die vorliegende Note bezweckt die Ausdehnung einiger der dort gefundenen Resultate auf den Fall, wo das Krümmungsmass der pseudosphärischen Flächen von Fläche zu Fläche veränderlich ist. Bedeutet $-\frac{1}{R^2}$ das Krümmungsmass, wo R eine Function von w ist, so ergeben sich zunächst die Ausdrücke:

$$H_1 = \cos\theta,\ \ H_2 = \sin\theta,\ \ H_3 = R\frac{\partial\theta}{\partial w};$$

die Functionen $\theta = \theta(u, v, w)$, $R = R(w)$ müssen den partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{R^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\sin\theta}{R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w},$$

$$\frac{\partial^3\theta}{\partial u\partial v\partial w} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\partial w} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial w}$$

genügen.

Führt man mit jeder pseudosphärischen Fläche des Systemes die durch die Gleichungen (33) der oben citirten Abhandlung gegebene Bäcklund'sche Transformation aus, wo aber σ nicht mehr eine Constante, sondern eine Function von w ist, so erhält man wieder ein pseudosphärisches Flächensystem; und man kann die Functionen $\sigma(w)$, $\varphi(u, v, w)$ auf zweifach unendliche Weise derart bestimmen, dass das transformirte Flächensystem einem Orthogonaltripel angehört.

Die Note schliesst mit der Anwendung der gewonnenen Resultate auf einen besonderen Fall. Vi.

M. Gebbia. Metodo per formare le equazioni a derivate parziali delle superficie che ammettono una generatrice di forma costante. Palermo Rend. I. 74-86.

Diese Gleichungen werden sehr einfach dadurch ermittelt, dass man die Erzeugungslinie als eine sich auf der Fläche bewegende Linie betrachtet. Man muss beachten, dass die letzte Gleichung (7) nur dann richtig ist, wenn $\mathcal{A}'$, M', N' unter der Voraussetzung berechnet werden, dass x, y, z von τ unabhängig sind.

Die Formeln werden auf Cylinder- und Kegelflächen, auf geradlinige, abwickelbare, Umdrehungs- und Kanalflächen angewandt.

Endlich wird durch eine ganz einfache Schlussweise das folgende bemerkenswerte Resultat erhalten: Die Bedingung dafür, dass eine Fläche eine Erzeugungslinie von constanter Form besitze, wird im allgemeinen durch eine partielle Differentialgleichung von der 13ten Ordnung dargestellt. Vi.

H. Molins. Recherches sur les surfaces dont les trajectoires sous un angle constant des sections planes passant par une droite donnée ont pour perspectives des spirales logarithmiques. Toulouse Mém. (8) VIII. 426-457.

Es handelt sich um folgendes Problem. Eine Fläche wird von allen Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, die wir zur z-Axe wählen, in einer Schar von Curven geschnitten. Man denke sich zu dieser Schar von Curven eine Schar von Trajectorien, welche alle jene Curven unter dem constanten Winkel ω schneiden und projicire diese Trajectorien von einem Punkte der z-Axe, $z = -c$, perspectivisch auf die xy-Ebene. Es wird gefragt, von welcher Beschaffenheit die zu Grunde gelegte Fläche sein muss, damit diese Projectionen logarithmische Spiralen seien, deren Tangenten den Vector unter dem Winkel ω' schneiden. Für den Fall der Rotationsflächen, wo also jene Trajectorien loxodromisch sind, hat der Herr Verfasser das Problem bereits früher behandelt. (Mém. de Toul. 1885. p. 293, Ref. F. d. M. XVII. 733.)

[Eine Verallgemeinerung des Problems in anderem Sinne hat Referent kürzlich in einer Abhandlung „Ueber Rotations-

flächen mit loxodromischer Verwandtschaft" Schlömilch Zeitschr. 1888, XXXIII. 154-166, behandelt.].

Seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Flächen-Punktes M, und setzt man $x = u\cos\vartheta$, $y = u\sin\vartheta$, so dass u und ϑ die Polarcoordinaten der senkrechten Projection des Punktes M auf die xy-Ebene sind, so können u und ϑ als Parameter der gesuchten Fläche genommen werden. Erteilt man u und ϑ die Incremente du und $d\vartheta$, so kommt man zu einem Nachbarpunkt M_1, und der Winkel ω, welchen das Element MM_1 mit dem Schnitt der Fläche und der durch M gelegten Ebene $\vartheta = \text{const.}$ (vom Verfasser Meridian genannt) bildet, wird bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right)\frac{du}{d\vartheta} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial \vartheta}}{u\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)^2}}.$$

Die perspectivische Projection ω_1 dieses Winkels von S aus auf die xy-Ebene ist folgendermassen ausgedrückt:

$$\operatorname{ctg}\omega_1 = \frac{1}{u}\frac{du}{d\vartheta} - \frac{1}{z+c}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{d\vartheta} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right).$$

Die Elimination von $\frac{du}{d\vartheta}$ ergiebt

$$\frac{u\operatorname{ctg}\omega\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right)} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial \vartheta}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \frac{(z+c)\operatorname{ctg}\omega_1 + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}}{\frac{z+c}{u} - \frac{\partial z}{\partial u}}.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher z als Function von u und ϑ genügen muss, während ω und ω_1 beliebig gegebene Constante sind.

Der Herr Verfasser betrachtet nur gewisse specielle Fälle, in denen die Integration gelingt. Ist z Function von u allein, so kommt man auf den schon behandelten Fall der Rotationsflächen.

Ist z Function von ϑ allein, ist also die Fläche ein „Conoid", eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende (die Meridiane) die

z-Axe senkrecht schneiden, so muss $\omega = \frac{\pi}{2}$ sein, also sind die Trajectorien orthogonale, und es ist

$$z + c = ke^{-\vartheta \operatorname{ctg} \omega_1},$$

wodurch die Fläche für jeden Wert der Constanten ω_1 charakterisirt ist.

Diese Flächen werden genauer untersucht, namentlich werden ihre Krümmungslinien und Hauptkrümmungsradien bestimmt.

Ein anderer Fall, in welchem die Integration gelingt, ist $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $\omega' = \frac{\pi}{2}$. Hier projiciren sich also die orthogonalen Trajectorien der Meridiane perspectivisch als concentrische Kreise. Die partielle Differentialgleichung nimmt die einfache Form an

$$(z + c)\,\partial z + u\partial u = 0,$$

also ist

$$(z + c)^2 + u^2 = F(\vartheta),$$

wo $F(\vartheta)$ eine willkürliche Function von ϑ bedeutet. Die Meridiane einer solchen Fläche sind Kreise mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte S, deren Radius $\sqrt{F(\vartheta)}$ eine ganz willkürliche Function von ϑ sein kann.

Nachdem der Herr Verfasser auch diese Flächen genauer betrachtet hat, beschäftigt er sich zum Schluss mit der sehr einfach zu erweisenden Eigenschaft, dass man durch Transformation der gefundenen Flächen mittels reciproker Radien von S aus Flächen erhält, welche ebenfalls der Bedingung genügen. Die zuletzt betrachteten Flächen führen hierbei wieder auf Flächen derselben Klasse zurück. Die Conoide gehen dagegen in Flächen über mit kreisförmigen Meridianen, die sämtlich durch S gehen und ihre Mittelpunkte auf der z-Axe haben. A.

E. Cesaro. A proposito di un problema sulle eliche. Batt. G. XXIV. 46-48.

Es ist eine wohl bekannte Thatsache, dass eine der grössten, mit dem Gebrauche der cartesischen Coordinaten verknüpften

Unbequemlichkeiten bei der Erforschung der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes in der Einführung eines im allgemeinen der behandelten Aufgabe fremdartigen Trieders liegt. Eine der besten Methoden zur Abhülfe bei Aufgaben bezüglich der infinitesimalen Eigenschaften der Curven doppelter Krümmung besteht im Gebrauche der „natürlichen Gleichungen", d. h. zweier Relationen zwischen dem von einem willkürlichen Nullpunkte O an gerechneten Bogen $OM = s$ der Curve und den Halbmessern r, ϱ der ersten und zweiten Krümmung der Curve im Punkte M. In der zum Berichte vorliegenden Note wendet Herr Cesaro dieses System analytischer Geometrie auf die Untersuchung der zu einer gegebenen Familie gehörigen Curven an, deren Hauptnormalen eine feste Gerade treffen. Zu diesem Zwecke sucht er eine Function h von s so zu bestimmen, dass, wenn man auf der Hauptnormale der Curve in M eine Länge $MN = h$ abträgt, der Ort des Punktes N eine Gerade ist. Diese Bestimmung ist nur für gewisse Curven möglich, und der Verfasser zeigt, wie man die zweite natürliche Gleichung für die Curven dieser Art bestimmen kann, welche zu der durch die Gleichung $F(r, \varrho) = 0$ definirten Familie gehören. Wenn diese Familie die der Schraubenlinien ist, so stimmen die Resultate des Herrn Cesaro mit den von Herrn Pirondini (Batt. G. XXIII. 222, F. d. M. XVII. 1885. 724) durch die gewöhnlichen Methoden gefundenen Resultaten überein. La. (Lp.)

G. Ossian-Bonnet. Démonstration nouvelle des deux théorèmes de M. Bertrand. J. de l'Ec. Polyt. cah. LVI. 143-162.

Titel und Resultate stimmen mit einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1883 C. R. XCVII. 1360-63, Ref. F. d. M. XV. 669 überein. Die Entwickelung ist etwas ausgedehnter. A.

T. Brodén. Om Rotationsytors Deformation till nya Rotationsytor. Lund Akadem. Afhandling. 1886.

Wird eine Umdrehungsfläche mit dem Meridiane $z = f(x)$

durch Deformation in eine andere mit dem Meridiane $\zeta = \varphi(\xi)$ verwandelt, so finden die Relationen $\xi = kx$, $\zeta = \int u.dx$ statt, wo $u^2 = 1 - k^2 + f'^2(x)$ (k Integrationsconstante) ist.

Im ersten Teile der Abhandlung untersucht der Verfasser, mittels Entwickelung der Coordinaten in Parameterreihen, die Art der Zweige, also die Singularitäten des einen Meridians, welche denjenigen des anderen in verschiedenen Fällen entsprechen. Darauf wird die Curve $z = f(x)$ algebraisch vom Geschlechte p angenommen, und das P der Curve (x, u), besonders mit Hülfe eines Satzes von Zeuthen (Math. Annalen Bd. III. 150) bestimmt. Es ergiebt sich dann im allgemeinen

$$P = 2p + h - 1,$$

wo h die Anzahl endlicher Tangenten, die von einem unendlichen Punkte an die Curve $z = f(x)$ gezogen werden können, bedeutet. Die Modificationen dieser Zahl P in verschiedenen Fällen, welche hauptsächlich von der speciellen Beziehung der f-Curve zu den unendlichen Kreispunkten herrühren, sind ausführlich behandelt, und besondere Aufmerksamkeit ist dem Falle gewidmet, in dem auch der zweite Meridian algebraisch wird. Von den gefundenen Resultaten wird zuletzt auf einige gut gewählte Beispiele Anwendung gemacht. Bg.

E. Beutel. Sur les surfaces enveloppes de cônes du second degré, dans le cas où chaque cône touche son enveloppe suivant un cercle. C. R. CIII. 687-689.

Der Herr Verfasser betrachtet Flächen, die durch einen beweglichen Kreis, der von einem veränderlichen Parameter abhängt, erzeugt werden, und setzt voraus, dass die Tangentialebenen einer solchen Fläche längs der Punkte eines jeden dieser beweglichen Kreise durch denselben Punkt gehen, der dann der Scheitel eines der Fläche umschriebenen Kegels ist. Eine einfache analytische Rechnung führt dann zu dem Resultat, dass ein variabler Kegel zweiten Grades seine Umhüllungsfläche nur in folgenden beiden Fällen längs eines Kreises, dessen Ebene reell ist, berühren kann:

1) Der Kegel ist ein Umdrehungskegel, und die Umhüllungsfläche ist zugleich eine Umhüllungsfläche von Kugeln.

2) Die Ebene des Berührungskreises ist einer festen Ebene parallel. Mz.

S. FINSTERWALDER. Ueber Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Diss. Tübingen. 33 S.

Der Herr Verfasser hat das Bestreben, die Betrachtung der Erscheinungen der Reflexion des Lichtes an einer beliebigen spiegelnden Fläche dadurch zu vervollständigen, dass er die Helligkeit in den verschiedenen Teilen des Raumes berücksichtigt. Nach dem Malus'schen Satze wird jedes von einem Punkte ausgehende System von Lichtstrahlen durch beliebig viele Reflexionen und Brechungen immer wieder in ein Normalensystem übergeführt. Die Brennflächen eines solchen Normalensystems nennt der Herr Verfasser primäre Brennflächen, dagegen jede der parallelen Flächen, welchen dieses System der Normalen zugehört, eine secundäre Brennfläche. Die secundären Brennflächen sind demnach nichts anderes, als die Flächen gleicher Phasen der Undulationstheorie und können darum füglich als Phasenflächen oder Wellenflächen bezeichnet werden, wie dies der Herr Verfasser auch in einer anderen Abhandlung gethan hat. Betrachtet man nun ein unendlich dünnes von einem Punkte ausgehendes Strahlenbündel bei Reflexion an einer spiegelnden Fläche, so kann man durch jeden Punkt des einfallenden wie des reflectirten Strahles die betreffende Phasenfläche legen, und die Definition, die der Herr Verfasser über die Helligkeit aufstellt, kommt wesentlich darauf hinaus, dass er sie an jeder Stelle umgekehrt proportional dem Flächenstück annimmt, in welchen das unendlich dünne Strahlenbündel die betreffende Phasenfläche durchschneidet. Nimmt man dann die Helligkeit auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der leuchtende Punkt ist, als constant an, so ist die Helligkeit für jeden Punkt jedes Strahles,

sowohl vor, als nach der Reflexion bestimmt. Der Herr Verfasser sucht diese Definition physikalisch zu begründen. Seine Begründung ist aber nur dann zutreffend, wenn alles Licht reflectirt wird, also etwa bei totaler Reflexion. Im allgemeinen aber wird auch ein Teil des Lichtes gebrochen, ganz abgesehen von etwaiger Absorption, und das Verhältnis der Intensität des gebrochenen und des reflectirten Strahles hängt bei natürlichem Lichte noch wesentlich von dem Einfallswinkel ab. Dieser Umstand ist bei der Definition des Herrn Verfassers gar nicht berücksichtigt, sie hat also, wenn überhaupt, doch nur eine wesentlich beschränkte physikalische Bedeutung. Dies hätte der Herr Verfasser wohl nicht mit Stillschweigen übergehen dürfen.

Die Helligkeit an Punkten auf einer der beiden Brennflächen wird hiernach im Vergleich zu dem übrigen Raum unendlich gross. Der Herr Verfasser sucht nun aber ein Mittel auf, um dieselbe für die verschiedenen Punkte einer Brennfläche mit einander zu vergleichen, indem er zwei gleiche unendlich kleine Stücke einer den leuchtenden Punkt umgebenden Wellenfläche betrachtet, die durch sie gelegten Strahlenbündel bis zu einer der beiden Brennflächen des reflectirten Systems verfolgt und die von den Strahlen beider Bündel berührten Flächenteile derselben vergleicht. Die Helligkeiten werden diesen Flächeninhalten umgekehrt proportional angenommen. Auch gegen diese Definition sind die oben erwähnten Bedenken geltend zu machen. Andrerseits soll der theoretische Wert derselben nicht verkannt werden. Es lassen sich vielleicht beide Definitionen mit Berücksichtigung der angeführten Umstände so modificiren, dass sie mit den physikalischen Thatsachen besser übereinstimmen.

Nachdem der Herr Verfasser noch eine Bemerkung über die Spiegelung an abwickelbaren Flächen gemacht hat, die eine besondere Betrachtung erfordern, wendet er sich zu einem Beispiel.

Es ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid gegeben und ein leuchtender Punkt im Scheitel desselben. Gesucht wird eine spiegelnde Fläche der Art, dass die reflectirten Strahlen das Normalensystem des Paraboloids bilden. Die Aufgabe hat

unzählig viele Lösungen, von denen eine besonders ausgezeichnet ist. Dies ist eine gewisse Fläche neunter Ordnung, die der Herr Verfasser genauer discutirt, auch mit Rücksicht auf die seinen Definitionen entsprechenden Helligkeitsverhältnisse, und deren Gestalt er durch die Abbildung eines Modells versinnlicht.

[In einer Anmerkung beschäftigt sich der Herr Verfasser mit einem Bericht des unterzeichneten Referenten über eine seiner früheren Arbeiten, betreffend die Brennfläche der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion von einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. F. d. M. 1881. XIII. S. 625. Er giebt zu, dass der Name Brennfläche (siehe unten c) in jener Arbeit nicht ganz glücklich gewählt ist, verwirft aber a) meine Ansicht, wonach die Enveloppe der Brennflächen für die einzelnen leuchtenden Punkte als Brennfläche der leuchtenden Linie aufzufassen ist, da diese Enveloppe der spiegelnde Cylinder selbst, die Helligkeit aber dort Null sei. Er fährt dann etwa so fort: b) Als Fläche der hellsten Stellen überhaupt ist in unserem Falle die Fläche der singulären Linien der einzelnen Brenncylinder anzusehen, d. i. ein gewisser Cylinder sechster Ordnung. c) Sucht man jedoch auf jeder einzelnen Erzeugenden der Brenncylinderschar den hellsten Punkt, so giebt die Verbindungsfläche die in der früheren Arbeit als Brennfläche bezeichnete Fläche 12ter Ordnung. d) „Es existirt übrigens eine dritte Fläche, die mit den vorhergehenden um die Bezeichnung Brennfläche erfolgreich concurriren kann“, — und diese ist — „der Ort der Spiegelbilder der leuchtenden Linie in Bezug auf die Tangentialebenen des spiegelnden Cylinders“.

Darauf erwiedere ich: a) Die Enveloppe der Brennflächen besteht aus mehreren Bestandteilen. Einer derselben ist die spiegelnde Fläche. Ist auf dieser die Helligkeit des reflectirten Lichtes Null, so bleiben noch die andern Bestandteile zu betrachten, und dies thut auch Herr Finsterwalder, zunächst in b). Der dort betrachtete Cylinder ist in der Tat als singulärer Bestandteil der Enveloppe zu zählen. In c) ist bei der Bestimmung der hellsten Stellen für jeden Brenncylinder nur der leuchtende Punkt berücksichtigt, dem dieser Cylinder entspricht,

als ob die übrige Linie dunkel wäre. Deshalb eben kommt der hier sich ergebenden Fläche keine besondere optische Bedeutung zu, wie ich dies schon in meinem Referat ausgesprochen habe. d) Die dritte Fläche, die „übrigens noch existirt", ist genau dieselbe, welche ich in dem Referat bereits als einen singulären Bestandteil der Enveloppe ausdrücklich aufgeführt und charakterisirt hatte. Davon sagt aber Herr Finsterwalder nichts, so dass es den Eindruck macht, als sei diese Fläche erst von ihm entdeckt. Ich kann nicht umhin, in der Erwiderung des Herrn Finsterwalder nur eine Bestätigung meiner damals geäusserten Ansicht zu finden.] A.

R. von Lilienthal. Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Bonn. E. Weber. 112 S.

Die Schrift enthält eine Theorie der Flächen und geradlinigen Strahlensysteme unter einem bestimmten Gesichtspunkte, wie er hinsichtlich der Flächentheorie in ähnlicher Weise von Lipschitz und anderen aufgestellt ist. (Vgl. Lipschitz: Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. Berl. Ber. 1882 u. 83, F. d. M. XIV. 650, XV. 626.) Fragt man nämlich, ob es eine Fläche giebt, für welche die Richtungscosinus X, Y, Z der Normalen eines Flächenelementes, die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 und der sogenannte Stellungswinkel, d. h. der Winkel, den eine Krümmungslinie mit einer Parameterlinie bildet, beliebig gegebene Functionen zweier Parameter u und v sind, so zeigt sich, dass dies nicht allgemein der Fall ist, sondern nur, wenn gewisse „Integrabilitätsbedingungen" bestehen, d. h. Bedingungen, durch welche sich für die Incremente der Coordinaten dx, dy, dz vollständige Differentialausdrücke ergeben. Sind aber diese Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und ist für ein Wertpaar p, q die Lage des entsprechenden Flächenpunktes beliebig gegeben, so ist die Fläche vollständig bestimmt. Die Integrabilitätsbedingungen aber sind ausgedrückt durch zwei partielle Differentialgleichungen.

Nun ist aber das System der Normalen einer Fläche ein Strahlensystem specieller Art und die Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Brennpunkte für jeden Strahl. Hierdurch wird der Herr Verfasser zu einer Verallgemeinerung der Betrachtung geführt, indem er durch jeden Punkt einer Fläche einen mit den Parametern p und q variirenden Strahl gelegt denkt. Da aber die Brennpunkte der einzelnen Strahlen dieses Strahlensystems nicht reell zu sein brauchen, während die Grenzpunkte der kürzesten Abstände es stets sind, so zieht der Herr Verfasser diese letzteren in Betracht, nennt ihre Abstände von dem Flächenpunkte r_1 und r_2, und stellt die Frage, ob es eine Fläche giebt, für welche die Richtungscosinus der Normale eines Elementes X, Y, Z, die Richtungscosinus des durch dieses Element gelegten Strahls eines Strahlensystems ξ, η, ζ, die Grössen r_1 und r_2 und der Stellungswinkel τ, durch welchen die Lage einer der beiden Hauptebenen des Strahls (nach Kummer) gegen eine der Parameterlinien bestimmt wird, für welche also diese neun Grössen als Functionen der Parameter p und q beliebig gegeben sind. Es ergiebt sich das Resultat, dass eine solche Fläche dann und nur dann möglich ist, wenn drei gewisse Partialgleichungen erfüllt sind, welche wieder die Integrabilitätsbedingungen darstellen.

Fällt das Strahlensystem mit dem Normalensystem zusammen, so ist eine dieser drei Bedingungen identisch erfüllt.

Man kann aber das Strahlensystem auch in anderer Weise durch speciellere Eigenschaften charakterisiren und dadurch zu bemerkenswerten Resultaten gelangen. Der Herr Verfasser hat namentlich folgenden Fall in dem letzten Teile der Schrift ausführlich behandelt. Setzt man nach Kummer

$$e = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}+\cdots,\quad f = \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial p}+\cdots,$$

$$f' = \frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial q}+\cdots,\quad g = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}+\cdots,$$

so giebt es eine sehr allgemeine Klasse von Strahlensystemen specieller Art, welche der Bedingung genügen

$$e+g-f+f' = 0,$$

und deren analytische Behandlung sich allgemein durchführen lässt. Es tritt bei diesen eine zur ursprünglich betrachteten Fläche (x_1, y_1, z_1) verwandte Fläche auf, so dass der Strahl die beiden entsprechenden Punkte dieser Flächen verbindet, während sich folgende Beziehungen ergeben. Man setze $u = p + qi$, $v = p - qi$ und bilde drei beliebige eindeutige analytische Functionen von u, die sogenannten erzeugenden Functionen, nämlich U, V, W, deren Conjugirte bezüglich U_1, V_1, W_1 seien; man setze alsdann

$$x = \tfrac{1}{2}(U + U_1), \quad y = \tfrac{1}{2}(V + V_1), \quad z = \tfrac{1}{2}(W + W_1),$$

$$x_1 = \frac{1}{2i}(U - U_1), \quad y_1 = \frac{1}{2i}(V - V_1), \quad z_1 = \frac{1}{2i}(W - W_1),$$

dann sind xyz, $x_1 y_1 z_1$ entsprechende Punkte zweier im eben definirten Sinne verwandter Flächen, und ihre Verbindungslinie bildet den entsprechenden Strahl des Strahlensystems, welches der Bedingung $e + g - f + f' = 0$ genügt. (Ob diese Bedingung sich nur durch Strahlensysteme dieser Art erfüllen lässt, scheint der Herr Verfasser nicht festgestellt zu haben.) Ein solches Strahlensystem kann niemals reelle Brennflächen haben, also auch niemals ein Normalensystem sein. Die Mitte zwischen zwei Grenzpunkten eines jeden Strahls fällt mit der Mitte zwischen den beiden entsprechenden Punkten xyz und $x_1 y_1 z_1$ zusammen. Bildet man die Coordinaten

$$x_m = \tfrac{1}{2}[(1 - m)x + (1 + m)x_1], \quad x_{-m} = \tfrac{1}{2}[(1 + m)x + (1 - m)x_1]$$

und die analogen, so erhält man zwei Flächen (x_m, y_m, z_m) (x_{-m}, y_{-m}, z_{-m}), welche dieselbe Mittelfläche ergeben, und welche durch viele Eigenschaften ausgezeichnet sind. Die hier angedeuteten allgemeinen Beziehungen werden zum Schluss an einem speciellen Beispiele erläutert. Selbstverständlich ergeben sich im Verlaufe der ganzen Untersuchung viele interessante Resultate, die an dieser Stelle nicht erwähnt werden können. Die gegebenen Andeutungen mögen genügen, um den Gedankengang des interessanten Werkes zu charakterisiren. A.

R. H. v. Dorsten. Theorie der Kromming van Lijnen op gebogen Oppervlakken. Leiden. XIV + 72 S.
Vgl. F. d. M. XVII. 1885. 742.

H. Sievert. Ueber die Centralflächen der Enneper'schen Flächen constanten Krümmungsmasses. Diss. Tübingen. 8°. 36 S.

H. Dobriner. Die Flächen constanter Krümmung mit einem System sphärischer Krümmungslinien dargestellt mit Hülfe von Thetafunctionen zweier Variablen. Acta Math. IX. 75-104. Diss. Marburg.
Siehe Abschnitt VII. 2 C. S. 425.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

A. Voss. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. Erster Theil: Zur Theorie der Steiner'schen Kernfläche. Klein Ann. XXVII. 357-396.

Aus der Polarentheorie der Flächen n^{ter} Ordnung ist folgender Satz bekannt: hat die k^{te} Polare des Punktes y im Punkte x einen Doppelpunkt, so hat die $(n-k-1)^{\text{te}}$ Polare von x einen Doppelpunkt in y. Es sind somit die beiden Flächen S_k und H_k, von welchen S_k der Ort derjenigen Punkte ist, für welche die k^{te} Polare einen Doppelpunkt hat, und H_k der Ort dieser Doppelpunkte selbst, eindeutig auf einander bezogen. Der Verfasser nennt S_k und H_k conjugirte Kernflächen k^{ter} Ordnung in Bezug auf die Ordnungsfläche $f=0$, und zwar S_k die k^{te} Steiner'sche und H_k die k^{te} Hesse'sche. Die Singularitäten dieser beiden Flächen sollen nun näher untersucht werden.

Der Verfasser beginnt, ähnlich wie Herr Krey (Klein Ann. XVIII. 84-90), mit dem eindeutigen Entsprechen z

vermöge vier biquaternärer Gleichungen $f_j = 0$ zwischen den homogenen Coordinaten x_i, y_i, wo $i = 1, 2, 3, 4$ gesetzt wird. Durch Elimination der x_i erhält man die Gleichung einer Fläche Φ_y und durch Elimination der y_i die Gleichung einer Fläche F_x. Beide sind durch die Gleichungen $f_j = 0$ eindeutig auf einander bezogen. Es werden nun die Singularitäten dieser Flächen auf algebraischem Wege bestimmt und die von Herrn Krey gefundenen Zahlenresultate bestätigt. Im allgemeinen haben die Flächen keine Rückkehrcurve, wohl aber Doppelpunkte.

Durch fünf biquaternäre Gleichungen $f_j = 0$, $j = 1, \ldots, 5$ ist ein Curvenpaar C_x und T_y eindeutig auf einander bezogen, für welches die Charaktere in analoger Weise bestimmt werden.

Um die Anwendungen dieser Resultate auf die Kernflächen zu machen, werden die Formen f_j zunächst derart specialisirt, dass

$$f_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

Es wird dann die Fläche Φ_y von den Polarebenen der Punkte von F_x in Bezug auf f umhüllt. Φ_y erhält jetzt eine Rückkehrcurve. Die Singularitäten für Φ_y und F_x werden auch in diesem Falle bestimmt.

Die Formen f_j werden endlich noch weiter specialisirt, indem angenommen wird, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i},$$

und es wird bewiesen, dass diejenigen Formen f_j, welche diesen Bedingungen genügen, Polaren einer Form Ψ sind. Nun können die Anwendungen der vorher gefundenen Sätze auf die Polarentheorie algebraischer Gebilde stattfinden.

Zum Schlusse werden die Hesse'sche Fläche und ihre conjugirte Kernfläche einer eingehenden Betrachtung unterworfen, und es wird die Tabelle für die wichtigsten Charaktere von S mitgeteilt. W. St.

M. Noether. Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke erster Gattung. Erlang. Ber. XVIII. 11-17.

Herr Picard hatte die Theorie der Abel'schen Integrale auf algebraische Flächen ausgedehnt. Es giebt specielle Flächenklassen $f(x, y, z) = 0$, auf denen totale Differentiale von der Form $Pdx + Qdy$ existiren, deren Integrale überall endlich sind. Der Verfasser verschärft und erweitert diese Untersuchungen, indem er die in der Theorie der Curvenintegrale mit so grossem Erfolge verwandte rationale Transformation der Curven sowie der zugehörigen Differentialausdrücke auch hier einführt. Zunächst wird das Differential erster Gattung auf die homogene Form gebracht:

$$du = \frac{\Sigma \pm K_1 A_2 x_3 dx_4}{\Sigma K_i f_i},$$

wo du von den willkürlichen Grössen K_i gar nicht abhängt, wo die A_i ganze Functionen der x von gewisser vorgeschriebener Form sind, und die f_i die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnen.

Vermöge der rationalen Transformation $x_i = \psi_i(y)$ gehe $f(x_i)$ über in $M.F(y_i)$, dann bleibt die Form von du unverändert, nämlich:

$$du = \frac{\Sigma \pm c_1 B_2 y_3 dy_4}{M \Sigma c_i F_i}.$$

Aus diesen Transformationen werden leicht die Bedingungen für die Endlichkeit des Integrals u erschlossen. Auch die zu $f = 0$ adjungirten Flächen $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung (wenn m die Ordnung von $f = 0$ bedeutet) werden auf diese Weise erhalten.

Der Verfasser beweist noch die Umkehrung eines von Herrn Picard aufgestellten Satzes, nämlich:

„Wenn eine Fläche $f = 0$ das Flächengeschlecht 1 hat, und wenn zwei unabhängige Integrale erster Gattung, u und v, von totalen, zu $f = 0$ gehörigen Differentialausdrücken existiren, so sind die Coordinaten der Fläche eindeutige (vierfach periodische) Functionen von u und v.“ My.

M. Noether. Ueber die algebraischen Differentialausdrücke mit einer Variablen. Erlang. Ber. XVIII. 18-21.

Enthält die weitere Ausführung von Untersuchungen, die der Verfasser früher nur kurz angedeutet hatte. Es handelt sich um Polarenprocesse, die bei der Behandlung algebraischer Differentiale zweckmässig die Differentiation vertreten. My.

V. Murer. Sulle serie razionali di superficie algebriche. Batt. G. XXIV. 106-123.

„Rationale Schar“ von Oberflächen n^{ter} Ordnung heisst das System von Oberflächen, deren Gleichung in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\sum_{0}^{\mu} u_i \lambda^{\mu-i} = 0,$$

wo λ einen Parameter, u_i algebraische Formen n^{ten} Grades der homogenen Coordinaten eines Punktes bedeuten; μ, die Zahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden Flächen der Schar, ist ihr „Index“. Ist μ gleich 1 oder 2, so kennzeichnet die Annahme der Rationalität die Schar nicht als eine eigenartige unter denen von demselben Index, sondern dies fängt mit $\mu = 3$ an. Diese Sätze sind nur eine eigentümliche Deutung einiger von Hrn. Clifford bewiesenen Theoreme (Lond. Phil. Trans. 1878: „On the classification of loci“, zu Anfang); mithin ist das, was Hr. Murer in der ersten der Noten auf S. 107 der zu besprechenden Arbeit sagt, zum Teil bekannt, zum Teil bedarf es einiger Abänderungen.

Man kann zwei Teile in der Arbeit unterscheiden.

Im ersten Teile gebraucht der Verfasser die Correspondenz-Principe und das Princip der Erhaltung der Anzahl (welches er explicit aussprechen zu müssen glaubt, obschon sehr viele Geometer vor ihm eine sehr klare und genaue Fassung desselben gegeben haben), um Sätze über die rationalen Scharen aufzustellen, von denen mehrere in Salmon-Fiedler's „Analytischer Geometrie des Raumes“ (No. 460) enthalten sind, von denen jedoch wahrscheinlich auch manche neu sind; unter letztere setzen wir z. B. diejenigen betreffs der Verteilung der Normalen an den Oberflächen einer rationalen Schar im Raume.

Im zweiten Teile wird eine symbolische Schreibweise der Gleichung der Schar in der Form angenommen:
$a_x^n \alpha_\lambda^\mu = 0 \quad (a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4;\ \alpha_\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2)$.

Man kann dann die In- und Covarianten von $a_x^n \alpha_\lambda^\mu$, bald als Functionen der x, bald als Functionen der λ betrachtet, des näheren durchforschen. In dem ersten Falle bestimmt jede gleich Null gesetzte Invariante eine gewisse Anzahl Oberflächen, die eine gegebene projectivische Eigenschaft besitzen; im zweiten stellt jede gleich Null gesetzte Invariante den Ort eines Punktes dar, für welchen die durch ihn gehenden Oberflächen der Schar eine besondere Beziehung unter einander besitzen, u. s. w. Indem der Verfasser diese Bemerkungen anwendet und sich auf die Theorie der binären Formen stützt, durchforscht er die rationalen Scharen mit dem Index 2, 3 oder 4. Dann, auf den allgemeinen Fall zurückgreifend, beschäftigt er sich mit der Oberfläche, welche der Ort der parabolischen Curven der Oberfläche einer beliebigen rationalen Schar ist, und mit dem Complexe, dem Orte der ∞^1 Congruenzen, von denen jede aus den Geraden besteht, welche die entsprechenden Punkte der Hesse'schen und Steiner'schen Fläche einer Oberfläche der Schar verbinden.

La. (Lp.)

J. J. Sylvester, S. Roberts. Solution of question 8115. Ed. Times. XLIV. 21-22.

Sind $U = 0$ und $V = 0$ die Gleichungen zweier allgemeinen Oberflächen bezw. m^{ten} und n^{ten} Grades in den Variabeln, und drückt $J = 0$ die Beziehung zwischen den Coefficienten von U und V aus, wenn sich beide Oberflächen berühren, so ist vom Grade

$$n\{(n-1)^2+2(m-1)(n-1)+3(m-1)^2\},$$
$$m\{(m-1)^2+2(n-1)(m-1)+3(n-1)^2\}$$

bezw. in den Coefficienten von U und V.

Lp.

E. Picard. Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales. 71-78.

Beweis des folgenden bereits im Jahre 1878 vom Herrn Verfasser aufgestellten Satzes (Soc. philom. Paris, 127-132. Ref. F. d. M. X. 511).

Die einzigen algebraischen Flächen, deren sämtliche ebene Schnitte einläufig sind, sind die Steiner'sche Fläche und gewisse geradlinige Flächen. A.

K. Bobek. Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung. Wien. Ber. XCIII. 13-27.

Mit Hülfe des Restsatzes und des Riemann-Roch'schen Satzes, die von Brill und Nöther für algebraische Curven der Ebene (von Letzterem auch für die des Raumes) nachgewiesen wurden, wird das Titelproblem auf ein solches der Ebene zurückgeführt. Es ergiebt sich als Maximalgeschlecht π einer Raumcurve m^{ter} Ordnung

$$\pi = \frac{(m-1)(m-3)+\varepsilon}{4},$$

wo ε gleich 1 resp. 0 zu setzen ist, jenachdem m einen geraden oder ungeraden Wert erhält. Solche Raumcurven vom Maximalgeschlecht π liegen immer auf Flächen zweiter Ordnung.

Und zwar ist für $m = 2n$ die Curve der vollständige Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung mit einer solchen n^{ter} Ordnung, während für $m = 2n-1$ die letztere Fläche noch eine Gerade mit der ersteren gemein hat. My.

M. Noether. Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques. C. R. CIII. 734-737.

Auf einer algebraischen Fläche F, vom Flächengeschlecht p und der Ordnung n, liege eine algebraische Raumcurve C vom Geschlecht π, durch die noch ϱ linear unabhängige, zu F adjungirte Flächen φ der $(n-4)^{\text{ten}}$ Ordnung gelegt werden können. Bedeutet ferner $q+1$ die Anzahl der willkürlichen Constanten einer rationalen Function f von x, y, z, die in C unendlich wird, und

endlich s die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von C mit irgend einer Curve des zu f gehörigen Curvensystems der Fläche, so spricht sich die Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes auf Flächen in der Ungleichung aus:

$$q \geqq p+s-\pi-\varrho+1,$$

wo indessen das Ungleichheitszeichen nur in ganz speciellen Fällen eintritt.

Es erscheint sehr merkwürdig, dass hier q mit wachsendem ϱ abnimmt, während bei ebenen algebraischen Curven die beiden analogen Anzahlen gleichzeitig zunehmen.

Der Beweis stützt sich darauf, dass auf das Gruppensystem sämtlicher erwähnten s Punkte auf C der Riemann-Roch'sche Satz für Raumcurven anwendbar ist. Im übrigen ist die Schlussweise der für ebene Curven bekannten ähnlich. My.

M. Noether. Ueber die reducibeln algebraischen Curven. Acta Math. VIII. 161-192.

Der Verfasser führt hier die Aufgabe durch, das Verhalten der zu einer ebenen resp. räumlichen algebraischen Curve F „adjungirten" Curven resp. Flächen zur Curve F auch in den Ausnahmefällen zu studiren, wo die letztere in eine beliebige Anzahl irreducibler Teile zerfällt.

Als Typus des für die ebenen Curven F_n eingeschlagenen Verfahrens kann der einfachste Fall dienen, in dem F_n, n^{ter} Ordnung, aus zwei irreduciblen Teilcurven F_{n_1} und F_{n_2}, von den resp. Ordnungen n_1, n_2 besteht, welche sich in $n_1 n_2$ einfachen Punkten treffen.

Soll $\varphi_{n-3}=0$ eine zu F adjungirte φ-Curve sein, so muss nach einem früheren Satze des Verfassers die Identität erfüllt sein

$$\varphi_{n-3} \equiv \varphi_{n_1-3} F_{n_2} + \varphi_{n_2-3} F_{n_1},$$

wo ausserdem die φ_{n_1-3}, φ_{n_2-3} zu F_{n_1} resp. F_{n_2} adjungirt sind.

Auf dieser Identität und der Anwendung der für irreducible Curven gültigen Sätze beruhen die weiteren Folgerungen.

In erster Linie ergiebt sich, dass von den $n_1 n_2$ Bedingungen, welche aussagen, dass die φ_{n-3} durch die [illegible] von

F_{n_1} und F_{n_2} einfach hindurchgehe, immer eine, und zwar eine ganz beliebig herauszugreifende, eine lineare Folge der übrigen $n_1 n_2 - 1$ linear unabhängigen Bedingungen ist.

Das letztere Resultat ist bekannt als derjenige specielle, ausschliesslich ausnahmslos gültige Fall des „Cayley'schen" Satzes, für den die Ordnung einer durch die Punkte (F_{n_1}, F_{n_2}) gehenden Curve gerade gleich $n_1 + n_2 - 3$ ausfällt. Bei der Erweiterung des Gefundenen auf den Fall, dass die Schnittpunkte von F_{n_1} und F_{n_2} selbst vielfache Punkte dieser Teilcurven sein können, zeigt sich, dass zwar die obige Identität fortbesteht, dagegen die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche das Verhalten der adjungirten φ_{n-3} in den Schnittpunkten von F_{n_1} und F_{n_2} regeln, in zwei wesentlich verschiedene Teile zerlegt wird.

Einmal erfordert es nämlich $n_1 n_2$ Gleichungen, damit überhaupt eine Identität von der erwähnten Form besteht (ohne auf die Natur der Factoren φ_{n_1-3}, φ_{n_2-3} weitere Rücksicht zu nehmen), und von diesen $n_1 n_2$ Bedingungen ist, genau wie früher, eine ganz beliebige unter ihnen eine lineare Folge der übrigen.

Dagegen ist der noch verbleibende Rest von Bedingungen, die sich nur noch auf die Adjunction der φ_{n_1-3}, φ_{n_2-3} zu den Curven F_{n_1}, F_{n_2} beziehen, linear unabhängig.

Definirt man das Geschlecht p der zerfallenden Curve F vollkommen analog zu den Geschlechtern p_1, p_2 der Teilcurven, so gilt die wichtige Relation

$$p_1 + p_2 = p + 1.$$

Daraus fliessen denn auch die Modificationen, die der „Cayley'sche" Satz, bei beliebiger Ordnung der Schnittcurven, zu erfahren hat, wenn F_{n_1} und F_{n_2} Schnittpunkte von irgend welcher vielfachen Multiplicität aufweisen.

Der Verfasser geht nunmehr wiederum einen Schritt weiter, indem er eine der Teilcurven F_{n_1}, F_{n_2} von neuem in zwei Teile zerfallen lässt. Von den bez. Adjunctionsbedingungen werden jetzt eine resp. zwei eine lineare Folge der übrigen. Und zwar tritt der eine oder der andere Fall ein, je nachdem (unter F_{n_1}, F_{n_2}, F_{n_3} die drei Teilcurven von F_n verstanden) kein weiterer

Schnittpunkt von F_{n_2} und F_{n_3} ausserhalb der Schnittpunkte von F_{n_1} mit $(F_{n_2} F_{n_3})$ liegt oder das Gegenteil eintritt.

In ähnlicher Weise gelingt die Erledigung der allgemeinsten Möglichkeit, wenn F_n in eine beliebige Anzahl s von irreducibeln Teilcurven zerfällt. Zwischen dem Gesamtgeschlecht p und den Teilgeschlechtern $p_1, p_2, \ldots, p_s$ besteht die Beziehung

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_s - s + 1.$$

Zugleich stellt $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = p + s - 1$ die Anzahl der zu F_n adjungirten linear-unabhängigen Curven φ_{n-3} dar. Da sowohl die Zahl p, wie $p+s-1$ aus der Gleichung $F_n = 0$ durch rationale Operationen gewonnen werden kann, so liegt darin, wie schon Herr Christoffel bemerkt hat, ein Kriterium der Reducibilität resp. Irreducibilität von F_n, je nachdem die Zahl s grösser oder gleich Eins ausfällt.

Bei der Uebertragung des Riemann-Roch'schen Satzes ergiebt sich, dass die bekannte Formel desselben

$$q = Q - p + r + 1$$

auch jetzt noch bestehen bleibt, wenn man nur unter q, r die Mannigfaltigkeiten der bez. adjungirten φ_{n-3}, und nicht die Mannigfaltigkeit der von denselben ausgeschnittenen Punktsysteme versteht. Der erste Abschnitt schliesst mit einer vollständigen Discussion der Structur des die Adjunctionsbedingungen repräsentirenden linearen Gleichungssystems.

Der zweite Abschnitt untersucht in entsprechender Weise reducible Raumcurven, indem er sich auf die vom Verfasser früher aufgestellte Theorie der „Nullscharen" stützt. Es sei hier nur das Hauptergebnis mitgeteilt, dass „für die Schnittpunktbeziehungen zwei Curven einer Fläche nur dann und immer dann als speciellen Fall einer irreduciblen Raumcurve anzusehen sind, wenn sie sich in noch wenigstens einem Punkte treffen". My.

St. Jolles. Die Theorie der Osculanten und das Sehnensystem der Raumcurve IV. Ordnung II. Species. Aachen. Mayer. IV + 24 S.

Referat in Abschnitt IX, Cap. 3D.

A. Hurwitz. Zusatz zu der Note „Einige allgemeine Sätze über Raumcurven. Kl. Ann. XXV. p. 287." Klein Ann. XXVII. 162.

Dieser Zusatz enthält einige Citate betreffend die Sätze, welche der Verfasser aufgestellt hatte und die schon von anderer Seite publicirt waren. W. St.

V. Petersson. Om Developpablers Medelpunktsytor. Lund Akadem. Afhandling. 1886.

Die Fläche Σ' der Centra einer abwickelbaren Fläche Σ ist bekanntlich mit ihrer rectificirenden Fläche identisch. Der Verfasser hat sich die Aufgabe vorgelegt, die Charaktere m', n', r' etc. (die Buchstaben in der gewöhnlichen Salmon'schen Bedeutung genommen) der Σ' zu bestimmen aus denjenigen m, n, r, ... der Originalfläche Σ. Für diesen Zweck benutzt er zwei verschiedene Methoden, deren Resultate einander ergänzen.

Erstens wird der Umstand benutzt, dass die unendliche Curve der Σ' die Quasi-Evolute zu derjenigen der Σ, in Bezug auf den unendlichen Imaginärkreis, ist. Aus zum Teil bereits bekannten, zum Teil neu hergeleiteten Relationen zwischen den Charakteren einer algebraischen ebenen Curve und ihrer Quasi-Evolute werden diejenigen der unendlichen Σ'-Curve bestimmt, und somit, wenigstens zum Teil, die Charaktere der abwickelbaren Fläche Σ' selbst.

Der Verfasser schlägt darauf einen anderen Weg ein, um die so gefundenen Resultate zu bestätigen und zu vervollständigen. Mit den bekannten Formeln für die Ebenencoordinaten der Σ'

$$\frac{X}{y'z''-y''z'} = \frac{Y}{z'x''-x'z''} = \frac{Z}{x'y''-x''y'} = \frac{W}{xX+yY+zZ}$$

(x, y, z die Coordinaten der Cuspidalcurve von Σ) leitet er aus den Parameter-Entwickelungen der x, y, z die entsprechenden für X, Y, Z, W her und bestimmt so die Art der verschiedenen Σ'-Ebenen, insbesondere in Bezug auf das Auftreten der Singularitäten α', β', θ'.

Im allgemeinen Falle (d. h. wenn das Originalsystem in

keiner speciellen Beziehung zur unendlichen Ebene steht) findet man so

$$m' = 3(\alpha+2r-n),\quad n' = r+n,\quad r' = \alpha+3r,\quad \alpha' = 0,$$
$$\beta' = 2(3\alpha-4n+5r),\ \text{u. s. w.}$$

Es folgen sehr ausführliche numerische Tabellen über die Σ'-Charaktere in den Fällen, wo die Σ-Cuspidalcurve von der dritten oder vierten Ordnung ist; sowie zuletzt eine interessante Zusammenstellung der Charaktere der drei mit einer gegebenen Σ verbundenen Systeme: der rectificirenden und der Polar-Fläche, sowie derjenigen, deren Cuspidalcurve der Ort des Krümmungskreiscentrums der Σ-Cuspidalcurve ist. Bg.

A. Brambilla. Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad uno numero qualunque di dimensioni. Lomb. Rend. (2) XIX. 326-331.

Der Verfasser stellt zuerst die Gleichung einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung im n-dimensionalen Raume auf und giebt die Bedingung an, unter welcher dieselbe schon in einem $(n-k)$-dimensionalen Gebiete enthalten ist. Letzterer Fall wird bei der weiteren Untersuchung ausgeschlossen und von einer solchen rationalen Normalcurve der allgemeine Satz bewiesen: Wenn in einem ebenen n-dimensionalen Raume eine Normalcurve C_n gegeben ist und auf ihr $r(<n)$ feste Punkte, so ist die den r Punkten zugeordnete Polarebene eines beliebigen Punktes Y in Bezug auf C_n gleichzeitig die Polarebene von Y in Bezug auf ein quadratisches Gebilde, wenn $(n-r)$ gerade, hingegen die Focalebene von Y in Bezug auf ein Nullsystem, wenn $(n-r)$ ungerade ist. Schg.

H. B. Fine. On the singularities of curves of double curvature. Newcomb Am. J. VIII. 156-177, auch sep. als Diss. Leipzig.

Die zwischen den homogenen Coordinaten eines Punktes $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ bestehenden Gleichungen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1(t) : \varphi_2(t) : \varphi_3(t) : \varphi$$

worin die analytische Function φ_i durch die Gleichung

$$\varphi_i(t) = a_{i0} + a_{i1}(t - t_0) + a_{i2}(t - t_0)^2 + \cdots$$

definirt ist, drücken innerhalb eines Convergenzkreises mit dem Mittelpunkte t_0 eine Raumcurve aus. Andrerseits lässt sich der Punkt P aus vier Fundamentalpunkten E_1, E_2, E_3, E_4 nach Grassmann'scher Methode mittels der Gleichung ableiten:

$$P = \varphi_1(t)E_1 + \varphi_2(t)E_2 + \varphi_3(t)E_3 + \varphi_4(t)E_4$$

und dann mit Hülfe der Reihenentwickelung für $\varphi_i(t)$ durch die Potenzen von $(t - t_0)$ ausdrücken. Nun ergiebt für einen dem Punkte P_{t_1} unendlich nahen Punkt $P_{t_1+\delta}$ die Taylor'sche Reihe:

$$P_{t_1+\delta} = P_{t_1} + P'_{t_1}\delta + P''_{t_1}\frac{\delta^2}{2!} + \cdots$$

Auf Grund dieser Entwickelung unterscheidet der Verfasser für den Punkt P_{t_1} drei Klassen von Singularitäten. Die erste Klasse liefert einen singulären Punkt von der Ordnung k_1, wenn P_{t_1} mit den k_1 ersten „Differentialpunkten" $P'_{t_1}, \ldots, P_{t_1}^{(k_1)}$ zusammenfällt; die zweite Klasse einen Punkt von der Ordnung k_2, wenn derselbe die Bedingung für die erste Klasse erfüllt, und ausserdem die Verbindungslinie $P_{t_1} P_{t_1}^{(k_1+1)}$ alle folgenden Differentialpunkte $P_{t_1}^{(k_1+2)}, \ldots$ bis $P_{t_1}^{(k_1+k_2+1)}$ enthält. Endlich liefert die dritte Klasse einen Punkt von der Ordnung k_3, wenn derselbe die Bedingungen der beiden ersten Klassen erfüllt und ausserdem die Ebene der Punkte P_{t_1}, $P_{t_1}^{(k_1+1)}$, $P_{t_1}^{(k_1+k_2+2)}$ alle folgenden Differentialpunkte $P_{t_1}^{(k_1+k_2+3)}, \ldots$ bis $P_{t_1}^{(k_1+k_2+k_3+2)}$ enthält. Die Tangente an die Curve in einem singulären Punkte zweiter Klasse (P) verbindet diesen Punkt mit dem ersten nicht mit P zusammenfallenden Differentialpunkte $P^{(k_1+1)}$; die Osculationsebene in einem singulären Punkte dritter Klasse (P) geht durch P, $P^{(k_1+1)}$ und den ersten nicht in die Gerade $PP^{(k_1+1)}$ fallenden Differentialpunkt $P^{(k_1+k_2+2)}$.

Den für die drei Klassen von Punkt-Singularitäten charakteristischen Zahlen k_1, k_2, k_3 entsprechen drei andere μ_3, μ_2, μ_1 für ebensoviele Klassen von Ebenen-Singularitäten (bei der Ebenenauffassung der Curve). Ist e die Osculationsebene im Punkte P, so sind die charakteristischen Zahlen des letzteren in

umgekehrter Reihenfolge diejenigen der Ebene ε. Das Verhalten des die Curve erzeugenden Elementes (Punkt, Gerade, Ebene) im Punkte P richtet sich danach, ob bezw. k_1, k_2, k_3 gerade oder ungerade ist. Aus den Combinationen dieser Fälle gehen die acht schon von v. Staudt angegebenen charakteristischen Formen der Raumcurven in der Nähe des Punktes P hervor.

Der Verfasser untersucht eingehend die Singularitäten der Curven, indem er der Reihe nach die drei verschiedenen Erzeugungsweisen durch Punkt, Ebene und Gerade zu Grunde legt. Es würde zu weit führen, hier darzuthun, in welcher Weise die Methoden der Ausdehnungslehre dabei benutzt werden; nur soviel sei bemerkt, dass bei der Punkterzeugung die progressive, bei der Ebenenerzeugung die regressive Multiplication das hauptsächliche Rechnungsinstrument ist. Während die Ebenen-Singularitäten den Punkt-Singularitäten reciprok entsprechen, erfordern die Linien-Singularitäten eine besondere Untersuchung, da sie zum Teil aus denjenigen der Punkte hervorgehen, zum Teil aber (wenn $k_1 = k_3$ ist) von denselben unabhängig sind. In ihrer Wirkung auf Ordnung, Klasse, Rang und Geschlecht der Curve entspricht die Singularität k_1, k_2, k_3 einer Anzahl von k_1 Punkten, k_2 Linien und k_3 Ebenen, alle als singuläre Elemente erster Ordnung gedacht. Vielfache Elemente sind ausgeschlossen. Am Schlusse der Abhandlung werden die Singularitäts-Bedingungen durch Determinanten der Coefficienten a (in der Entwickelung von $\varphi_i(t)$) ausgedrückt und ausserdem mit Hülfe der „Differentialcurven" $\varphi_i'(t)$, $\varphi_i''(t)$ etc., welche letztere Methode namentlich zu einer graphischen Darstellung der Singularitäts-Bedingungen führt. Die ganze hier vorgetragene Theorie lässt sich ohne Schwierigkeit auf $(n-1)$-fach gekrümmte Curven im n-dimensionalen Raume ausdehnen. Schg.

F. MEYER. Ueber die Projection einer Raumcurve von einem ihrer Punkte aus. Böklen Mitt. I_2 82-83.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. S. 605.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

P. Serret. Sur l'octaèdre. C. R. CIII. 867-870.

P. Serret. Sur l'octaèdre et la construction de la droite associée. C. R. CIII. 999-1002.

Nach Poncelet und Brianchon schneiden sich die einem Dreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ($A+A'=0$) ausser in den drei Eckpunkten noch in einem vierten Punkt, dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Obige Noten von P. Serret behandeln das räumliche Analogon zu diesem Satz. Schreibt man einem System von irgend sechs Punkten im Raume (hexagonalen Oktaeder) gleichseitige Hyperboloide ($A+A'+A''=0$) um, so schneiden sich dieselben ausser in den Ecken des Oktaeders noch in zwei Punkten ξ und η. Es entstehen nun von selbst die Fragen, ob diese „complementären Punkte“ ξ und η eine ähnliche Lagenbeziehung zu ihrem Oktaeder besitzen, wie in der Ebene der dem Dreieck „complementäre Punkt“, der Höhenschnittpunkt; ferner, wie sich die dem Oktaeder „associirte Gerade“ $\xi\eta$ construiren lasse, und endlich, welche Lage jeder der Punkte ξ und η habe. In der ersten Note wird die erste, in der zweiten die zweite Frage beantwortet. Ohne Beweis werden ferner noch einige Sätze über Raumcurven dritter Ordnung angeführt, welche mit dem Satz über die dem Oktaeder associirte Gerade in Zusammenhang stehen: Alle einer Raumcurve dritter Ordnung eingeschriebenen Oktaeder haben eine und dieselbe associirte Gerade. Man kann diese daher gewissermassen als eine Axe der Raumcurve bezeichnen. Sie ist der geometrische Ort der Höhenschnittpunkte aller der Raumcurve dritter Ordnung eingeschriebenen Dreiecke, deren Ebenen normal zur Axe der Curve stehen. Rdt.

Urysz. Ueber einige aus der analytischen Untersuchung sich ergebende regelmässige Körper. Pr. Stanislawow. (Polnisch.)

Der Veifasser betrachtet 48 Punkte im Raume, deren orthogonale Coordinaten man aus den Coordinaten eines von ihnen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

erhält, indem man die Zahlen a, b, c permutirt und ausserdem sie mit den Zeichen plus und minus auf alle möglichen Weisen behaftet. Geht durch jeden dieser Punkfe eine Ebene normal zu seinem Radiusvector, so schliessen die 48 Ebenen ein 48-eckiges Polyeder ein. Der Verfasser untersucht den so entstandenen Körper, berechnet seine Ecken, Winkel, Kanten, Flächen, Flächeninhalt, Volumen und wendet diese Berechnung auf specielle Fälle (Hexaeder, Oktaeder u. s. w.) an. Dn.

O. Hermes. Das Sechsflach. Pr. Kölln.-Gymn. Berlin.
Referat im Abschn. VIII, Cap. 5C, S. 579.

R. Lachlan. On systems of circles and spheres. Lond. R. S. Proc. XL 242-245, Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 481-625.
Referat in Abschnitt VIII, Cap. 3, S. 491.

M. Azzarelli. Equazioni delle superficie di 2^0 ordine dedotte dalle loro genesi. Rom. Acc P. d. N. L. XXXVII. 205-218.

Erzeugung sämtlicher Arten der Oberflächen zweiter Ordnung durch Verschiebung oder Rotation veränderlicher Kegelschnitte. Der Verfasser unterscheidet unverständlicher Weise die Fläche $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ als iperboloide iperbolica a due(!) falde von dem iperboloide ad una falda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, auch behandelt er drei verschiedene Arten des Kegels.

R. M.

A. Taer. Zur Entartung einer Fläche 2. Ordnung. Schlömilch Z. XXXI. 382-384.

Mit Hülfe von Determinantensätzen wird nachgewiesen, dass eine Fläche zweiter Ordnung in zwei Ebenen ausartet, wenn entweder ihre Determinante und zwei Diagonaladjuncten, oder drei nicht derselben Zeile angehörige Adjuncten verschwinden. Ferner artet die Fläche in zwei zusammenfallende Ebenen aus, wenn sechs beliebige Subdeterminanten zweiten Grades, von denen nur nicht drei aus einer Zeilencombination gewählt sein dürfen, verschwinden. Mz.

P. van Geer. De Kegelsnede in de ruimte. Nieuw Archief. XIII. 58-84.

Die Arbeit schliesst sich an die 15 Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes von O. Hesse an. Es wird darin gezeigt, wie ein Kegelschnitt im Raume durch eine einzige Gleichung dargestellt werden kann, wenn von Punkt-Coordinaten auf Ebenen-Coordinaten übergegangen wird. Diese Gleichung wird hier einer näheren Untersuchung unterworfen und gezeigt, wie die Art des Kegelschnitts, der Ort des Mittelpunktes, die Ebene und andere Elemente der Curve aus der Gleichung bestimmt werden können. Sodann wird der Einfluss betrachtet, welchen die Transformation der Coordinaten auf die Gleichung des Kegelschnitts hat, und welche Grössen Invarianten der Transformation sind. Daraus werden die einfachsten Formen entwickelt, welche die Gleichungen der drei Kegelschnitte im Raume annehmen können. Auch die Bedingungen, unter denen sie in einen Kreis oder in eine gleichseitige Hyperbel übergehen, werden aufgesucht; im ersten Fall werden Ebene, Mittelpunkt und Radius des Kreises aus den Coefficienten der Gleichung abgeleitet. Weiter wird dargethan, wie aus den beiden Gleichungen, welche in Punkt-Coordinaten einen Kegelschnitt im Raume vorstellen, die eine Gleichung in Ebenen-Coordinaten erhalten wird, und umgekehrt, auf welche Weise die letztere in zwei Gleichungen in Punkt-Coordinaten umgesetzt werden kann. G.

BARBARIN. Axes des sections planes des surfaces du second ordre. Mathesis. VI. 25-31, 49-53. Mn.

O. STAUDE. Ueber neue Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades. Klein Ann. XXVII. 253-271.

O. STAUDE. Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoids. Klein Ann. XXVII. 412-418.

Die bekannte Fadenconstruction des Herrn Verfassers für das Ellipsoid (Leipz. Abh. 1882, Ref. F. d. M. XV. 1883. 689) ist neuerdings von Herrn Finsterwalder (Math. Ann. XXVI. 564. Ref. in diesem Bande Seite 583) in einfacher geometrischer Weise begründet worden. Die erste der vorliegenden Arbeiten führt die bei jener Construction benutzten Focaleigenschaften der Flächen auf eine zugleich allgemeinere und elementarere Grundlage und erweitert die früher gefundenen Gesetze nicht unwesentlich.

Bekanntlich stellt die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha-t}+\frac{y^2}{\beta-t}=1$$

mit dem Parameter t ein System confocaler Kegelschnitte in der Ebene dar. Durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gehen zwei derselben $t=\lambda$, $t=\mu$, wo

$$-\infty<\lambda<\beta<\mu<\alpha$$

ist, und es heissen λ, μ die elliptischen Coordinaten des Punktes P.

Die beiden Entfernungen des Punktes λ, μ von den Brennpunkten des Systems sind dann

$$\sqrt{\alpha-\lambda}\pm\sqrt{\alpha-\mu},$$

und die Gleichungen $\lambda=$ const., $\mu=$ const., $\lambda+\mu=$ const., $\mu-\lambda=$ const. stellen eine Ellipse, eine Hyperbel des confocalen Systems, einen Kreis und eine Cassini'sche Curve dar.

Es handelt sich um die analogen Beziehungen im Raume. Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha-t}+\frac{y^2}{\beta-t}+\frac{z^2}{\gamma-t}=1$$

mit dem Parameter t ist ein System confocaler Flächen zweiten

Grades bestimmt. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehen drei Flächen des Systems $t = \lambda$, $t = \mu$, $t = \nu$, wo

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha,$$

und λ, μ, ν heissen die elliptischen Coordinaten des Punktes P. Die Gleichungen $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ stellen ein Ellipsoid, ein ein- und ein zweischaliges Hyperboloid des Systems dar, $\lambda + \mu + \nu = \text{const.}$ eine Kugel, $\mu + \nu = \text{const.}$ die Fresnel'sche Wellenfläche, $\lambda + \mu - \nu = \text{const.}$ und $\mu - \nu = \text{const.}$ sogenannte Cassinoid-Flächen sechster und achter Ordnung. Von Interesse ist es nun, Ausdrücke zu finden, welche für den Raum eine analoge Bedeutung haben, wie der Ausdruck

$$\sqrt{\alpha - \lambda} \pm \sqrt{\alpha - \mu}$$

für die Ebene. Dies wird in gewisser Weise durch die Arbeit erreicht. Focalpunkte des Systems sind die Punkte g der Focalellipse G, welche durch die elliptischen Coordinaten γ, γ, ν bestimmt sind, und die Punkte h der Focalhyperbel H mit den elliptischen Coordinaten λ, β, β, und zwar heissen g und h ungleichnamige Focalpunkte. Der Herr Verfasser nennt ausserdem allgemein eine gebrochene Linie $ABCDE$, deren Knickpunkte B, C, D auf gewissen Curven so liegen, dass die dort zusammenhängenden geraden Teile mit den beiden Tangentenrichtungen der Curve bezüglich gleiche Winkel bilden, eine Gleichgewichtsverbindung und ihre Länge eine Gleichgewichtsdistanz der Endpunkte A und E. Eine solche stellt eine Gleichgewichtslage und kürzeste Länge eines über die Curven von A über h gespannten Fadens dar.

Es handelt sich nun specieller um folgende Gleichgewichtsverbindungen bezw. Distanzen.

I. Ist gegeben ein beliebiger Punkt P (λ, μ, ν) und ein Ellipsenpunkt g (γ, γ, ν_0), so kann der Knickpunkt ein Hyperbelpunkt sein, der a) gleichseitig oder b) ungleichseitig mit g liegt, d. h. auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite der yz Ebene. Im ersteren Falle a) hat man die Gleichgewichtsdistanz

$$s = \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \varepsilon \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \nu_0},$$

im Falle b)

$$s' = \sqrt{a-\lambda} + \sqrt{a-\mu} + \varepsilon\sqrt{a-\nu} + \sqrt{a-\nu_0}.$$

Die Wurzeln sind sämtlich positiv und ε ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem P und g gleichseitig sind oder nicht.

II. Ist gegeben ein Punkt $P(\lambda, \mu, \nu)$ und ein Hyperbelpunkt $h_0(\lambda_0, \beta_1, \beta)$, so kann man a) eine Gleichgewichtsverbindung über die Ellipse allein mit einem Knickpunkt herstellen. Die Gleichgewichtsdistanz ist dann

$$r = \sqrt{a-\lambda} - \sqrt{a-\mu} - \varepsilon\sqrt{a-\nu} + \sqrt{a-\lambda_0}.$$

Oder man kann b) eine Gleichgewichtsverbindung mit zwei Knickpunkten herstellen, deren erster ein gewisser Punkt des mit h_0 ungleichseitigen Hyperbelastes ist, während der zweite ein unbestimmter Ellipsenpunkt ist. Die Gleichgewichtsdistanz ist dann

$$r' = \sqrt{a-\lambda} + \sqrt{a-\mu} + \varepsilon\sqrt{a-\nu} + \sqrt{a-\lambda_0}.$$

Der Kürze des Ausdrucks wegen werden die beidemal unter a) aufgeführten Gleichgewichtsdistanzen r und s schlechtweg als gebrochene Focaldistanzen bezeichnet. Aus den Formeln für r und s ergeben sich nun viele Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades, von denen wir die folgenden als die einfachsten und wichtigsten hervorheben.

1) Für alle Punkte eines Ellipsoides ($\lambda = \text{const.}$) ist die Summe der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei ungleichseitigen, ungleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

2) Für alle Punkte eines einschaligen Hyperboloides ($\mu = \text{const.}$) ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei gleichseitigen, ungleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

3) Für alle Punkte einer Schale eines zweischaligen Hyperboloides ($\nu = \text{const.}$) ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanzen von irgend zwei ungleichseitigen, gleichnamigen Focalpunkten dieselbe.

Zugleich ist die Halbirungslinie des Winkels oder Aussenwinkels der Anfangsstücke der jeweils benutzten zwei gebrochenen Focaldistanzen die Normale der betreffenden Fläche.

Auf die Eigenschaft I kann eine Fadenconstruction des

Ellipsoids gegründet werden, ebenso ergeben sich Fadenconstructionen für die Krümmungslinien der Ellipsoide und einschaligen Hyperboloide.

Die zweite Arbeit enthält eine Anwendung der in der ersten entwickelten Gesetze auf die Katoptrik und führt zu folgenden Resultaten:

1) Die von einem beliebigen im Innern des Ellipsoides gelegenen Punkte H eines ersten Zweiges der Focalhyperbel gegen die Focalellipse hinlaufenden einfach unendlich vielen Lichtstrahlen lösen sich, indem sie in ihrem Verlaufe zuerst an der Focalellipse und dann an dem zweiten Zweige der Focalhyperbel conisch reflectirt werden, in dreifach unendlich viele Strahlen auf; werden aber nach einer abermaligen Reflexion an dem Ellipsoide in den einfach unendlich vielen Punkten der Focalellipse vereinigt.

2) Alle die zweifach unendlich vielen Strahlen aus jener dreifachen Mannigfaltigkeit, welche in demselben Punkte der Focalellipse G enden, haben von H bis G gleiche Länge.

3) Diese Länge ist kleiner als irgend eine zweimal gebrochene Linie, die man sonst von H nach G über die betreffenden Linien und die Fläche in der nämlichen Reihenfolge führen kann.

In diesen drei Sätzen zeigt sich eine sehr grosse Analogie mit gewissen optischen Eigenschaften der Ellipse. A.

MANGEOT. Note sur l'hyperboloïde. Nouv. Ann. (3) V. 480-483.

Der Herr Verfasser betrachtet drei Gerade eines einschaligen Hyperboloides, die sich nicht treffen, also derselben Schar angehören, und construirt aus ihnen ein Parallelepiped P, indem er durch jede Gerade je eine Ebene einer der beiden anderen parallel legt. Sind 2α, 2β, 2γ die Kantenlängen des Parallelepipeds, ferner S und S' die nicht auf dem Hyperboloid gelegenen Ecken desselben, so wird durch das Centrum O der Fläche ein Axensystem Ox, Oy, Oz parallel den drei Geraden

gelegt, so dass das Trieder $Oxyz$ einen der Punkte S, S' in seinem Innern zu liegen hat. Dann ist die Gleichung des Hyperboloides für dieses Axensystem

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Ferner sei für die Symmetrieaxen die Gleichung derselben Fläche:

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Aus Invariantensätzen hat man dann die Relationen:

$$(1) \qquad \alpha\beta\gamma\sqrt{D} = \tfrac{1}{2}abc,$$

$$(2) \qquad 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\varrho^2 = a^2+b^2-c^2,$$

$$(3) \qquad \Sigma 2\alpha(\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu) = abc\sqrt{D}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right),$$

wo

$$\lambda = \widehat{yOz}, \quad \mu = \widehat{zOx}, \quad \nu = \widehat{xOy},$$
$$D = 1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$
$$\varrho^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cos\lambda-2\gamma\alpha\cos\mu-2\alpha\beta\cos\nu.$$

Die Relationen (1), (2), (3) werden nun geometrisch interpretirt.

Mz.

ANCIEN ÉLÈVE de l'École Polytechnique. Condition pour que quatre droites soient les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde. Nouv. Ann. (3) V. 158-160.

Sind die Gleichungen von vier Geraden ($i = 1, 2, 3, 4$)

$$\frac{X-x_i}{a_i} = \frac{Y-y_i}{b_i} = \frac{Z-z_i}{c_i}$$

und setzt man

$$c_i y_i - b_i z_i = l_i, \quad a_i z_i - c_i x_i = m_i, \quad b_i x_i - a_i y_i = n_i,$$

so sind die Bedingungen dafür, dass jene vier Geraden auf einem Hyperboloid liegen,

$$\Sigma\pm(a_1 b_2 c_3 l_4) = 0, \quad \Sigma\pm(a_1 b_2 c_3 m_4) = 0, \quad \Sigma\pm(a_1 b_2 c_3 n_4) = 0,$$

wo die linken Seiten in bekannter Weise Determinanten von je 16 Elementen bezeichnen.

A.

H. Novarese. Sur une propriété du paraboloïde hyperbolique. Mathesis VI. 75-76.

Unter denjenigen Strecken der Erzeugenden einer Schar, welche zwischen zwei Erzeugenden der anderen Schar liegen, hat die Strecke, die zu der durch den Scheitel gehenden Erzeugenden gehört, die kleinste Länge. Mn. (Lp.)

H. G. Zeuthen. En Udledelse af Betingelsen for, at en Flade af anden Orden er udfoldelig. Zeuthen Tidskr. (5) IV. 128-130.

Herleitung der Bedingung dafür, dass eine Fläche zweiten Grades abwickelbar ist, mittels Determinanten. Gm.

F. Rogel. Zur Theorie der Volumbestimmungen. Hoppe Arch. (2) IV. 218-224.

Es wird gezeigt, wie das Volumen gewisser, von mehreren Flächen begrenzter Körper, das auf gewöhnlichem Wege nur mittels umständlicher Zerlegungen gefunden werden kann, direct zu ermitteln ist. Als Beispiele werden ein von drei Paar Ebenen und ein von sechs parabolischen Hyperboloiden begrenzter Körper benutzt. Lg.

P. Aubert. Question proposée au concours général pour la classe de mathématiques spéciales, juin 1886. Solution analytique. Edinb. M. S. Proc. IV. 91-96.

Eine Aufgabe über Flächen zweiter Ordnung. Gbs.

G Garbieri Sui fasci e sulle schiere di superficie. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 943-994.

Zweck dieser Arbeit ist, die ja durchweg bekannten Eigenschaften der Büschel und Scharen der Oberflächen zweiter Ordnung mittels der Clebsch-Aronhold'schen symbolischen Methode

zu entwickeln. Die ersten 25 Seiten enthalten in grosser Vollständigkeit die elementaren Entwickelungen, welche sich auf die verschiedenen Coordinaten eines Punktes, einer Ebene, einer Geraden beziehen, und ihre Verwendung zur Darstellung einer Fläche zweiter Ordnung resp. Klasse; im zweiten Abschnitt werden dann die durch Schnitt oder Polarität hergestellten Beziehungen untersucht, welche sich zwischen Punkten, Ebenen, Geraden einerseits und Büschel, Schar andrerseits ergeben. Zum Schlusse werden die dem Büschel oder der Schar angehörigen Grenzflächen besprochen. R. M.

G. Garbieri. Sulle superficie polari covarianti e sui loro invarianti simultanei. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 1149-1166.

Wenn man, von einer Grundfläche eines Büschels zweiter Ordnung oder von den fundamentalen Covarianten und Contravarianten desselben ausgehend, die polar-reciproken Flächen in Bezug auf die zweite Grundfläche des Büschels herstellt, und umgekehrt, so erhält man neue Covarianten, welche sich mit Hülfe der fundamentalen Invarianten und Covarianten ausdrücken lassen. Der Verfasser entwickelt diese Relationen und untersucht die geometrische Bedeutung der dabei auftretenden simultanen Invarianten. Die vier letzten Seiten enthalten eine kurze Andeutung über die Divarianten des Büschels. R. M.

R. Noske. Die kürzesten Linien auf dem Ellipsoid. Pr Königsberg i. Pr.

Eine übersichtliche Darstellung der allgemeinen Theorie und eine eingehendere Discussion der Kürzesten auf Rotationsflächen ohne wesentlich neue Resultate. A.

A. R. Johnson. Note on the quadric and the cubic. Mess. XVI. 63-66.

Die Note bezieht sich auf Salmon's „Geometry of three dimensions“, 4te Aufl. Des Verfassers allgemeines Resultat ist,

dass, obschon drei $(n+1)$-äre Quadriflächen ein gemeinsames $(3n+1)$-Flach besitzen und polare Quadriflächen derselben kubischen Fläche sein können, dennoch drei $2n$-äre Quadriflächen nicht ein gemeinsames selbstconjugirtes $(3n-1)$-Flach haben können, ausser wenn sie durch eine Gleichung n^{ter} Ordnung in den Coefficienten jeder der Quadriflächen verbunden sind.

Glr. (Lp.)

A. Cantone. Teoremi sulla cubica gobba. Palermo Rend. I. 72-74.

I. Die Polarebene einer Geraden r in Bezug auf den Kegel, welcher eine kubische Raumcurve Γ aus einem Punkte von r projicirt, geht durch eine feste Gerade r'; r und r' zeigen die vier Sehnen von Γ wieder auf, die in den durch r gehenden Tangentialebenen von Γ liegen. Und umgekehrt. II. Wenn die Gerade r zum Complexe Ω ersten Grades gehört, welcher durch die Curve Γ bestimmt ist, so gehört r' ebenfalls zu Ω, und dann ist die Beziehung zwischen r und r' reciprok. III. Eine Gerade von Ω schneidet die zu Γ gehörende osculirende abwickelbare Fläche in vier Punkten mit äquianharmonischem Verhältnisse. (Ein sehr bekannter Satz; vgl. z. B. D'Ovidio, „Sulle cubiche gobbe", no. 12 e 37; Mem. di Torino (2) XXXII). IV. Die conjugirte Ebene (Cremona, Nouv. Ann. (2) I) der Ebenen, welche durch eine Gerade r von Ω gehen, sind die osculirenden Ebenen der kubischen Raumcurven, welche der Ort für die „conjugirten Punkte" der Punkte von r ist. V. Wenn die Ebene im Unendlichen eine kubische Raumcurve in drei Punkten schneidet, so giebt es eine Oberfläche dritter Ordnung, welche nicht nur die Sehnen der gegebenen Curve, sondern auch die einer anderen von derselben Ordnung in gleiche Stücke zerschneidet, welche mit der vorigen die Punkte im Unendlichen, zwei andere Punkte und fünf Schmiegungsebenen gemeinschaftlich hat. VI. Die windschiefe Fläche, welche die Sehnen einer kubischen Parabel hälftet, thut dies auch mit den Sehnen einer einfachen Schar analoger Curven, von welchen eine durch einen Punkt der Oberfläche bestimmt ist.

La. (Lp.)

A. Cantone. Teoremi sulla cubica gobba, dedotti dallo studio di una transformazione involutoria nello spazio. Nap. Rend. XV. 181-190.

Die Raumtransformation, zuerst von Herrn Reye (G. d. Lage II. Vierz. Vorl.) ausführlich behandelt, ordnet je zwei Punkte einander wechselseitig zu, die auf derselben Sehne einer Raumcurve Γ dritter Ordnung liegen und die beiden auf derselben liegenden Punkte von Γ harmonisch trennen. Hierbei entspricht, wie Herr Reye gezeigt hat, einer Geraden r eine Raumcurve k_r^3 dritter Ordnung, ein Kegelschnitt oder eine „associirte" Gerade, je nachdem r allgemein liegt, einen Punkt von Γ enthält oder aber noch in der Schmiegungsebene des Punktes liegt. Die Curve k_r^3 enthält die Berührungspunkte der von r ausgehenden Tangentenebenen von Γ.

Einer Ebene α entspricht eine Fläche dritter Ordnung Π_α mit Doppelpunkten in den Schnittpunkten A_1, A_2, A_3 von α mit Γ, die auch Γ enthält. Von den 12 Geraden fallen drei mit den gegenseitigen Verbindungslinien c_{23}, c_{31}, c_{12} dieser Punkte, drei andere mit ihren Tangenten a_1, a_2, a_3 zusammen. Ist in dem Nullsystem, welches Γ eindeutig bestimmt, F der Nullpunkt von α, so entsprechen den Linien A_1F, A_2F, A_3F drei andere Gerade p'_1, p'_2, p'_3 der Fläche, die durch einen Punkt F_1 gehen. Sie liegen aber auch in einer Ebene α_1; dieselbe entspricht in der dualistischen und auf den Schmiegungsbüschel Σ von Γ bezogenen Transformation der Ebene α.

Die Geraden b_1, b_2, b_3, welche, von A_1, A_2, A_3 ausgehend, a_2, a_3; a_3, a_1; a_1, a_2 schneiden, sind drei letzte Gerade der Fläche Π_α; demnach muss F_1 mit dem Schnittpunkt der Ebenen a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 zusammenfallen, p'_1, p'_2, p'_3 müssen in diesen Ebenen liegen und c_{23}, c_{31}, c_{12} der Reihe nach treffen. Die Fläche ist durch Angabe von A_1, A_2, A_3 und Hinzufügung von a_1, a_2, a_3 vollkommen eindeutig bestimmt, eben so aber auch durch Hinzufügung von b_1, b_2, b_3. Auch die Curve $\varDelta$ dritter Ordnung, die b_1, b_2, b_3 in den Punkten A_1, A_2, A_3 berührt, bestimmt eine Beziehung betrachteter Art, bei der Π_α zu α gehört.

Diese Fläche enthält daher auch $\varDelta$. Da F und F_1 sich auch für diese zweite Beziehung entsprechen, so begegnen sich $\varGamma$ und $\varDelta$ in zwei Punkten M und N der Verbindungslinie FF_1, auch haben sie hier ihre Schmiegungsebenen gemeinsam, da Π_a die Reihen der Schmiegungsebenen von $\varGamma$ und $\varDelta$ berühren muss.

Einem Punkt K_1 von α entsprechen zwei verschiedene Punkte von Π_a in den beiden verschiedenen Systemen. Vertauscht man diese Punkte mit einander, so entspricht ihnen in demselben Sinne wieder ein Punkt K_2 von α. Die so gegebene involutorische Beziehung zwischen den Punkten K_1 und K_2 von α ordnet einer Geraden im allgemeinen eine Curve fünfter Ordnung zu.

In der Beziehung, welche $\varGamma$ bewirkt, entspricht nicht nur diese Curve sich selbst, sondern auch eine andere, die ihr unendlich nahe auf ihrer Tangentenfläche liegt. Eine Curve n^{ter} Ordnung, die diese Fläche in Punkten von $\varGamma$ t-mal berührt und s-mal schneidet, geht durch die Transformation in eine Curve von der Ordnung $3n-2t-s$ über.

Nimmt man hinsichtlich der Geraden r für alle Kegel, die $\varGamma$ zur Leitlinie haben und deren Spitze auf r liegt, die Polarebene, so dreht sich dieselbe um eine r zugehörige Gerade r'. Gelangt r in den Strahlencomplex Ω des durch $\varGamma$ bestimmten Nullsystems, so gelangt auch r' in denselben; beide werden dann, da sie sich in diesem Falle wechselseitig entsprechen, als polar conjugirt hinsichtlich $\varGamma$ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen r und r' kann in diesem besonderen Falle auch nach der dualistisch gegenüberstehenden Methode definirt werden.

Das Ebenenbüschel dritter Ordnung, welches einer Geraden des Complexes Ω durch die zu der gegebenen duale Transformation zugeordnet wird, schmiegt sich derjenigen k_r^3 an, die der Geraden nach den gegebenen Transformationen zugehört.

Die angeführten Resultate ergeben sich zum einen Teil auf rein geometrischem, zum anderen Teil auf rechnendem Wege.

E. K.

A. WITTING. Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) führt. Diss. Göttingen. 58 S. 8°.

D. Andere specielle Raumgebilde.

K. ROHN. Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Gekrönte Preisschrift der Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig. S. Hirzel. 58 S.

Die Arbeit zerfällt in zwei Teile, deren erster die Untersuchung der Knotenpunkte enthält, welche bei einer Fläche vierter Ordnung auftreten können, und der möglichen Relationen zwischen diesen Knotenpunkten. Diese Untersuchung wird durch die Betrachtung des Tangentenkegels der Fläche vermittelt, welcher zum Scheitel einen Knoten der Fläche hat, respective des Durchschnitts dieses Kegels mit einer Ebene. Sind x, y, z, w homogene Coordinaten und ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ der Knotenpunkt, so lässt sich die Gleichung der Fläche in die Form bringen

$$u_2 w^2 + 2u_3 w + u_4 = 0,$$

wo u_2, u_3, u_4 homogene Ausdrücke zweiten, dritten und vierten Grades in x, y, z sind. Die Gleichung des Tangentenkegels, respective seiner Durchschnittscurve mit der w-Ebene ist dann

$$u_2 u_4 - u_3^2 = 0.$$

Diese Curve sechster Ordnung wird von dem Kegelschnitt $u_2 = 0$, $w = 0$ in den sechs Punkten berührt, die zugleich auf der Curve dritten Grades $u_3 = 0$, $w = 0$ liegen. Umgekehrt kann jede Curve sechster Ordnung, welche von einem Kegelschnitt in sechs Punkten berührt wird, als Schnitt eines solchen Tangentenkegels aufgefasst werden, und zwar für ∞^7 Flächen vierter Ordnung,

die in einander linear transformirbar sind. Durch Betrachtung aller Specialitäten dieser ebenen Curven sechster Ordnung gelangt man zu allen Flächen vierter Ordnung mit Knotenpunkten, und man kann aus den Eigenschaften dieser Curven auf das Vorhandensein weiterer Knotenpunkte schliessen. Die Zahl aller Knoten kann bekanntlich bis auf 16 steigen. Demgemäss werden die Curven sechster Ordnung genau discutirt, und es werden aus den Curven sechster Ordnung mit 8, 9 oder 10 Doppelpunkten, ebenso aus solchen mit 7 oder 6 Doppelpunkten diejenigen ausgesondert, welche einen Kegelschnitt in sechs Punkten berühren; von diesen sind namentlich diejenigen mit 10 Doppelpunkten wichtig. Alsdann werden die Flächen vierter Ordnung mit Knotenpunkten genauer untersucht. Ist die Zahl der Knoten grösser als sieben, so ist ihre Lage nicht mehr willkürlich, sondern gewissen Beziehungen unterworfen. Die Aufzählung der verschiedenen Klassen von Flächen vierter Ordnung mit Knoten, die sich hierbei ergeben, würde hier zu weit führen.

Der zweite Abschnitt der Arbeit behandelt die Gestaltsverhältnisse der allgemeinen Flächen vierter Ordnung. Ueber diese wird teils aus dem Umstande, dass keine Gerade mehr als vier Punkte mit der Fläche gemein hat, wenn sie nicht ganz auf der Fläche liegt, teils aus der Betrachtung der Grenzflächen, also der Fälle, wo die Fläche aufgelöst ist, oder wo sie Knotenpunkte enthält, gewonnen, indem man durch stetige Deformation aus den Grenzfällen die allgemeinen Fälle entstehen lässt. Auch die aus den Doppeltangenten gebildeten Strahlensysteme werden bei dieser Discussion mit benutzt, und nachdem zunächst die Gestaltsverhältnisse der Fläche mit einem Knotenpunkt gefunden sind, wird der Uebergang zu den Flächen ohne Knotenpunkt gemacht. Für diese findet der Herr Verfasser folgende Hauptformen:

1) Zwei ineinander liegende Ovale. 2) Fläche ohne reelle Punkte. 3) Ein bis zwölf auseinander liegende Ovale. 4) Ring vom Zusammenhang p und daneben noch Null bis $11-p$ Ovale. 5) Zwei Ringe vom Zusammenhange 1. 6) Zwei halbpaare Flächenteile vom Zusammenhange 1. 7) Ein halbpaarer Flächen-

teil vom Zusammenhange p und daneben noch Null bis $11-p$ Ovale.

(Ein paarer Flächenteil ist ein solcher, auf welchem sich nur paare Curvenzüge finden, analog dem Ellipsoid, — ein unpaarer ein solcher, auf welchem sich nur unpaare Curvenzüge finden, analog der Ebene, — und ein halbpaarer ein solcher, auf welchem sich paare und unpaare Züge finden, analog dem einschaligen Hyperboloid.)

Wenn auch mit diesen Angaben, wie der Herr Verfasser selbst sagt, noch keine vollständige Einsicht in die Gestaltsverhältnisse gewonnen ist, so ist doch ein allgemeiner Ueberblick geschaffen, und wir müssen uns dem Verfasser anschliessen, wenn er bezweifelt, dass bei einem Gestaltenreichtum, der viele Tausende charakteristisch verschiedener Gestalten umfasst, eine vollständig befriedigende Uebersicht erreicht werden kann.

A.

K. Rohn. Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung. Klein Ann. XXVIII 284-308.

Als Princip für die Einteilung der Regelflächen vierter Ordnung ist schon von früheren Bearbeitern (Chasles, Cayley, Cremona) die Natur der Doppelcurve benutzt.

Zur Gewinnung von Unterabteilungen sind zweckmässiger Weise die Realitätsverhältnisse zu berücksichtigen. Dies ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Mit Ausnahme der Regelflächen mit einer dreifachen Geraden tritt stets der Fall ein, dass die Punkte der Doppelcurve, sie sei nun irreducibel oder nicht, zwei- und zweideutig aufeinander bezogen werden. Deshalb dient als Vorbereitung zu der Ausführung der Klassifikation eine eingehende Discussion der zwei- und zweideutigen Verwandtschaft, die der Herr Verfasser vermittelst einer rationalen Substitution erster Ordnung durch eine symmetrische Relation darstellt und dann weiter mit ihren speciellen Fällen behandelt. Hierdurch gelingt die Einteilung und die Aufstellung der Gleichungen für die verschiedenen Regelflächen vierter Ordnung in sehr über-

sichtlicher Weise. Es werden nacheinander die verschiedenen möglichen Voraussetzungen über die Doppelcurve gemacht. Dieselbe kann bestehen aus zwei Doppelgeraden, einer Selbstberührungsgeraden, einer Doppelcurve dritter Ordnung, einem Doppelkegelschnitt und einer Doppelgeraden, und aus einer dreifachen Geraden. Für die meisten dieser Fälle ergeben sich zahlreiche Unterabteilungen. Für zehn verschiedene dieser Flächenarten hat der Herr Verfasser durch das Institut des Herrn Brill in Darmstadt Modelle anfertigen lassen. Bemerkenswert ist noch, dass unter den Regelflächen vierter Ordnung eine solche ist, welche auf unzählig viele Arten linear in sich selbst transformirt werden kann. A.

A. Leman. Ueber eine besondere Fläche vierter Ordnung mit Doppelgerade und darauf liegendem dreifachen Punkt und ihre Beziehungen zu besonderen Regelflächen dritter Ordnung. Pr. Progymn. Oberehnheim.

Es handelt sich um den geometrischen Ort der Krümmungskreise der Normalschnitte in einem beliebigen, nicht singulären Flächenpunkt O.

Sind $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$ die beiden Hauptkrümmungsradien, so können die Coordinaten eines Flächenpunktes leicht in folgender Form dargestellt werden:

$$x = \frac{\sin 2\vartheta \cos\varphi}{r_1 \cos^2\varphi + r_2 \sin^2\varphi}, \quad y = \frac{\sin 2\vartheta \sin\varphi}{r_1 \cos^2\varphi + r_2 \sin^2\varphi},$$

$$z = \frac{1 + \cos 2\vartheta}{r_1 \cos^2\varphi + r_2 \sin^2\varphi},$$

worin die Parameter ϑ und φ sehr einfache geometrische Bedeutungen haben. Die Elimination von φ und ϑ ergiebt

$$[r_1(x^2+y^2+z^2) - 2z]x^2 + [r_2(x^2+y^2+z^2) - 2z]y^2 = 0.$$

Diese Fläche ist nur der Lage und der Grösse nach verschieden von dem Orte der Krümmungsmittelpunkte aller ebenen Schnitte der ursprünglichen Fläche in O. Die betrachtete Fläche hat die z-Axe (d. h. die Normale der ursprünglichen Fläche) zur Doppel-

geraden, den Punkt O zum dreifachen Punkt und geht bei der Transformation durch reciproke Radien von O aus in eine Regelfläche dritter Ordnung aus). Die Discussion der betrachteten Flächen bezieht sich u. a. auf die Lage gewisser darauf befindlicher Geraden, ebener und sphärischer Kegelschnitte und anderer Curven. A.

A. Sucharda. Ueber die 16 Geraden einer Rückungsfläche vierter Ordnung. Casop XV. 149. (Böhmisch.)

Unter Voraussetzung des von Tilser herrührenden Erzeugungsgesetzes einer Gattung Rückungsflächen, welche zwei Curvensysteme, das eine mit der Leitlinie, das andere mit der Erzeugenden congruent, enthalten, zeigt der Verfasser, dass eine derartige Rückungsfläche, wofern die Leit- und Erzeugendencurve zweiter Ordnung sind, von der vierten Ordnung sei und einen Doppelkegelschnitt besitze.

Demzufolge stellt er sich die Aufgabe, die ihnen als Kummer'schen Flächen zugehörigen 16 Geraden und deren Anordnung zu ermitteln. Zur Lösung dieser Aufgabe bedient er sich der von Geiser im Journ. f. Math. LXX. 249 empfohlenen Transformation, welche darin besteht, dass jedem Punkte des Originals derjenige zuzuweisen ist, welcher mit ihm auf einer durch einen festen Punkt gehenden Geraden liegt und von ihm durch die beiden Schnittpunkte dieser Geraden mit einer festen Quadrifläche harmonisch getrennt wird. Als zu transformirende wird eine durch zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmte Rückungsfläche vierter Ordnung, als feste Quadrifläche ein ihren Doppelkegelschnitt enthaltendes Rotationshyperboloid gewählt und auf analytischem Wege als Transformationsresultat eine Fläche achter Ordnung erhalten.

Nachdem dann mit Hülfe einer entsprechenden Zerlegung des Gleichungs-Polynoms die Ebene der Doppelcurve als einfache Ebene, ferner der durch den Doppelkegelschnitt und den festen Punkt bestimmte Quadrikegel als Doppelkegel abgesondert ist, bleibt als eigentliches Transformationsresultat eine Fl[illegible]

Ordnung zurück, welche Geiser's Angabe gemäss unter ihren 27 Geraden jene 16 birgt, welche der Rückungsfläche entsprechen.

Durch nähere Untersuchung dieser Fläche dritter Ordnung ergeben sich zunächst vier einfache Knotenpunkte derselben (es sind dies die den vier unendlich entfernten Knotenpunkten der Rückungsfläche entsprechenden Punkte), ferner ihre 27, sämtlich reellen Geraden; hierbei stellt sich jedoch heraus, dass die fraglichen 16 von ihnen zu je vieren in 4 vierfache Geraden zusammenfallen, deren jede durch zwei von den vier Knotenpunkten der Fläche hindurchgeht.

Für die Rückungsfläche folgt hieraus, dass ihre sämtlichen Geraden im Unendlichen liegen, und dass sie, zu je vieren in eine einzige zusammenfallend, durch je ein Paar der Knotenpunkte dieser Fläche hindurchgehen.

Dieses Resultat, welches eine Gültigkeit auch für alle übrigen Rückungsflächen vierter Ordnung von dieser Gattung behält, wird noch durch die Bemerkung vervollständigt, dass diese Geraden im Falle reeller Knotenpunkte sämtlich reell, sonst aber imaginär sind.

Zum Schlusse werden mit Rücksicht auf diesen Umstand sowie auf das bei einigen vorkommende Zusammenfallen von acht, ja sogar von 16 Geraden in eine einzige diese Rückungsflächen namentlich angeführt. Std.

A. Cayley. On a form of quartic surface with twelve nodes. Brit. Ass. Rep. 540-541.

Analytische Untersuchung einer der beiden Formen der Oberfläche vierter Ordnung mit zwölf Knotenpunkten, die von Hrn. K. Rohn (Leipz. Ber. 1884. 52-60, F. d. M. XVI. 702) unterschieden sind. Gbs. (Lp.)

A. R. Johnson. Note on the cyclide. Mess. XVI. 33-35.

Die fünffache Erzeugung der Cyklide wird einfach daraus hergeleitet, dass die auf die Hauptkugeln bezogene Gleichung

mit der auf die Hauptebenen bezogenen identificirt wird. Einfache Ausdrücke werden gleichzeitig für die Elemente der Leitfläche zweiter Ordnung und die Jacobi'sche Kugel erhalten.

Glr. (Lp.)

St. Jolles. Die Theorie der Osculanten und des Sehnensystems der Raumcurve IV. Ordnung II. Species. Aachen. Mayer'sche Hofbuchhandlung. IV u. 24 S.

Sind $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, ..., $a_n = 0$ Gleichungen beliebiger Ebenen, ist n_p der Binomialcoefficient $\frac{n(n-1 \dots (n-p+1)}{1 \,.\, 2 \dots p}$, und sind $\varkappa$ und λ Parameter, so stellt

$$f(\varkappa, \lambda) = \sum_{p=0}^{n} n_p\, a_p\, \varkappa^{n-p}\, \lambda^p = 0$$

einen Ebenenbüschel E_n n^{ter} Ordnung dar. Setzt man nun den Coefficienten $\omega^{(p)}(\varkappa', \lambda' | \varkappa, \lambda)$ von $n_p K^{n-p} \varDelta_p$ in der Entwickelung von $f(\varkappa K + \varkappa' \varDelta, \lambda K + \lambda' \varDelta)$ gleich Null, so erhält man die Gleichung der p^{ten} Osculante der Ebene $f(\varkappa', \lambda') = 0$ hinsichtlich des gegebenen Ebenenbüschels. Dieselbe ist also ein zu dem gegebenen projectivischer Ebenenbüschel $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung; sie hat mit demselben nicht nur die Ebene $f(\varkappa', \lambda') = 0$ selbst, sondern auch ihre Tangente und ihren Schmiegungspunkt gemeinsam. Dies ist eine einfache Folgerung daraus, dass $\omega^{(p)}(\varkappa', \lambda' | \varkappa, \lambda)$ aus den verschiedenen partiellen p^{ten} Ableitungen von $f(\varkappa, \lambda)$ linear und homogen zusammengesetzt ist.

Für alle Punkte der abwickelbaren Fläche, die E_n umhüllt, verschwindet die Discriminante von $f(\varkappa, \lambda)$, die Resultante der beiden ersten gleich Null gesetzten Ableitungen von $f(\varkappa, \lambda)$. Für diese Gleichungen kann man zwei lineare Verbindungen, also die Gleichungen irgend zweier ersten Osculanten, eintreten lassen. Jede erste Osculante ist also zu der Regelschar der von E_n umhüllten abwickelbaren Fläche perspectivisch.

Für jeden Punkt der Schmiegungscurve von E_n verschwinden die drei zweiten Ableitungen von $f(\varkappa, \lambda)$ und allgemeiner alle linearen Verbindungen dieser Ausdrücke gleichzeitig. Jede zweite Osculante, deren Gleichung $\omega^{(2)} = 0$ ja auf diese Art entsteht

ist daher zu der Schmiegungscurve von E_n perspectivisch. Ferner ist jede zweite Osculante zu der Regelschar der abwickelbaren Fläche perspectivisch, welche die zugehörige erste Osculante umhüllt. Sie tritt aber nur als einzelnes Glied in einem ganzen System unter sich projectivischer Ebenenbüschel $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung auf, von denen je zwei die bezeichnete Regelschar erzeugen. Dies führt auf eine sehr brauchbare Gleichungsform desjenigen Kegels zweiter Ordnung, der von einem ihrer Punkte aus die Schmiegungscurve eines Ebenenbüschels dritter Ordnung projicirt; denn solche Kegel umhüllen offenbar die ersten Osculanten dieses Büschels.

Nimmt man hinsichtlich der p^{ten} Osculante einer Ebene $f(x', \lambda') = 0$ ihre r^{te} Osculante, so kommt man auf die $(p+r)^{\text{te}}$ Osculante der Ebene hinsichtlich E_n. Hiernach ist jede p^{te} Osculante perspectivisch einmal zu der Schmiegungscurve der zugehörigen $(p-2)^{\text{ten}}$ Osculante, andererseits zu der Regelschar der abwickelbaren Fläche, welche die $(p-1)^{\text{te}}$ Osculante umhüllt.

Mit Hülfe dieser Lehrsätze lässt sich nun die Theorie der Raumcurve vierter Ordnung und zweiter Species mit der Theorie des Reye'schen Complexes in Verbindung bringen. Ein Ebenenbüschel $E_{2,4}$ vierter Ordnung:

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 \lambda + 6a_2 x^2 \lambda^2 + 4a_3 x \lambda^3 + a_4 \lambda^4 = 0$$

umhüllt eine abwickelbare Fläche sechsten Grades, zu deren Regelschar die Osculanten

$$\mu(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 \lambda + 3a_2 x \lambda^2 + a_3 \lambda^3) \\ + \nu(a_1 x^3 + 3a_2 x^2 \lambda + 3a_3 x \lambda^2 + a_4 \lambda^3) = 0$$

perspectivisch sind. Jede einzelne dieser Osculanten umhüllt eine abwickelbare Fläche vierter Ordnung mit einer Schmiegungscurve von der dritten Ordnung. Durch paarweise Verknüpfung der drei Gleichungen für diese Schmiegungscurve erhält man drei von x, λ freie Gleichungen zweiten Grades in μ, ν, von denen die beiden ersten Kegel zweiten Grades darstellen, welche die Schmiegungscurven C^3 und K^3 der Ebenenbüschel

$$\alpha_0 x^3 + 3\alpha_1 x^2 \lambda + 3\alpha_2 x \lambda^2 + \alpha_3 \lambda^3 = 0,$$
$$\alpha_1 x^3 + 3\alpha_2 x^2 \lambda + 3\alpha_3 x \lambda^2 + \alpha_4 \lambda^3 = 0$$

projiciren, während die dritte Gleichung eine andere Fläche

zweiten Grades darstellt, welche die Curve enthält. Aus der Form der beiden ersteren Gleichungen geht hervor, dass C^3 und K^3 beide dem Kegel $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$ angehören und also ausserhalb seiner Spitze noch vier Punkte mit einander gemein haben, die den Schmiegungscurven aller ersten Osculanten gemeinschaftlich sind. Eliminirt man aus den Gleichungen der drei Flächen zweiten Grades die Grössen μ^2, $\mu\nu$, ν^2, so erhält man als Eliminationsresultat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

so dass alle Schmiegungscurven auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, welche zu Doppelpunkten die vier Punkte hat, die allen diesen Curven gemeinsam sind. Jeder andere Punkt ist in zwei der betrachteten Schmiegungscurven enthalten, die in einem Kegel zweiter Ordnung mit ihm als Spitze liegen. Offenbar sind dies Strahlenkegel eines und desselben Reye'schen Complexes, dem auch alle Tangenten der Schmiegungscurven der ersten Osculanten und, wegen ihrer Beziehung zu $E_{2,4}$, die Regelschar der von diesem Büschel umhüllten abwickelbaren Fläche angehört. Offenbar liegt die Schmiegungscurve dieses Büschels auf F_3; und zwar ist sie der Ort der Spitzen der Complexkegel, die F_3 längs Raumcurven des Systems berühren. Die vier Doppelpunkte von F_3 sind Rückkehrpunkte der Schmiegungscurve. Die abwickelbare Fläche, die $E_{2,4}$ umhüllt, enthält eine Doppelcurve C vierter Ordnung und zweiter Species, zu deren Sehnen die Tangenten der Schmiegungscurve gehören. Von jedem Punkte von F_3 geht eine besondere Sehne derselben aus, die die Polargerade des von dem betreffenden Punkte ausgehenden Complexkegels hinsichtlich der Tangentialebene der Fläche ist. Hiernach können auch die reellen Sehnen unter alleiniger Benutzung reeller Hülfsgebilde construirt werden, die in reellen Punkten die Curve C nicht treffen. E. K.

L. Gegenbauer. Ueber Raumcurven vierter Ordnung erster Species. Wien. Ber. XCIII. 790-797.

Der Verfasser knüpft an einen von Rudolf Sturm (Journal für Math. XC.) auf rein geometrischem Wege bewiesenen Satz über ebene Curven dritter Ordnung an und findet das Analogon desselben für die Raumcurven vierter Ordnung erster Species in zwei Sätzen, die er mit Hülfe der Darstellung der Punkte dieser Curven durch elliptische Functionen beweist. Die drei stets reellen Wendeberührungspunkte bestimmen auf der Curve vier Intervalle; in jedem derselben liegen je zwei Berührungspunkte der von diesen Wendepunkten an die Curve gehenden reellen Schmiegungsebenen. Diese acht Berührungspunkte teilen die Curve, beziehungsweise den Curvengang, in acht Abschnitte, welche abwechselnd einen oder keinen Wendeberührungspunkt enthalten. Nennt man erstere Abschnitte Intervalle erster Art, letztere Intervalle zweiter Art, so hat man zwei Sätze, von denen der erste lautet:

„Legt man durch einen in einem Intervalle erster Art befindlichen Punkt einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species eine Schmiegungsebene, deren Berührungspunkt in demselben Intervalle liegt, zieht sodann von diesem aus abermals die die Curve in einem Punkte des gleichen Intervalles berührende Schmiegungsebene u. s. f., so erhält man innerhalb des Intervalles eine Reihe von Punkten, welche abwechselnd auf der einen und andern Seite des in demselben befindlichen Wendeberührungspunktes liegen und nach demselben hin convergiren." Ein ähnlicher Satz ergiebt sich für Punkte eines Intervalles zweiter Art.

Bm.

W. Wirtinger. Ueber rationale Raumcurven 4ter Ordnung. Wien. Ber. XCIII. 28-45.

Es wird hier auf analytischem Wege eine Reihe einfacher meist bekannter Eigenschaften der rationalen Raumcurven vierter Ordnung abgeleitet.

W. St.

A. BRAMBILLA. Intorno alla quartica gobba dotata di due tangenti stazionarie. Genova G. IX. 223-229.

La.

J. BERGSTEDT. Om Regelytor af sjette Graden. I. Unikursala Ytor. Lund. Akadem. Afhandling. 1886.

Die geradlinigen Flächen fünften Grades sind bekanntlich von Schwarz (Journ. für Math. LXVII.) behandelt und nach der Natur der Doppelcurve in 15 Arten eingeteilt. In der Hauptsache dieser Methode folgend, sucht der Verfasser der vorliegenden Abhandlung die Regelflächen sechsten Grades (vom Geschlechte Null) zu klassificiren, freilich jedoch ohne auf Vollständigkeit Anspruch zu machen. Es genüge daher hier zu erwähnen, dass er im ganzen neun Arten unterscheidet und behandelt.

Bg.

E. SCHULZE. Ueber die Parallelfläche des elliptischen Paraboloids. Diss. Halle. 8°. 38 S.

E. LAMPE. Ueber ein Analogon im Raume zu einer speciellen Hypocykloiden-Bewegung. Kronecker J. C. 359-363.

Der Herr Verfasser geht von dem bekannten Satze aus, dass, wenn eine gerade Linie mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines fest liegenden rechten Winkels gleitet, jeder ihrer Punkte eine Ellipse beschreibt, und die Gerade eine Hypocykloide — die man Astroide nennt — einhüllt. Etwas verändert, lässt sich dies auch so angeben: Wenn ein fester Kreis vom Radius a durch einen beweglichen vom Radius $\frac{a}{2}$ von innen berührt wird, so schneidet die Peripherie des beweglichen Kreises zwei zu einander senkrechte, fest angenommene Durchmesser des ersteren Kreises in zwei Punkten A und B, deren Verbindungslinie AB die Länge a hat. Giebt man diesen Punkten

bezw. die Massen α und β, so beschreibt der Schwerpunkt S beider Punkte für jedes gegebene Verhältnis $\alpha:\beta$ die oben erwähnten Ellipsen. Dies wird nun auf die Kugel übertragen, wie folgt: Wenn eine feste Kugel vom Radius a durch eine bewegliche vom Radius $\frac{a}{2}$ von innen berührt wird, so schneidet die Oberfläche der beweglichen Kugel drei zu einander senkrechte, fest angenommene Durchmesser der ersteren Kugel in drei Punkten A, B, C, den Eckpunkten eines Dreiecks, für welches die Summe der Quadrate der drei Seiten gleich $2a^2$ ist. Giebt man diesen Punkten bezw. die Massen α, β, γ, so beschreibt ihr Schwerpunkt S für jedes gegebene Verhältnis $\alpha:\beta:\gamma$ ein Ellipsoid, dessen Halbaxen die Längen $\frac{a\alpha}{\sigma}$, $\frac{a\beta}{\sigma}$, $\frac{a\gamma}{\sigma}$ haben, wo $\sigma = \alpha+\beta+\gamma$. Die Ebene des beweglichen Dreiecks ABC umhüllt die Fläche:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wobei die drei festen Durchmesser zu Coordinatenaxen gewählt sind. Diese Fläche kann als räumliches Analogon der Astroide gelten. Sie wird nun weiter untersucht, und dann wird noch ein anderes Analogon, wobei schiefwinklige Coordinatenaxen vorkommen, besprochen. Mz.

J. S. Fleischer. En Flade, fra hvilken Straaler, udgaaende fra et fast Punkt, tilbagekastes parallelt med en given Plan og gjennem en given Linie vinkelret paa Planen. Zeuthen Tidskr. (5) IV: 164-168.

Discussion einer Fläche, welche so beschaffen ist, dass Lichtstrahlen, die von einem festen Punkte ausgehen, von derselben zurückgeworfen werden parallel mit einer festen Ebene, und alle durch eine auf derselben senkrechten Gerade hindurchgehen. Gm.

W Ruchhöft. Zur Kubatur der Malus'schen Wellenflächen. Hoppe Arch. (2) III. 225-275.

Malus'sche Flächen werden diejenigen genannt, welche die von einem Punkte ausgehenden und an beliebig vielen Flächen reflectirten und gebrochenen Lichtstrahlen normal schneiden. Findet blosse Reflexion statt, so ist offenbar die Gesamtlänge des Strahles constant. Das Vorliegende beschränkt sich auf den Fall der Reflexion an einer Fläche und überdies auf Betrachtung derjenigen unter der Schar paralleler Flächen, für welche jene Länge $= 0$ ist. Nimmt man dann den leuchtenden Punkt zum Anfangspunkt, so sind die Coordinaten der Malus'schen Fläche das Doppelte der entsprechenden Coordinaten der Fusspunktenfläche, deren Kubatur bereits von Tortolini, Magener u. a. für das Ellipsoid und die Hyperboloide behandelt ist. Das Gegenwärtige nimmt zur Aufgabe, die Kubatur für Flächen zweiten Grades als Basen, mit Ausschluss der abwickelbaren, nach der Methode von Gauss, Theoria attract. corp. ellipt., Werke V., durchzuführen. Als Begrenzung, wo die Fläche nicht geschlossen ist, dient ein Kegel, dessen Spitze im Anfangspunkt liegt. Für das Ellipsoid ist die Fläche geschlossen. Sind a, b, c die Halbaxen, und man setzt

$$x = a\cos u;\quad y = b\sin u\cos v;\quad z = c\sin u\sin v,$$

so zerfällt das Volum-Integral in vier Integrale, welche sich durch das eine

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\, du\, dv}{Q^2},$$

wo

$$Q = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u\cos^2 v}{b^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{c^2}$$

gesetzt ist, und dessen Derivationen nach a, b, c darstellen lassen. Beim zweischaligen Hyperboloid wird die entsprechende Darstellung von x, y, z in u, v gemacht, beim einschaligen dagegen

$$x = \frac{a}{c}u\cos v + a\sin v;\quad y = \frac{b}{c}u\sin v - b\cos v;\quad z = u.$$

Statt des elliptischen Paraboloides wird das Rotationsparaboloid behandelt, das hyperbolische in den erzeugenden Geraden dar.

gestellt. An die Berechnung der Volumina schliessen sich die Untersuchung von deren Minimis und einige Lehrsätze. H.

G. Darboux. Sur la théorie des surfaces minima. C. R. CII. 1513-1519.

In der Theorie der Minimalflächen würde die vollständige Lösung zweier Probleme von grossem Interesse sein, nämlich:

A. Die Bestimmung aller algebraischen Minimalflächen, welche durch eine gegebene algebraische Curve gehen.

B. Die Bestimmung aller algebraischen Minimalflächen, welche einer gegebenen algebraischen Fläche eingeschrieben sind (also dieselbe längs einer Curve berühren).

Allgemein ist noch keins dieser Probleme gelöst. Das zweite ist von Herrn Lie für gegebene abwickelbare Flächen in Angriff genommen und gelöst, erstens wenn diese Fläche ein Kegel ist, und zweitens, wenn die Fläche eine beliebige abwickelbare, falls aber bereits eine eingeschriebene Minimalfläche bekannt ist. Herr Darboux löst nun das Problem des Herrn Lie vollständig und zwar zunächst analytisch mit Benutzung der Weierstrass'schen Darstellung der Minimalflächen, sodann geometrisch, indem er eine Vorschrift für die Construction der Berührungscurve giebt. In einer späteren Mitteilung soll die dritte Lösung im Anschluss an die Untersuchungen des Herrn Ribaucour besprochen werden. A.

Capitel 4.

Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

A. Weiler. Eine elementare Betrachtung über Strahlencongruenzen. Schlömilch Z. XXXI. 18-24.

Einfache Sätze über Regelscharen liefern die bekannten

Eigenschaften der Brennpunkte, Brennebenen und Brennflächen algebraischer Strahlencongruenzen und hiermit die Mittel, 11 Hauptgattungen der letzteren zu unterscheiden. Js.

R. v. Lilienthal. Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme. Bonn.

Referat in Abschnitt IX, Cap. 3A, S. 736; vgl. Darboux Bull. (2) XI. 73-78.

T. A. Hirst. On the Cremonian congruences which are contained in a linear complex London M. S. Proc. XVII. 287-2?6.

In den Monatsberichten der Berliner Akademie (F. d. M. X. 1878. 545) hatte Kummer auf die Existenz zweier verschiedenen, gleich allgemeinen Congruenzen dritter Ordnung dritter Klasse aufmerksam gemacht, aber nur diejenige von ihnen ausführlich behandelt, deren drei von einem Punkt ausgehende Strahlen nicht in derselben Ebene liegen. Hier entwickelt nun Herr Hirst die Eigenschaften der andern dieser beiden Congruenzen, nachdem er schon ein Jahr früher einen Specialfall derselben behandelt hatte (Lond. M. S. Proc. XVI, F. d. M. XVII. 1885. 791). Es gehört diese Congruenz zu den Cremona'schen, d. h. zu denen, deren Strahlen eine Cremona'sche Beziehung zwischen den Punkten zweier Ebenen bestimmen. Zuerst werden die Bedingungen untersucht, unter denen eine in einem linearen Complex enthaltene Congruenz eine Cremona'sche ist. Dann werden die Erzeugungsweisen und die Varietäten solcher Congruenzen aufgesucht; und endlich wird festgestellt, welche besonderen Eigenschaften denjenigen Congruenzen zukommen, die die eben erwähnten Eigenschaften besitzen, und dabei Bündelgrad und Feldgrad beide gleich drei haben. Scht.

T. A. Hirst. Sur la congruence Roccella, du troisième ordre et de la troisième classe. Palermo Rend. I. 63-65.

Hr. Roccella hat in einer Arbeit: „Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni de' complessi corrispondenti in due e più fasci projettivi di complessi lineari" (Piazza Armerina, 1882) die Existenz einer Congruenz dritter Ordnung und dritter Klasse ermittelt; dieselbe ist der Ort einer Geraden, welche sich auf drei entsprechende Strahlen aus drei vorgegebenen projectivischen Strahlenbündeln im Raume stützt. (Man vergl. auch Sturm, Kronecker J. CI. 162ff.). Hr. Hirst zeigt, dass diese Congruenz ein besonderer Fall derjenigen ist, welche er in der Abhandlung untersucht hat: „On congruences of the third order and class" (Lond. M. S. Proc. XVI., F. d. M. XVII. 1885. 791), und er entwickelt die charakteristischen Eigentümlichkeiten dieser Congruenz unter den Cremona'schen.

La. (Lp.)

F. Machovec. Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes. Prag. Ber. 501-541.

Anschliessend an die Arbeiten von Reye in seiner „Geometrie der Lage" über den Axencomplex einer Fläche zweiten Grades, beschäftigt sich der Verfasser mit dem Normalenproblem der Flächen zweiten Grades. Nach Reye wird eine Gerade, welche senkrecht ist zu ihrer reciproken Polare bezüglich einer F_2, Axe dieser F_2 genannt. Der Verfasser vorliegender Arbeit führt nun zunächst folgende Begriffe ein.

Sind p_1 und p' zwei reciproke Axen, π_1 und π' die durch p_1 resp. p' gelegten zu einander senkrechten Ebenen, P_1 und P' die Pole dieser Ebenen bezüglich F_2, so wird die Axe $\frac{p_1}{p'}$, der Pol $\frac{P_1}{P'}$ und die Ebene $\frac{\pi_1}{\pi'}$ die „reciproke Axe" resp. „reciproker Pol" und „reciproke Polarebene" sowohl der Axe

$\frac{p'}{p_1}$ als auch des Poles $\frac{P'}{P_1}$ und seiner Polarebene $\frac{\pi'}{\pi_1}$ in Bezug auf F_2 genannt.

Die Beziehungen zwischen den reciproken Polen und Polarebenen werden nun teils auf analytischem, teils auf synthetischem Wege näher untersucht. Je zwei reciproke Pole sind conjugirt bezüglich eines Flächenbündels, zu welchem F_2 selbst und ausserdem drei Ebenenpaare gehören. Es ist somit durch die reciproken Pole eine specielle kubische Verwandtschaft bestimmt, für welche die sich selbst entsprechenden Ebenen, Geraden und Punkte aufgesucht werden. Unter den durch diese Transformation in sich selbst übergehenden Flächen befindet sich die Fläche vierter Ordnung F_4, auf welcher die Pole aller Axen liegen, welche F_2 berühren. Die Gleichung von F_4 wird aufgestellt. Die bezüglich F_2 zu F_4 polare Fläche ist der Ort der Krümmungscentra von F_2.

Der Begriff der reciproken Pole und Polarebenen wird dann erweitert und eingeführt bei dem allgemeinen tetraedralen Complex. Es wird gezeigt, dass die Verbindungslinien je zweier reciproken Pole einen Strahlencomplex dritten Grades bilden, welcher mit dem tetraedralen Complexe ein Strahlensystem zweiter Ordnung sechster Klasse gemein hat. Das zu letzterem bezüglich F_2 reciproke System bildet das Normalensystem von F_2, wenn wieder der tetraedrale Complex und die Definition der reciproken Pole specialisirt werden. W. St.

D. Montesano. Su alcuni complessi di rette - Battaglini. Nap. Rend. XXV. 192-203.

Jeder Strahl des „Battaglini-Complexes“ schneidet unendlich viele Paare von Flächen zweiter Ordnung in Punktepaaren, die sich harmonisch trennen, und sendet an unendlich viele Paare von Flächen zweiter Klasse Paare von Tangentialebenen, von denen dasselbe gilt. Die beiden unendlichen Reihen von Flächenpaaren erzeugen ein Gebilde von der vierten Ordnung und von der vierten Klasse.

Diese Complexfläche ist in dem allgemeinsten der von Herrn Montesano behandelten Fälle eine Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden q_1 und q_2. Die Geraden liegen in unendlich vielen Vierseiten angeordnet, deren Diagonalen mit q_1 und q_2 zusammenfallen. Paare gegenüberliegender Ecken gehören zwei bestimmten Involutionen an. Unter den verschiedenen Vierseiten befinden sich zwei besondere $a b a_1 b_1$ und $c d c_1 d_1$, die nur solche Hyperboloide J bez. J' bestimmen, deren beide Regelscharen aus Complexstrahlen bestehen. Die Paare gegenüberliegender Ecken dieser Vierseite, die auf q und q_1 liegen, trennen einander harmonisch. Von den beiden genannten Vierseiten gehen die Paare von Flächen zweiter Ordnung aus, welche in harmonischen Gruppen von den Complexstrahlen getroffen werden. Der Durchschnitt solcher Hyperboloide liegt also auf der Complexfläche. Aber auch die Paare von Flächen zweiter Klasse, an welche die Strahlen des Complexes harmonisch sich trennende Paare von Tangentialebenen senden, bestehen aus Hyperboloiden der bezeichneten Art.

Man kann nun annehmen, dass mit jeder von zwei anstossenden Seiten des ersten Vierseits sich zwei gegenüberliegende Seiten des zweiten Vierseits vereinigen. Alsdann löst sich von der Complexfläche einmal die Ebene α dieser Seiten, zweitens ihr gemeinsamer Punkt A ab. Die eigentliche Complexfläche ist von der dritten Ordnung und Klasse. Bei dem Grenzübergang spalten sich die Hyperboloide der zweiten Büschel-Schar. Als Punktflächen gehen sie in Kegel über, welche die in α liegenden Seiten des ersten Vierseits enthalten. Die von A ausgehende Diagonale des Vierseits ist Polstrahl aller hinsichtlich α. Als Hüllflächen hingegen gehen sie in Kegelschnitte über, die in α liegen, die beiden in α liegenden Seiten berühren und zur Polare von A die nicht von diesem Punkte ausgehende Diagonale des Vierseits haben.

Durchschneiden sich zwei Flächen zweiten Grades in einem unebenen Vierseit, so besteht die Singularitäten-Fläche des Complexes aus zwei Flächen J, J' ihres Büschels, jede dieser Flächen trennt mit einem der Ebenen-Paare des Büschels zusammen F

und F' harmonisch. Fällt F' mit einem der Ebenen-Paare selbst zusammen, so besteht die Singularitätenfläche aus F' und aus der Fläche J des Büschels, die mit dem anderen Ebenen-Paar F und F' harmonisch trennt. E. K.

G. A. Bordiga. Complessi e sistemi lineari di raggi negli spazi superiori. Curve normali che essi generano. Ven. Ist. Atti. (6) IV. 163-193.

Für das n-dimensionale Nullsystem, welches der Herr Verfasser zunächst betrachtet, gilt eine Reihe von Sätzen, die zu denen über das räumliche Nullsystem analog sind und nach entsprechenden Methoden erwiesen werden. Ein Nullsystem erhalten wir, wenn die reciproke Beziehung zwischen zwei ineinander liegenden Räumen so ausartet, dass jeder Punktpol in seinem zugehörigen R_{n-1} liegt. Alsdann ist die Beziehung zwischen je zwei homologen Gebilden von selbst eine wechselseitige. Eine Gerade H_1 hat entweder überhaupt keinen Punkt mit dem homologen H_{n-2} gemein, oder sie liegt gänzlich in demselben und ist dann eine Directrix des Systems. Alle Geraden eines R_{n-1}, die seinen Pol R_0 enthalten, sind, da sie ihren homologen H_{n-2} begegnen, Directrices, eben so die Strahlen, welche sich auf irgend zwei homologe Gebilde H_1 und H_{n-2} stützen. Eben so kann man schliessen, dass eine Ebene H_2 mit dem homologen H_{n-3} sicher keine Gerade gemein haben kann, also entweder ganz innerhalb desselben liegt, oder einen Punkt mit ihm gemein hat, oder endlich ausserhalb seiner liegt, u. s. w. Der zu einem gegebenen Pol Q_0 gehörige Raum R_{n-1} ist leicht zu finden, wenn man $n-1$ Paare homologer Gebilde $H_1^{(1)}, H_{n-2}^{(1)}$; $H_1^{(2)}, H_{n-2}^{(2)}$; ...; $H_1^{(n-1)}, H_{n-2}^{(n-1)}$ kennt, er enthält die von Q_0 ausgehenden Strahlen, von denen jeder ein Paar homologer Gebilde trifft.

In Erweiterung eines bekannten Satzes über räumliche Nullsysteme spricht Herr Bordiga (No. 5) folgendes Theorem aus: Sind keine m der $n+2$ gegebenen Punkte $\Omega_0^{(1)}, \Omega_0^{(2)}, \Omega_0^{(3)}, \dots, \Omega_0^{(n+2)}$ in einem Raume $(m-2)^{\text{ter}}$ Dimension gelegen, so wird ein Nullsystem durch die reciproke Beziehung dargestellt, die jedem

Punkte $\Omega_0^{(i)}$ einen Raum zuweist, der alle gegebenen Punkte bis auf $\Omega_0^{(i-2)}$ und $\Omega_0^{(i-3)}$ enthält. Referent glaubt dies bezweifeln zu sollen. Die Gerade $\Omega_0^{(i)}\,\Omega_0^{(i+1)}$ ist in ihrem entsprechenden Raum Ω_{n-2} enthalten, der nur die Elemente $\Omega_0^{(i-1)}$, $\Omega_0^{(i-2)}$, $\Omega_0^{(i-3)}$ nicht enthält. Wenden wir dies auf den Fall $n = 4$, $n+2 = 6$ an, so entsprechen den Geraden $\Omega_0^{(2)}\Omega_0^{(3)}$ und $\Omega_0^{(5)}\Omega_0^{(6)}$ die Ebenen $\Omega_0^{(2)}\,\Omega_0^{(3)}\,\Omega_0^{(4)}$ und $\Omega_0^{(1)}\,\Omega_0^{(5)}\,\Omega_0^{(6)}$. Der Schnittpunkt dieser Ebenen, der dem Raume $\Omega_0^{(2)}\,\Omega_0^{(3)}\,\Omega_0^{(5)}\,\Omega_0^{(6)}$ durch die reciproke Beziehung zugewiesen wird, muss; da $\Omega_0^{(3)}\,\Omega_0^{(4)}$ und $\Omega_0^{(5)}\,\Omega_0^{(6)}$ windschiefe Gerade sind, sicherlich ausserhalb des betrachteten Raumes liegen. Für den Fall $n = 4$ wird also kein Nullsystem in der bezeichneten Art bestimmt.

Die Durchmesser und die Axe des Nullsystems werden auf ganz analoge Art, wie es bei räumlichen Nullsystemen geschieht, definirt.

Wenn man $n-1$ Nullsysteme zu gleicher Zeit ins Auge fasst, so wird man auf ein Strahlensystem erster Ordnung im Raume n^{ter} Dimension geführt. Da nämlich $n-1$ von irgend einem Punkte Ω_0 ausgehende Räume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension die Directrices der einzelnen Systeme enthalten, so geht von Ω_0 im allgemeinen ein einziger allen Systemen als Directrix angehören der Strahl aus. Schneiden sich nun zunächst die beiden ersten Strahlenräume in Q_{n-2}, der in zwei Räumen Σ_{n-1} und Σ'_{n-1} enthalten ist, so schneidet nach Herrn B. auf den letzteren das Strahlensystem zwei zu einander collineare Punktgebilde aus. Wie Herr B. zeigt, werden die den zwei ersten Systemen gemeinsamen Directricesbündel, die von einer in Σ_{n-1} oder Σ'_{n-1} liegenden Geraden ausgehen, durch die R_{n-1} eines Büschels von Ω_0 aus projicirt und umgekehrt. Σ_{n-1} und Σ'_{n-1} sind dann freilich einzeln collinear zu den Bündeln der erwähnten R_{n-1}. Der Uebergang aber zu der obigen Behauptung ist dem Referenten nicht ersichtlich (No. 9). Auch durch zwei collineare Strahlenbündel kann man nach Herrn B. das Strahlensystem erzeugen, und zwar schneiden sich dann in jedem Strahle zwei homologe Ebenen derselben. Ist Ω_0 das Centrum des einen Bündels, so kann man das andere $\Omega_0^{(1)}$ aber gewiss nicht ohne weiteres willkürlich wählen. Ist Q'_{n-2} der Bündel der von $\Omega_0^{(1)}$ aus-

gehenden und den beiden ersten Systemen gemeinsamen Directrices, so ist doch schon nach der Analogie mit Raumverhältnissen mindestens vorauszusetzen, dass Q_{n-2} und $Q_{n-2}^{(1)}$ sich in demselben Raume Σ_{n-1} befinden.

Herr Bordiga untersucht nun (zunächst für $n=4$ und $n=5$) die Mannigfaltigkeiten von Strahlen, in denen homologe Ebenen collinear bezogener Bündel Ω_0 und $\Omega_0^{(1)}$ einander begegnen. Diese Mannigfaltigkeiten können stets als Bestandteile von Strahlensystemen erster Ordnung aufgefasst werden, insofern durch einen Punkt entweder überhaupt keine oder nur eine Gerade geht. Wird vorausgesetzt, dass nur in Punkten einer Ordnungscurve homologe Strahlen sich begegnen, so ist zu unterscheiden, ob wir es mit einer Normalcurve n^{ter} Ordnung oder mit einer Normalcurve $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung und i dieselbe treffenden windschiefen Geraden zu thun haben. Im ersten Fall ist die Mannigfaltigkeit von der Klasse $\frac{n(n-1)}{2}$ und besteht aus dem Sehnensystem der Raumcurve. Im zweiten Falle $i=1$ wird das System der Geraden betrachtet, die einmal die Gerade und einmal die Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung treffen. Das System ist daher von der Klasse $n-1$. Sind i Gerade und eine Normalcurve $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden, so liegen alle Geraden in einzelnen Räumen von niedrigerer als der n^{ten} Dimension verteilt. Herr B. rechnet alle diejenigen Strahlen, welche zwei der i Geraden oder eine von ihnen und die Normalcurve $(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung treffen, zu einem Strahlensystem von der $\left\{i(n-i)+\frac{i(i-1)}{2}\right\}^{\text{ten}}$ Klasse. Dem Referenten scheint kein Grund vorzuliegen, das Sehnensystem der Normalcurve nicht zum Strahlensystem zu rechnen, wenn man überhaupt in diesem Falle von einem Strahlensystem im Raume R_n reden will. E. K.

G. Loria. Rappresentazione su un piano delle congruenze $[2,6]_2$ e $[2,7]$. Torino Atti. XXI. 621-634.

Aus dem Mittelpunkte C des im Strahlensysteme $[2,6]_2$ ent-

haltenen singulären Kegels fünfter Ordnung wird im allgemeinen ein beliebiger Strahl des Systemes durch eine bestimmte Ebene projicirt, somit entspricht jedem Elemente eines zum Ebenenbündel C perspectiven Strahlenfeldes ein Element von $[2, 6]_2$. Mit dieser Abbildung untersucht der Verfasser das Strahlensystem $[2, 6]_2$, mit einer analogen das Strahlensystem $[2, 7]$.

Js.

A. Cayley. On the complex of lines, which meet a unicursal quartic curve. Lond. M. S. Proc. XVII. 232-238.

Die Gleichung dieses Complexes wird berechnet, wenn die Curve gegeben ist durch $x:y:z:w = 1:\Theta:\Theta^3:\Theta^4$.

W. St.

R. Schumacher. Untersuchungen über das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse, ausgehend von den in ihm enthaltenen Regelflächen. Erzeugung mittels linearer Complexe. Diss. München. 8°. 44 S.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

J. Rosanes. Zur Theorie gewisser abhängiger Punktgruppen im Raume. Kronecker J. C. 311-316.

Diese Arbeit ist die Fortsetzung von drei früheren Arbeiten über denselben Gegenstand. (Cf. F. d. M. XV. 1883. 748.)

Ordnet man die zehn Ecken eines vollständigen Pentaeders

und eines ebenen Fünfseits einander entsprechend zu, so erhält man zehn Paare „complementärer“ Ecken, von denen sieben unabhängig sind, die drei übrigen aber eine „lineare Folge“ bilden. In derselben Weise bilden die zwanzig Paare complementärer Ecken zweier vollständigen Hexaeder ein abhängiges System mit zehn unabhängigen Paaren. Diese zwanzig Paare sind dann und nur dann ein und derselben Oberfläche zweiter Ordnung conjugirt, wenn die sechs Geraden, in denen die gleichnamigen Ebenen der beiden Hexaeder sich treffen, ein und demselben linearen Complex angehören. My.

G. B. Guccia. Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano. Palermo Rend. I.* 56-59, 119-132.

Ueber die allgemeinste Cremona'sche Transformation beliebigen Grades einer Ebene auf sich selbst hat der Verfasser bereits im vorigen Jahre eine kurze Mitteilung gemacht (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 794). Nunmehr erhalten wir in 30 zum Teil recht umfangreichen Lehrsätzen die Hauptresultate seiner diesbezüglichen Untersuchungen. Es zeigt sich, dass in der transformirten Ebene ausser dem schon besprochenen Netze der isologen Curven noch eine Zahl anderer charakteristischer Curven existirt, welche sich in mehrfacher Weise als Ort von Punkten oder als Enveloppe von Curven resp. Geraden definiren lassen, und die der Verfasser in Ermangelung geeigneter Namen durch bestimmte Buchstaben unterscheidet. Die Beziehungen dieser Curven zu einander und zu den Fundamentalpunkten der Transformation bilden den Inhalt der hier mitgeteilten Sätze. R. M.

G. B. Guccia. Formole analitiche di alcune trasformazioni Cremoniane delle figure piani. Palermo Rend. I. 188.

Das Problem der allgemeinsten Cremona'schen Transformation zweier Ebenen auf einander kann algebraisch so formulirt werden: „Es sollen drei ganze rationale homogene Functionen φ_1, φ_2, φ_3 n^{ten} Grades der drei Variablen x_1, x_2, x_3 so bestimmt

werden, dass aus den Gleichungen:

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

die umgekehrten Gleichungen:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3$$

geschlossen werden können, in denen die ψ analoge Functionen der y sind." Die Curven $\varphi = 0$ sind bekanntlich gewissen Schnittpunktsbedingungen unterworfen, sodass, wenn mit α_i $(i = 1, 2, \dots n-1)$ die Zahl der ihnen gemeinsamen i-fachen Punkte bezeichnet wird, die Gleichungen zu erfüllen sind:

$$\sum_i i^2 . \alpha_i = n^2 - 1, \quad \sum_i i\alpha_i = 3(n-1).$$

Es giebt soviel verschiedene Transformationen n^{ter} Ordnung als Lösungen dieser Gleichungen durch ganze positive Werte der α_i.

Vorliegende Note beschäftigt sich mit 10 speciellen, von Cremona, de Jonquières u. a. gegebenen Lösungen (vergl. auch F. d. M. XVII. 1885. 795) und bestimmt für jede derselben die Formen der zugehörigen Functionen φ. R. M.

G. Jung. Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 161-166.

Es seien drei Grundgebilde zweiter Stufe, z. B. drei Punktfelder π, π', π'', gegeben. Besteht zwischen π und π' eine Cremona'sche Verwandtschaft und ebenso zwischen π und π'', so besteht auch zwischen π' und π'' eine eindeutige Verwandtschaft, und darum (vgl. Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie", S. 479) kann man vermittelst einer Cremona'schen Transformation von der einen derselben zur andern übergehen. Im ersten Paragraphen seiner Note gelangt Herr Jung in anderer Weise zu dieser Folgerung und legt die Beziehungen dar, welche zwischen den Ordnungen der drei Transformationen und den Graden ihrer Grundelemente bestehen. Im zweiten leitet er hieraus einen von den Eigenschaften der Jacobi'schen Curve eines Netzes unabhängigen Beweis für die beiden folgenden Relationen her (die wir der grösseren Deutlichkeit wegen mit

den im oben citirten Buche angewandten Bezeichnungen schreiben wollen):

$$3r_i - 1 = \Sigma_k \alpha_{ik}, \quad r_i^2 + 1 = \Sigma_k \alpha_{ik}^2.$$

Endlich im dritten Paragraphen bemerkt der Verfasser, dass der Inhalt des ersten als ein Beitrag zu denjenigen Untersuchungen angesehen werden kann, welche die Bestimmung aller eindeutigen Transformationen bezwecken: denn er führt zu allen denjenigen, zu denen man durch die Zusammensetzung zweier gegebenen Transformationen gelangen kann. Ausserdem ergänzt er das Theorem IV von Herrn Autonne „Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe Cremona" (Jordan J. (4) I, F. d. M. XVII. 1885. 792). La. (Lp.)

G. Jung. Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'una dall' altra mediante trasformazioni birazionali. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 85-89.

Bekanntlich erzeugen zwei Punktfelder σ_1 und σ_2 oder zwei Ebenenbündel S_1 und S_2, zwischen denen eine eindeutige Verwandtschaft besteht, vermöge der Geraden r, welche die Paare entsprechender Punkte verbinden, oder durch welche die Paare entsprechender Ebenen gehen, eine Congruenz, welche Herr Hirst in seiner Abhandlung „On Cremonian congruences" (Lond. M. S. Proc. XIV, XVI, XVII, F. d. M. 1883. XV. 742, 1885. XVII. 792 u. dieser Band 779) durchforscht hat. Betrachtet man ferner einen Ebenenbündel S, dessen Elemente mit denen von σ_1 und σ_2 (oder auch mit denen von S_1 und S_2) durch eine Cremona'sche Transformation verbunden sind, so entspricht jeder Ebene von S eine Gerade r der von den beiden anderen Formen erzeugten Cremona'schen Congruenz, und der Ort der Schnittpunkte ist eine Oberfläche, von welcher Herr Jung in der zu besprechenden Note die Ordnung und die vornehmlichsten unter ihren Beziehungen mit den Trägern der erzeugenden Gebilde und den Grundelementen der Verwandtschaften bestimmt. Hierbei stützt er sich auf die Ueberlegungen im § 1 seiner Arbeit: „Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda

specie" (Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 161-166, vgl. das vorangehende Referat). Die von Herrn Jung angegebene Erzeugungsmethode ergiebt eine grosse Zahl von Oberflächen. Der Verfasser erforscht einige von ihnen; man kann sie alle eindeutig auf dem Bündel S und deshalb auf einer Ebene abbilden.

Selbstverständlich kann man andere analoge Oberflächen (Hüllflächen) durch duale Verwandlung der voranstehenden Ueberlegungen erhalten. La. (Lp.)

G. Jung. Sulle trasformazioni piane multiple. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 302-306.

Im vorigen Bande des Jahrbuches S. 800-804 haben wir über zwei Aufsätze des Hrn. Visalli berichtet, deren Ziel, wie wir sagten, eine Verallgemeinerung der Theorie der ebenen zweideutigen Transformationen ist, sowie Hr. De Paolis dieselbe aufgestellt hat. Ein ähnliches Ziel erstrebt Hr. Jung in der Note mit dem obigen Titel; obschon später als die Arbeiten des Hrn. Visalli erschienen, ist letztere doch unabhängig von ihnen.

Offenbar kann man eine mehrdeutige Transformation zwischen zwei beliebigen Grundgebilden zweiter Stufe aufstellen und daher die Eigenschaften einer solchen Transformation verschiedenartig fassen. Während Hr. Visalli sie für zwei Punktfelder ausgesprochen hatte, ermittelt Hr. Jung sie, wegen der von ihm beabsichtigten Anwendungen, für ein Punkt- und ein Strahlen-Feld; wir können dieselben in dieser Anzeige übergehen; denn wir müssten vieles aus dem am Eingange erwähnten Berichte wiederholen. Die eine Bemerkung möge genügen, dass die Untersuchungen des Hrn. Jung im allgemeinen viel weniger weit gehen als die des Hrn. Visalli, aber im Unterschiede von den letzteren die wichtige Frage der Erniedrigung der Ordnung einer mehrdeutigen Transformation durch eindeutige Transformationen (ohne Aenderung des Grades und Geschlechtes) berühren. Endlich wollen wir auf die vom Verfasser in zwei seiner jüngsten Arbeiten mitgeteilten Berichtigungen für die Theoreme VI und VII der von uns eben ange-

zeigten Note aufmerksam machen. (Vgl. „Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale“, siehe das nächste Referat; „Sui sistemi lineari di curve algebriche di genere qualunque“, Lomb. Ist. Rend. (2) XX.) La. (Lp.)

G. Jung. Di due trasformazioni multiple associate a ogni trasformazione birazionale. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 339-344.

Zwischen zwei conjectiven Punktfeldern σ_1, σ_2 bestehe eine eindeutige Verwandtschaft n^{ter} Ordnung. Dann entspricht jedem zu σ_1 gerechneten Punkte z. B. L ein Punkt M in σ_2; mithin kann man jedem Punkte L der gegebenen Ebene eine bestimmte Gerade LM entsprechen lassen, die durch jenen Punkt geht und „Hauptgerade“ dieses Punktes heisst. Man sieht sehr leicht ein, dass, während jeder Punkt eine einzige Hauptgerade besitzt, jede Gerade für n ihrer Punkte Hauptgerade ist; es besteht daher zwischen den Punkten und den Geraden der gegebenen Ebene eine n-deutige Transformation. Durch Vertauschung von σ_1 und σ_2 gelangt man zu einer anderen derartigen Transformation.

Auf diese beiden Verwandtschaften (besonderer Art, weil zwei beliebige entsprechende Elemente incident sind) wendet der Verfasser die von ihm in der Abhandlung „Sulle trasformazioni piane multiple“ gewonnenen Ergebnisse an (Rom. Acc. L. (4) II_2. 302-306; s. das vorangehende Referat). Er ermittelt, dass die Ordnung einer dieser Transformationen gleich $n+1$ und ihr Geschlecht gleich $n-1$, während die Ordnung der conjugirten Transformation $n(n+2)$ ist. Bedeutet f die Anzahl der Grundpunkte der eindeutigen gegebenen Transformation, so ist $8n-10-f$ das Geschlecht der Doppelcurve und der Uebergangscurve einer der obigen Transformationen. Die Doppelcurve ist von der Ordnung $3n$, die Uebergangscurve von der Klasse $4(n-1)$ und der Ordnung $3(n-2)+f$; letztere besitzt $24(n-1)$ Spitzen und $n(18n+6f-59)+\frac{1}{2}f(f-7)+44$ Doppelpunkte,

$18n-3f-27$ Wendetangenten und $4[2n(n-6)+f+13]$ Doppeltangenten, u. s. w. (Man vergl. diese Resultate mit denen von Hrn. Guccia in C. R. CI. 866-869, F. d. M. XVII. 1885. 794 und Palermo Rend. I. 65 u. 119; man beachte ferner eine Berichtigung zu der Arbeit im Aufsatze des Verfassers: Sulle trasformazioni piane multiple d'ordine minimo, Lomb. Ist. Rend. (2) XX.). Den Schluss der Arbeit bilden Anwendungen der gefundenen Theoreme auf einige besondere Transformationen der ersten fünf Ordnungen.

La. (Lp.)

G. Jung. Di una terza trasformazione di genere p e di grado $p+1$ associata a ogni trasformazione piana birazionale. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 812-818.

Sind zwei conjective Punktfelder σ_1, σ_2 gegeben, zwischen denen eine Cremona'sche Transformation n^{ter} Ordnung besteht, so kann man zwischen den Punkten und Geraden ihres Trägers nicht nur die n-deutigen Transformationen aufstellen, mit welchen der Verf. sich in einer früheren Arbeit beschäftigt hat (vgl. das vor. Ref.), sondern auch noch eine dritte, indem man jedem Punkte diejenige Gerade entsprechen lässt, welche die beiden ihm entsprechenden Punkte verbindet, wenn man ihn einmal zu σ_1, ein anderes Mal zu σ_2 rechnet. Die Erforschung dieser Transformation macht den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung aus.

Teils auf directem Wege, teils auf Grund der Ergebnisse der Note „Sulle trasformazioni multiple“ (siehe S. 790) findet der Verfasser, dass diese Transformation vom Grade n^2, von der Ordnung $2n$, vom Geschlechte n^2-1 ist, dass ihre Doppelcurve die Ordnung $3(2n-1)$, die Uebergangscurve die Klasse $4(n^2-1)$ hat, während das Geschlecht beider $8n^2-2f-10$ ist (f = Anzahl der Grundpunkte der gegebenen Verwandtschaft). Die conjugirte Transformation ist von der Ordnung $(2n-1)(2n+1)$. Der Ort der Punkte, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, ist von der Ordnung $2n+1$, die Hüllcurve der durch die entsprechenden Punkte gehenden Geraden wird durch eine Curve von der Klasse $n(n+1)-2$ und durch die $n+2$ Strahlenbüschel

gebildet, welche die zusammenfallenden Punkte der gegebenen eindeutigen Verwandtschaft als Centren haben, u. s. w.

Mehrere von diesen Sätzen stimmen überein mit den „Teoremi sulle trasformazioni Cremoniane nel piano“ von Hrn. Guccia (siehe S. 787), andere vervollständigen dieselben. Hr. Jung wendet sie im letzten Teile seiner Arbeit auf einige besondere Cremona'sche Transformationen von einer unterhalb sechs liegenden Ordnung an. La. (Lp.)

G. Lazzeri. Sulle reciprocità birazionali nel piano. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_2. 61-67.

Der Verfasser nennt „ebene birationale Reciprocität“ eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Elementen eines Punktfeldes und denen eines Strahlenfeldes. Ist n der Grad der Verwandtschaft und sind die beiden Felder conjectiv, so ist eine Curve von der Ordnung $n+1$ vorhanden, die der Ort eines Punktes des Punktfeldes ist, welcher auf der ihm im Strahlenfeld entsprechenden Geraden liegt, und eine Curve von der Klasse $n+1$, welche die Hüllcurve einer Geraden des Strahlenfeldes ist, die durch den ihr im Punktfelde entsprechenden Punkt geht; die erstere dieser Curven ist gleichzeitig der Ort eines Punktes des Strahlenfeldes, durch welchen die entsprechende Curve geht, während die zweite die Hüllcurve einer Geraden des Punktfeldes ist, welche die entsprechende Curve berührt. Diese beiden Curven werden vom Verfasser im ersten Teile seiner Arbeit untersucht; er bestimmt ihre hauptsächlichsten Singularitäten und ihr Verhalten zu den Grundelementen der Verwandtschaft sowie zu den bezüglichen homaloidischen Curvennetzen.

Im zweiten Teile stellt er sich die Frage: Giebt es Verwandtschaften (polare Reciprocitäten) zwischen den Punkten und den Geraden einer Ebene, bei denen jedem Punkte seine Polargerade in Bezug auf eine Curve von der Ordnung $n+1$ entspricht? Die Antwort fällt dahin aus, dass derartige Verwandtschaften nur für $n = 1$ und $n = 2$ bestehen.

Im ersten Falle hat man die Polarität in Bezug auf einen Kegelschnitt, im zweiten die in Bezug auf ein Dreieck.

Im dritten Teile endlich fragt der Verfasser, ob es Verwandtschaften giebt, bei denen jede Gerade durch den ihr entsprechenden Punkt geht, und er findet (was schon Herr R. Sturm bemerkt hatte in Klein Ann. XIX. 474, vgl. F. d. M. XIV. 1882. 512), dass es nur eine einzige giebt. Sind u'_1, u'_2, u'_3 die Coordinaten der Geraden, welche dem Punkte x_1, x_2, x_3 entspricht, so wird diese Verwandtschaft durch die folgenden Relationen bestimmt:

$$u'_1 \equiv (a_2-a_3)x_2x_3, \quad u'_2 \equiv (a_3-a_1)x_3x_1, \quad u'_3 \equiv (a_1-a_2)x_1x_2.$$

La. (Lp.)

G. Lazzeri. Sulle reciprocità birazionali nello spazio. Rom. Acc. L. Rend. (4) II$_2$. 73-79.

Der Verfasser nennt „birationale Reciprocität (μ, ν) im Raume“ eine eindeutige Verwandtschaft zwischen den Elementen eines Punktraumes und denjenigen eines Ebenenraumes, sobald dieselbe so beschaffen ist, dass jeder Ebene des ersten Raumes eine Oberfläche von der Klasse ν im zweiten, jedem Punkte dieses letzteren eine Oberfläche von der Ordnung μ in dem ersteren entspricht. Wenn die beiden Räume conjectiv sind, so ist eine Oberfläche von der Ordnung $\mu+1$ vorhanden, welche der Ort der auf ihren entsprechenden Ebenen liegenden Punkte ist, und eine Oberfläche von der Klasse $\nu+1$, welche die Hüllfläche der durch ihre entsprechenden Punkte gehenden Ebenen ist. Die erste Fläche ist gleichzeitig der Ort der Punkte des Ebenenraumes, welche auf den entsprechenden Oberflächen liegen, oder welche einer Geraden des Ebenenraumes und der entsprechenden Curve angehören; die zweite ist gleichzeitig die Hüllfläche der Ebenen des Punktraumes, welche die entsprechenden Oberflächen berühren, oder welche durch eine Gerade des Punktraumes gehen und ausserdem der entsprechenden abwickelbaren Fläche angehören. Die zwischen diesen Oberflächen und den Grundelementen bestehenden Beziehungen werden vom Verfasser im ersten Teile der Arbeit erforscht.

Im zweiten stellt er sich die Frage: Giebt es Verwandtschaften (polare Reciprocitäten) zwischen den Punkten und

Ebenen des Raumes, in welchen jedem Punkte seine Polarebene in Bezug auf eine Oberfläche entspricht? Die Antwort fällt dahin aus, dass es ausser der Polarität in Bezug auf eine Oberfläche zweiter Ordnung nur zwei Verwandtschaften dieser Art giebt, nämlich die Polarität in Bezug auf ein Tetraeder und die durch folgende Relationen definirte:

$$u'_1 \equiv x_4(x_2+x_3),\quad u'_2 \equiv x_4(x_3+x_1),\quad u'_3 \equiv x_4(x_1+x_2),$$
$$u'_4 \equiv x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2,$$

wo x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punktes, u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 die der entsprechenden Ebene sind.

Im dritten Teile endlich fragt der Verfasser, ob es birationale Reciprocitäten des Raumes giebt, bei welchen jede Ebene durch den entsprechenden Punkt geht. Durch die Analogie mit den Vorkommnissen in der Ebene verleitet, glaubt der Verfasser schliessen zu dürfen, dass es nur zwei giebt, nämlich das gewöhnliche Nullsystem und die durch die folgenden Gleichungen definirte Verwandtschaft:

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = \left\| \begin{matrix} \sum a_{1i}x_i & \sum a_{2i}x_i & \sum a_{3i}x_i & \sum a_{4i}x_i \\ \sum b_{1i}x_i & \sum b_{2i}x_i & \sum b_{3i}x_i & \sum b_{4i}x_i \\ \sum c_{1i}x_i & \sum c_{2i}x_i & \sum c_{3i}x_i & \sum c_{4i}x_i \end{matrix} \right\| \quad (i=1,2,3,4).$$

Dieser Schluss ist jedoch nicht richtig, wie Herr Montesano jüngst bemerkt hat (Rom. Acc. L. (4) IV. 1888. 583-590).

La. (Lp.)

C. Segre. Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes. Klein Ann. XXVII. 295-314.

Man bezeichne mit C^n eine elliptische Normalcurve; dieselbe gehört einem $(n-1)$-dimensionalen Raume R_{n-1} an, aber keinem weniger ausgedehnten. Es giebt ∞^1 eindeutige Transformationen der Curve in sich selbst; jede von ihnen giebt Anlass zu einer geradlinigen rationalen Normalfläche F_2^{n-2} von der Ordnung $n-2$, dem Orte der Geraden, welche die entsprechenden Punktepaare der Curve verbinden; deshalb können die Ergebnisse, zu denen der Verfasser in seiner Note gelangt ist: „Sulle rigate razionali“

(Torino Atti XIX, F. d. M. XVI. 1884. 604), einen Beitrag zur Ermittelung der eindeutigen Transformationen der elliptischen Curven in sich selbst liefern.

Diese Transformationen sind von zweierlei Art. Sind die Coordinaten der Punkte der Curve elliptische Functionen des Parameters u, dessen Perioden ω_1 und ω_2 sein mögen, so werden diese Transformationen durch die Relationen $u' \equiv \pm u + C$ (mod. ω_1, ω_2) gegeben, worin C eine Constante ist und man das Zeichen $-$ nehmen muss, wenn die Transformation erster Art, dagegen $+$, wenn sie von der zweiten ist. Hat man insbesondere $C = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ (λ und μ ganze Zahlen), so gelangt man zu den $2n^2$ projectiven Transformationen der Curve C^n in sich selbst, von denen n^2 der ersten und n^2 der zweiten Art angehören.

Man construirt eine Transformation erster Art, indem man $n-2$ willkürliche Punkte auf C^n fest annimmt; jeder R_{n-2}, welcher durch diese Punkte geht, schneidet die Curve ausserdem in einem Punktepaar, die sich bei einer Transformation der ersten Art entsprechen. Folglich ist jede Transformation dieser Art involutorisch und hat vier Doppelpunkte. Ist n ungerade, so hat eine projective Transformation erster Art einen $R_{\frac{1}{2}(n-3)}$ und einen $R_{\frac{1}{2}(n-1)}$ zu Axen. Ist n gerade, so haben $(\frac{1}{2}n)^2$ von ihnen einen $R_{\frac{1}{2}n-2}$ und einen $R_{\frac{1}{2}n}$ zu Axen (singuläre Transformationen), während die übrigen $3(\frac{1}{2}n)^2$ zwei $R_{\frac{1}{2}n-1}$ zu Axen haben. Wenn n eine Primzahl ist, so bilden die n^2 Axen $R_{\frac{1}{2}(n-3)}$ der projectiven Transformationen erster Art eine sehr merkwürdige Configuration. Jeder R_{n-2} nämlich, welcher zwei von diesen Axen enthält, begreift n von ihnen in sich; somit erhält man hiernach $n(n+1) R_{n-2}$, von denen jeder n Axen enthält, während durch jede Axe $n+1$ dieser Räume gehen; endlich sondern sich diese Räume in $n+1$ Gruppen zu je n, sodass die n Räume einer und derselben Gruppe alle n^2 Axen enthalten.

Eine Transformation zweiter Art ist immer das Product zweier von der ersten; sie ist im allgemeinen nicht involutorisch, sondern bloss dann, wenn die Constante einen der Werte $\frac{1}{2}\omega_1$,

$\frac{1}{2}\omega_2$, $\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$ hat. Die drei diesen Werten von C entsprechenden Transformationen sind äusserst wichtig und heissen deshalb „principale". Ist n gerade, so ist jede von ihnen projectiv und hat zwei $R_{\frac{1}{2}n-1}$ zu Axen. Ist n von der Form $4k+2$, so vertauscht jede principale Transformation die Axen jeder der anderen unter einander; ist dagegen n von der Form $4k$, so sind die drei Axenpaare der principalen Transformationen die $R_{\frac{1}{2}n-1}$, welche paarweise vier $R_{\frac{1}{2}n-1}$ verbinden; in diesem Falle ordnen sich die singulären Transformationen paarweise an in Bezug auf jede principale Transformation, indem jedes Paar mit dieser principalen Transformation eine Gruppe bildet.

Die geradlinige Fläche F_2^{n-2}, welche einer Transformation erster Art entspricht, hat, wenn n ungerade ist, eine Minimalcurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(n-3)$, welche C^n in einem Punkte schneidet. Wenn jedoch n gerade und die Transformation nicht projectiv ist, so hat F_2^{n-2} ∞^1 Minimalcurven von der Ordnung $\frac{1}{2}n-1$.

Diese Sätze sind die hervorstechendsten unter den vom Verfasser bewiesenen. Im letzten Teile seiner Arbeit macht er bemerkenswerte Anwendungen von ihnen auf die elliptischen Curven unseres Raumes; diese Anwendungen beweisen von neuem die Vorteile der projectiven Geometrie der Räume höherer Dimensionen für die Erforschung der Erscheinungen unseres Raumes. Zum Schlusse zeigt Herr Segre: „Wenn zwischen zwei elliptischen Curven C'^n und C''^n, die in zwei Räumen R'_{n-1} und R''_{n-1} liegen, eine eindeutige Beziehung besteht, sodass den Durchschnitten von C'^n mit einem gewissen R_{n-2} aus R'_{n-1} die Durchschnitte von C''^n mit einem R_{n-2} aus R''_{n-1} entsprechen, so ist die Correspondenz zwischen den beiden Curven durch eine Homographie zwischen den Räumen R'_{n-1} und R''_{n-1} bestimmt". Daraus fliesst der wichtige Zusatz: „Es giebt keine anderen geradlinigen elliptischen Flächen, welche einem R_n angehören, als die Kegel, welche die elliptischen Normalcurven projiciren". La. (Lp.)

C. Segre. Sugli spazi fondamentali di un' omografia.
Rom. Acc. L. Rend. (4) II$_1$. 325-327.

Die Note ergänzt die Abhandlung desselben Verfassers: „Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni." (Rom. Acc. L. Mem. (3) XIX, F. d. M. XVI. 1884. 693). Sie enthält einen sehr einfachen analytischen Beweis des folgenden wichtigen Satzes: „In einer projectiven, nicht singulären Verwandtschaft des n-dimensionalen Raumes ist, wenn S_r und Σ_r zwei conjugirte Grundräume von Punkten und Ebenen bedeuten, der Ort der Homologie-Centren der Paare von entsprechenden S_{r+1}, welche durch S_r gehen, der S_{n-r-1} Träger von Σ_r; die Verwandtschaft, welche man auf diese Weise zwischen den durch S_r gehenden S_{r+1} und den Centren der Homologien herstellt, welche zwischen ihnen und den ihnen entsprechenden S_{r+1} bestehen, ist eine projective." La. (Lp.)

Fr. Hofmann. Ein einfacher Beweis für die Erhaltung des Doppelverhältnisses von vier Punkten der Ebene bei linearer Abbildung. Hoppe Arch. (2) III. 446-447.

W. St.

B. Conforme Abbildung.

K. Reinbeck. Ueber diejenigen Flächen, auf welche die Flächen zweiten Grades durch parallele Normalen conform abgebildet werden. Diss. Göttingen. Vandenhoek & R.

Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Flächen durch parallele Normalen conform aufeinander abgebildet werden können, ist nach Herrn Christoffel, dass sie beide durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden können. Kann man also zu einer Fläche, welche die genannte Eigenschaft besitzt, eine zweite finden, die mit ihr conform ist, und bei der die entsprechenden Punkte parallele

Normalen haben, so hat auch die zweite Fläche die Eigenschaft, durch ihre Krümmungslinien in unendlich kleine Quadrate zerlegt werden zu können. Der Herr Verfasser zeigt nun, dass die bezeichnete Aufgabe stets löslich ist und zwar so, dass einer Fläche mit positivem Krümmungsmass immer eine solche mit negativem Krümmungsmass entspricht, und wendet die allgemeinere Lösung speciell auf die Flächen zweiten Grades an. Wir führen hier das Resultat für das Ellipsoid an: Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c lassen sich, wie folgt, in Krümmungsparametern darstellen

$$x^2 = a^2 \frac{(a^2-t_1)(a^2-t_2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

und die analogen, wo $a^2 \geqq t_1 \geqq b^2 \geqq t_2 \geqq c^2 > 0$ ist.

Die verwandte Fläche ist dann folgendermassen dargestellt:

$$x' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\ \log \text{nat} \frac{\sqrt{a^2-t_2}+\sqrt{a^2-t_1}}{\sqrt{a^2-t_2}-\sqrt{a^2-t_1}},$$

$$y' = \sqrt{\frac{b^2}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\ \text{arc tg} \sqrt{\frac{t_1-b^2}{b^2-t_2}},$$

$$z' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\ \log \text{nat} \frac{\sqrt{t_1-c^2}+\sqrt{t_2-c^2}}{\sqrt{t_1-c^2}-\sqrt{t_2-c^2}}.$$

Für die Hyperboloide ergeben sich ähnliche Formeln; durch Grenzbetrachtungen werden auch die für die Paraboloide gewonnen. Die Gestalt der dem Ellipsoid entsprechenden Fläche wird genauer untersucht und durch die Ansicht eines Modelles erläutert. A.

R. Hoppe. Conforme perspectivische Projection der Flächen auf einander. Hoppe Arch. (2) IV. 328-329.

Die einzig mögliche conforme perspectivische Abbildung einer Fläche geschieht (wenn man die Aehnlichkeit als selbstverständlich ausser Acht lässt) durch reciproke Radien.

Mithin ist eine perspectivisch-conforme Abbildung eines

nicht sphärischen Rotationsellipsoides auf eine Regelfläche unmöglich.

An diese beiden Bemerkungen knüpft der Herr Verfasser noch die analytische Transformation einer Regelfläche durch reciproke Radien. A.

A. Capelli. Sulla limitata possibilità di trasformazioni conformi nello spazio. Brioschi Ann. (2) XIV. 227-237.

Bekanntlich hat Liouville (Application de l'Analyse à la Géométrie. Paris 1860 Note IV) bewiesen, dass eine conforme Abbildung eines Körpers in eine andere (also eine solche, bei der entsprechende Körperelemente ähnlich sind) stets zurückgeführt werden kann auf eine Abbildung durch reciproke Radien und auf eine solche nach Aehnlichkeit endlicher entsprechender Figuren. Der Herr Verfasser führt in dieser Abhandlung den Beweis dieses Satzes in einer mehr synthetischen Weise, nämlich durch den Nachweis, dass jeder Kugel des einen Systems im allgemeinen eine Kugel des andern Systems entspricht, was nach einem Beweise von Bianchi nur bei den oben charakterisirten Abbildungsarten der Fall ist. Der sehr einfache Beweis des Herrn Verfassers gründet sich darauf, dass wegen der Aehnlichkeit der kleinsten Teile einem dreifachen Orthogonalsystem wieder ein solches entspricht, und da nach einem bekannten Satze von Dupin die Flächen eines solchen Systems sich gegenseitig in Krümmungslinien schneiden, auch die Krümmungslinien entsprechender Flächen bei der Abbildung einander entsprechen. Da nun jede Curve auf der Kugel eine Krümmungslinie ist, so muss ihr in der Abbildung eine Fläche entsprechen, die auch jede Curve zur Krümmungslinie hat, also wieder eine Kugel. An diesen einfachen Beweis werden noch einige geometrische Betrachtungen und einige analytische Entwickelungen geknüpft. A.

M. du Châtenet. Sur la représentation des figures tracées sur une surface. Applications aux cartes de géographie. Nouv. Ann. (3) V. 142-155.

M. DU CHÂTENET. Déterminations des systèmes de cartes de géographie dans lesquels tous les cercles de la sphère sont représentés par des cercles. Nouv. Ann. (3) V. 163-176.

Es werden durch eine etwas umständliche Analyse gewisse Gesetze der Abbildung der Flächen auf einander entwickelt, welche übrigens bekannt und zum Teil in sehr viel einfacherer Weise abzuleiten sind. Dies gilt namentlich von dem Problem, φ und ψ so als Functionen von u und v zu bestimmen, dass einer linearen Relation zwischen u und v eine lineare Relation zwischen φ und ψ entspricht, was ja nichts anderes ist als die bekannte Verwandtschaft der Collineation. Die Folgerungen, die hieraus gezogen werden, sind ebenfalls bereits bekannt, so z. B. der Satz, dass die perspectivische Centralprojection die einzige Abbildung der Kugel auf die Ebene ist, bei welcher die grössten Kreise sich als Gerade projiciren, dass die Mercator'sche Projection die einzige ist, bei welcher die Loxodromien als Gerade abgebildet werden, und (in der zweiten Abhandlung) dass die stereographische Projection der Kugel die einzige Abbildung ist, bei welcher alle Kreise sich als Kreise abbilden. In der ersten Abhandlung wird zum Schluss noch die Abbildung des Torus (Rotationsfläche des Kreises) auf die Ebene besprochen, bei welcher sich die Centralschnitte als gerade Linien abbilden. A.

J. M. BRÜCKNER. Ueber eine besondere Art der conformen Abbildung einer Ebene auf eine andere. Diss. Leipzig. 8°. 47 S.

K. RÜCKHOLDT. Ueber das logarithmische Potential einer halbkreisförmigen Platte und über eine damit in Zusammenhang stehende conforme Abbildung. Jena. 8°. 36 S.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

L. HENNEBERG. Statik der starren Systeme. Darmstadt. A. Bergmann. X + 374 S. gr. 8°. Mit 131 Fig. u. 12 Taf.

Das vorliegende Buch bildet den ersten Teil eines auf vier Bände berechneten Werks: „Lehrbuch der technischen Mechanik" von L. Henneberg und O. Smreker.

Die folgenden Teile sollen enthalten: 2) Grundzüge der Dynamik, 3) Theorie der Elasticität und Festigkeit, 4) Hydraulik. Die drei ersten Teile sind aus den Vorlesungen hervorgegangen, welche Hr. Henneberg an der Technischen Hochschule zu Darmstadt über technische Mechanik, graphische Statik und analytische Mechanik gehalten hat; den vierten Teil hat Hr. Smreker übernommen, der auch für den dritten Beiträge zugesichert hat.

Wesentlich für technische Hochschulen bestimmt, soll das Lehrbuch die Mechanik in dem für dieselben empfehlenswerten Umfange vortragen, weitergehende theoretische Betrachtungen vermeiden, technische Beispiele nur zur Erläuterung der Theorie bringen. Die Methoden der graphischen Statik sind aufgenommen worden.

Der erste Abschnitt der Statik handelt von der Zusammensetzung von Kräften, zunächst mit demselben Angriffspunkt, sodann mit verschiedenen Angriffspunkten an einem starren Systeme,

wenn die Kräfte a) in derselben Ebene, b) im Raume liegen. Die Lehre vom Schwerpunkte und vom Gleichgewichte der Kräfte an einem nicht freien Körper, endlich das Princip der virtuellen Verrückungen bilden den Schluss des ersten Abschnittes.

Im zweiten wird die Zerlegung der Kräfte und das einfache Fachwerk abgehandelt; die graphische Zerlegung des ebenen und räumlichen Kräftesystemes, das ebene und räumliche Fachwerk kommen der Reihe nach zur Erledigung. Sowohl die analytische Methode als auch die synthetische mit graphischer Darstellung werden gelehrt, und es ist dem Vortrage anzumerken, dass der Hr. Verfasser auf dem Gebiete der hierher gehörigen Aufgaben productiv thätig gewesen ist.

Der letzte Abschnitt endlich bringt die Theorie der Reibung in zwei Teilen, von denen der erste die theoretischen Grundlagen entwickelt, der zweite die Reibungswiderstände an speciellen Getrieben untersucht. Der bedeutende Umfang dieses Abschnittes (101 Seiten) zeigt schon, dass der Gegenstand gründlicher behandelt ist, als es gewöhnlich in den Lehrbüchern der Mechanik zu geschehen pflegt.

Die Vortragsweise ist durch wohlthuende Klarheit der Sprache und vortreffliche Gliederung des Inhaltes ausgezeichnet; daher erscheint dem Ref. die „Statik der starren Systeme“ als ein empfehlenswertes Buch für den Kreis von Lesern, für welchen es verfasst ist. Die Ausstattung ist eine sehr gute; besonders die Figuren, sowohl die im Texte als auch die auf den Tafeln, erfreuen das Auge durch Sauberkeit und Genauigkeit.

Lp.

G. M. Minchin. A treatise on statics with applications to physics. Vol. II. Third edition, corrected and enlarged. Oxford. Clarendon Press. VII u. 512 S.

Die „Statik“ des Hrn. Minchin hat sich eine so hervorragende Stelle in der Achtung der Mathematiker errungen, dass man, um auf diese dritte Auflage aufmerksam zu mache-

nichts zu sagen braucht, als dass sie zu einem solchen Umfange ausgedehnt worden ist, um ihre Ausgabe in zwei Bänden nötig zu machen. Unter den wichtigsten Zusätzen befinden sich eine Darstellung der Ball'schen Theorie der Schrauben in ihrer Beziehung zur Statik, ein Capitel über astatisches Gleichgewicht, bei dessen Behandlung die Methoden der Quaternionen gebraucht werden, und ein neues Capitel über das Gleichgewicht von Saiten und Federn. Die Capitel über den Zwang und über Deformationen (strains and stresses) sind bedeutend vergrössert worden, und es ist beachtenswert, dass in dem ersteren Capitel das *CGS*-System der Einheiten ausdrücklich eingeführt ist, sodass z. B. Poisson's Gleichung immer in der Form erscheint: $\nabla^2 V = -4\pi\gamma\varrho$, wo γ die *CGS*-Constante der Gravitation ist. Wir neigen für uns der Meinung zu, diese Neuerung im Vergleich zu hergebrachten Methoden für vorteilhaft zu erachten, wenigstens für Anfänger. In dem Capitel über Anziehung befindet sich ein kurzer Abriss der Kugelfunctionen, und es mag bemerkt werden, dass Hr. Minchin den Ausdruck „Laplacian" gebraucht, um einen Laplace'schen Coefficienten zu bezeichnen, obschon er als wohlbegründet die „Kugelfunction" (spherical harmonic) beibehält. Dem Drucke ist grosse Sorgfalt gewidmet und das allgemeine Aussehen des Bandes entspricht allen Wünschen. Druckfehler scheinen äusserst selten vorzukommen. Gbs. (Lp.)

J. Greaves. A treatise on elementary statics. London. Macmillan and Co. VIII. u. 272 S.

Dieses Buch ist für solche berechnet, deren mathematische Ausbildung die Differential- und Integral-Rechnung nicht einschliesst, und ist, so weit die theoretische Statik ohne diese Hülfsmittel behandelt werden kann, recht vollständig. Newton's Bewegungsgesetze werden als die Grundlage der Wissenschaft angenommen. Aus der Newton'schen Definition der Kraft und aus dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten wird dasjenige der Kräfte abgeleitet; dann werden aus dem dritten Gesetze Newton's die notwendigen Gleichgewichtsbedingungen für jedes

Massensystem gefunden, und aus diesen Betrachtungen sowie aus gewissen geometrischen folgen die hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers. Capitel III über die „Statik unfreier Körper“ führt graphische Methoden ein, welche vielleicht zweckmässig in grösserem Umfange hätten benutzt werden können. Das Capitel über virtuelle Arbeit ist klar abgefasst, dürfte jedoch wahrscheinlich für Anfänger schwierig gefunden werden, selbst mit Hülfe des Anhanges über unendlich kleine Grössen. Zahlreiche gelöste und ungelöste Beispiele sollen für den Studirenden eine wirksame Unterstützung sein. Die Ausstattung des Buches ist vortrefflich. Gbs. (Lp.)

T. M. Goodeve. A manual of mechanics; an elementary text-book, designed for students of applied mechanics. London. Longmans.

„Ein für solche Leser verfasstes Werkchen, deren Wissen in der Mathematik nur klein ist. Der praktische Teil des Buches ist sehr gut. Die von den Mechanismen handelnden Abschnitte sind wohl geeignet, die wissenschaftlichen Principien zu beleuchten.“ (Aus dem Referat in Nature XXXIV. 358-359 von Herrn G. M. Minchin.) Lp.

J. Blaikie. Elementary dynamics (mechanics). 11 edit. enlarged. Edinburgh.

J. P. Church. Statics and dynamics. New-York.

E. Collignon. Traité de mécanique. 5me édition revue et augmentée. Partie V. Paris.

B. Schnitler. Laerebog i Mathematik og Mekanik for Teknikere. Heft 1. Christiania. 8°. 272 S.

D. H. Marshall. Introduction to the science of dynamics. London. VII + 120 S. 8°.

J. A. Bocquet. Cours élémentaire de mécanique. 2 parties. (Principes et applications. Travail des machines et résistance des matériaux.)

W. K. Clifford. Lectures and essays. (Applied mathematics and mechanics.) Edit. by L. Stephen and F. Pollock. 2 ed. London.

H. Diesener. Praktische Unterrichtsbücher für Bautechniker. Halle a. S. L. Hoffstetter. 1887: Bd. I. Darstellende Geometrie, Bd. II. Die technische Naturlehre und Mechanik, Bd. III. Die Festigkeitslehre und Statik.

F. Rudio. Ueber einige Grundbegriffe der Mechanik. Wolf Z XXXI. 59-76.

Der Verfasser steht in Bezug auf die Grundbegriffe der Mechanik ganz auf dem durch Kirchhoff geschaffenen Boden; in der Erkenntnis, dass eine einfache und einführende Darstellung der in Frage kommenden Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Masse und Gewicht noch fehlen, unternimmt Herr Rudio von dem angegebenen Standpunkt aus dieselben zu präcisiren; und man muss gestehen, dass ihm dies Unternehmen gelungen ist. Die Begriffe von Raum und Zeit werden als gegeben vorausgesetzt, und dann zunächst die gleichförmige Bewegung auf gerader Linie betrachtet, bei welcher der in einer Secunde zurückgelegte Weg als Geschwindigkeit bezeichnet wird. Es wird dann gezeigt, dass dieser Ausdruck identisch ist mit $\frac{s_1-s}{t_1-t}$, welchen Wert die beiden Zeiten t_1 und t auch haben mögen. Bei allgemeinerer Bewegung wird s

eine Function $f(t)$ von t sein, und in diesem Falle ist der Quotient $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ von den Zeiten nicht mehr unabhängig. Da aber ein Körper, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$ bewegt, in dem Zeitintervall $t_1 - t$ dieselbe Strecke zurücklegt, so kann man diesen Ausdruck mit einigem Recht als „die mittlere Geschwindigkeit" in dem Zeitintervall t bis t_1 bezeichnen. Indem t_1 sich mehr und mehr der Grenze t nähert, wird die mittlere Geschwindigkeit sich ebenfalls einer von t allein abhängigen Grösse nähern, nämlich der Grenze $f'(t)$, und diese Grenze wird als „Geschwindigkeit" definirt, wie der Herr Verfasser im Gegensatz zu denjenigen bemerkt, welche da glauben, die Richtigkeit der Formel $v = f'(t)$ beweisen zu müssen oder zu können. Ausgehend von der sogenannten gleichförmig beschleunigten Bewegung construirt der Herr Verfasser in ähnlicher Weise den Begriff der Beschleunigung.

Unter einem Körper versteht der Herr Verfasser alles das, was wir durch unsere Sinne wahrnehmen. Jeder Körper nimmt einen gewissen Raum ein; dasjenige, womit dieser Raum ausgefüllt wird und was eben auf unsere Sinne einwirkt, nennen wir die Masse des Körpers. Durch den Ausdruck Gewicht geben wir der subjectiven Empfindung Ausdruck, dass ein Körper auf seine Unterlage einen gewissen Druck ausübt; so dass wir auch ohne genauen Massstab für das Gewicht nach dem im allgemeinen übereinstimmenden Grad der Empfindung von grösseren und kleineren Gewichten reden können. Eine Masse wird wesentlich nach ihrem Gewichte beurteilt, so dass gleiche Massen auch gleiche Gewichte haben. Als ein wesentliches Merkmal der Masse wird hervorgehoben, dass sie unabhängig vom Raum und von der Zeit ist, dass also zwei Massen die an einem Orte und zu einer Zeit übereinstimmen, dies zu allen Zeiten thun; sind zwei Massen einer dritten gleich, so sind sie unter einander gleich. Es ergiebt sich als Definition der Gleichheit zweier Massen und ihrer Gewichte, dass sie, auf eine Wage gebracht, einander das Gleichgewicht halten müssen. Die Masse ist eine von der

Raum- und Zeiteinheit unabhängige Zahl; sie giebt an, wieviel von einer gewählten Masseneinheit auf einer Wage ebensoviel wiegen wie der Körper, dessen Masse zu bestimmen ist; dabei ist die Thatsache zu beachten, dass Gleichheit des Gewichtes unabhängig von der Art der Wage (Hebel- und Federwage) ist. Mit der Federwage erkennt man dann, dass die Gewichte derselben Masse an verschiedenen Orten der Erde sich verhalten wie die Beschleunigungen an diesen Stellen, so dass das Gewicht durch das Product mg dargestellt wird. Zum Schluss wird auseinandergesetzt, dass durch die Einführung des Kraftbegriffs keine Erklärung der Bewegungserscheinungen, sondern unter Umständen eine Vereinfachung in der Beschreibung erzielt werde.

F. K.

Th. Beck. Ueber einige Grundbegriffe der Mechanik. Civiling. (2) XXXII. 191-215.

Die vorliegende Abhandlung steht im Zusammenhang mit der älteren, dem Referenten leider unzugänglichen Schrift desselben Verfassers: „Bemerkungen zu F. Reuleaux's Kinematik über die Frage: Ist Reibung eine Kraft oder ein Widerstand“ 1876. Sie ist die Wiedergabe eines Gespräches, welches der Verfasser im Anschlusse an die eben citirte Schrift mit einem „angesehenen, leider verstorbenen Lehrer der Maschinentheorie“ geführt hat. Referent war bisher der Ansicht, dass auch jeder Widerstand eine Kraft sei, und tritt daher, durch den eben angeführten Titel irre gemacht, nicht ohne Voreingenommenheit an die Besprechung dieser Schrift. Es sei ihm daher gestattet, das Referat möglichst an die wortgetreue Wiedergabe einiger Stellen der vorliegenden Abhandlung anzuschliessen. Die Ausführungen des Verfassers beruhen auf seiner Anschauung vom Wesen des Druckes und der Kraft, welche auf Seite 195 zu Tage tritt:

„Wo es gerade passt und wo der Widerspruch nicht zu augenfällig ist, nimmt man doch selten Anstand, Druck und Kraft als ein und dasselbe zu behandeln, während doch in jeder Mechanik zu Anfang auseinander gesetzt wird, dass Druck die

erste Wirkung einer Kraft sei, also nicht die Kraft selbst". Der Verfasser scheint den Ausdruck „Druck" für die durch gewisse Kräfte hervorgerufene Empfindung aufbewahren zu wollen, wenigstens lässt darauf der Anfang eines Satzes auf S. 199 schliessen, welcher lautet: „Wenn man Druck und Kraft als gleichbedeutend und als etwas durch einen Sinn wahrnehmbares definirt u. s. w." Ganz richtig hebt dem gegenüber der Partner des Gespräches hervor, dass wir keine Kraft direct bemerken, dass, wenn von einer Druckempfindung die Rede ist, stets die Deformationen gemeint sind, welche durch einen Druck, d. h. durch eine Kraft an unserem Körper hervorgebracht werden.

Man könnte ja annehmen, Herr Beck wolle nur gegen den Doppelgebrauch des Wortes Druck, zur Bezeichnung einer Empfindung und zur Kennzeichnung dessen polemisiren, was man in der Hydrodynamik, Elasticitätstheorie und anderen Zweigen der Mechanik darunter versteht. Dem ist aber nicht so; spricht er doch auf Seite 200 unumwunden aus:

„dass er (d. h. der Druck) niemals als eigentliche Ursache der Bewegung gelten kann (und das ist auch nach Herrn Beck das Wesen der Kraft), weil die Molecularkräfte selbst immer erst durch eine bewegende Kraft aus dem Gleichgewicht gebracht werden müssen, ehe sie eine solche Wechselwirkung erzeugen können. Ich betrachte daher die Molecularkräfte (Widerstände) und den aus denselben hervorgehenden Druck nicht als Ursachen einer Bewegung, sondern nur als Bedingungen der Uebertragung der Wirkung einer bewegenden Kraft".

Zur Erläuterung dieser Ansichten dient dem Verfasser der folgende Vergleich:

„Wenn Ihnen ein Stein durch eine Fensterscheibe fliegt, so werden Sie nicht als genügende Antwort gelten lassen, wenn man Ihnen sagt, die lebendige Kraft des Steines habe Ihre Scheibe zertrümmert, vielmehr werden Sie diese Ursache wo anders suchen". Offenbar ist hier die mechanische Seite der Frage mit der juristischen nach etwaiger Entschädigung verwechselt.

Man meine nicht, dass wir etwa ein unglücklich gewähltes Beispiel herausgegriffen hätten. Immer von neuem, wenn

es sich um Bewegungen handelt, die durch Druckkräfte veranlasst werden, sucht Herr Beck nach einem tieferen Grunde, nach der eigentlichen Ursache der Bewegung. Sein Partner hält ihm entgegen, dass die Bewegung, welche die gespannte Sehne dem Pfeile mitteilt, doch offenbar in den Molecularkräften ihren Grund habe. Darauf erwidert Herr Beck (S. 208):

„der Schütze ist es, der den Pfeil vermöge seiner Muskelkraft abschiesst und nicht der Bogen, dessen sich jener nur bedient, und dessen Elasticität nur eine Bedingung für die Umwandlung und Uebertragung der Arbeit des Schützen ist". Aber ist nicht das, was hier Muskelkraft genannt wird, auch wieder eine Summe von Molecularkräften? Warum forscht Herr Beck nicht gleich weiter, welches ist die Ursache der Kraft des Schützen u. s. f.?

Bei der Kanone soll die Sache ganz anders liegen, „weil da keine mechanische Arbeit notwendig ist, dem Pulvergas seine Spannung zu geben". Ist diese Spannung nicht auch wieder der Ausdruck, von gewissen zwischen den Molecülen des Gases thätigen Kräften? Um sich vor diesem Einwand zu schützen, macht Herr Beck fast zum Schluss der Abhandlung die Bemerkung:

„Wenn ich sagte, Molecularkräfte könnten nicht als Ursachen der Bewegung angesehen werden, so war dies allerdings ungenau, und ich meinte damit nur solche Molecularkräfte, welche die Form eines Körpers bedingen, welche nur zum Vorschein kommen, wenn eine äussere Kraft formändernd auf den Körper einwirkt (daher latente Kräfte), und welche der Formänderung Widerstand leisten".

Referent glaubt nicht, dass eine solche Unterscheidung der Molecularkräfte berechtigt ist.

Ob den Ausführungen des Herrn Beck gegenüber die Warnung vor einer „zu philosophischen Auffassung", welche der Partner des Gespräches ertönen lässt, am Platze ist, überlasse ich der Beurteilung des Lesers. F. K.

E. Novarese. Di una analogia fra la teorica delle velocità e la teorica delle forze. Torino Atti XXI. 900-911.

Der Aufsatz ist durch eine Stelle in dem Cours de Mécanique et Machines von Bresse (F. d. M. XVII. 1885. 812) veranlasst, woselbst auf die vollständige Analogie zwischen den Sätzen über die Zusammensetzung der Kräfte und Kräftepaare einerseits und denen über die Zusammensetzung der Bewegungen eines starren Körpers in der Kinematik andererseits hingewiesen ist. Die Stelle schliesst mit den Worten: „Uebrigens kann man dem Anscheine nach diese Analogie nicht direct durch irgend welche philosophische Ueberlegung erweisen, durch welche die Aufstellung der einen der beiden Theorien überflüssig würde, nachdem man die andere ergründet hat.“ Hr. Novarese zeigt, dass die gemeinsame Quelle beider Theorien in der Geometrie der Streckensysteme zu finden ist, specieller in der Aequivalenz der Streckensysteme, wie das in Deutschland u. a. in dem Lehrbuche von Schell dargelegt ist, aus welchem das Motto der Arbeit entlehnt ist. Während die beiden ersten Paragraphen nur dem bezeichneten Zwecke dienen, enthält der dritte und letzte eine mit dem Vorangehenden eng zusammenhängende kinematische Untersuchung. Lp.

Pescheck. Der Kraftbegriff und andere in der Mechanik übliche Ausdrücke. Centralbl. d. Bauverw. VI. 495-496.

Für Herrn Pescheck wird der Kraftbegriff hinreichend dadurch erklärt, dass eine Kraft sich durch Gewichte messen lasse. Habe man das einmal erkannt, so sei jede weitere philosophische Erörterung über das Wesen der Kraft überflüssig; denn was sich nicht durch Gewichte messen lasse, das sei eben keine Kraft, wie z. B. eine Pferdekraft oder die Energie eines Hammerschlages. Warum sich aber diese Dinge nicht durch Gewichte messen lassen, das erfahren wir nicht. Vielleicht hätte Herr Pescheck das Unzureichende seiner Erklärung vom Wesen der Kraft beim Uebergang zu den Bewegungsgleichungen erkannt, wenn ihm nicht das „Grundgesetz der Dynamik“ zu Gebote stände „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“. Eine Notwendigkeit, dieses Gesetz zu erläutern, scheint für Herrn Pescheck nicht vorzuliegen.

Die Behauptung, Lagrange habe durch seine Auseinandersetzungen über das Wesen der Kräfte die Verbreitung der Anschauung aufgehalten, dass die Kräfte durch Gewichte messbar seien, richtet sich selber.

An diese Ausführungen über die Kraft schliessen sich ähnliche Auseinandersetzungen über die Masse, lebendige Kraft und das Trägheitsmoment. F. K.

M. KOENEN. Ueber den Ausdruck „Trägheitsmoment“. Centralbl. d. Bauverw. VI. 517.

Im Gegensatz zu Herrn Pescheck wird auseinandergesetzt, dass der Name Trägheitsmoment wohl geeignet sei, eine richtige Vorstellung von dem Wesen der Sache zu erwecken, welche damit bezeichnet werden soll, denn man könne den Namen ansehen als die Abkürzung der Begriffserklärung „das widerstehende Moment der Trägheitskräfte gegen Umdrehungskräfte“.

F. K.

F. A. MÜLLER. Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik. Marburg. N. G. Elwert. IV + 123 S. 8°.

L. LANGE. Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes und ihr voraussichtliches Endergebnis. Ein Beitrag zur historischen Kritik der mechanischen Principien. Leipzig. W. Engelmann. X + 141 S. 8°.

Selbstanzeige des Verfassers in Wiedemann Beibl. XI. 186-188. Lp.

C. NEUMANN. Ueber eine einfache Methode zur Begründung des Princips der virtuellen Verrückungen. Leipz. Ber. 70-74, Klein Ann. XXVI. 502-505.

Sollen n der Bedingung

$$f(x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

unterworfene materielle Punkte (x_h, y_h, z_h) unter dem Einfluss irgend welcher Kräfte (X_h, Y_h, Z_h) im Gleichgewicht sein, so werden bekanntlich die Formeln stattfinden:

$$X_h = \lambda_h \frac{\partial f}{\partial x_h}, \quad Y_h = \lambda_h \frac{\partial f}{\partial y_h}, \quad Z_h = \lambda_h \frac{\partial f}{\partial z_h}.$$

Der Verfasser giebt nun ein überaus einfaches Verfahren an, mittels dessen man zu zeigen im Stande ist, dass die hier auftretenden Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sämtlich einander gleich sind.

N.

Th. Beck. Historische Notizen. Civiling. (2) XXXII. 401-426, 619-634.

Diese Notizen beziehen sich auf die älteste Periode der Mechanik und des Maschinenbaues. In der ersten Abhandlung gelangen Heron der Aeltere von Alexandria und dessen Vorgänger, namentlich sein Lehrer Ktesibios, zur Besprechung. Es werden die Nachrichten wiedergegeben, welche uns Vitruv über letzteren hinterlassen hat. Das Folgende ist eine Besprechung der Ansichten über Feuer, Wasser, Luft und Erde, welche Heron in seinem Werke „Pneumatica“ entwickelt, sowie derjenigen Apparate und Maschinen, welche in demselben Werke beschrieben sind. Die zweite Notiz betrifft den schon oben erwähnten Marcus Vitruvius Pollio oder vielmehr dessen Werk „De architectura“.

F. K.

R. Lehmann-Filhés. Bemerkung über Jacobi's Vorlesungen über Dynamik. Astr. Nachr. CXIV. 13-14.

Berichtigung eines Zeichenfehlers auf S. 188 der Lottner'schen Ausgabe. Aus $\cos\eta = \cos(90^\circ - \zeta)$, folgt ebensowohl $\eta = 90^\circ - \zeta$, wie auch $\eta = \zeta - 90^\circ$; dies letztere ist richtig.

Lp.

L. Lange. Der Bewegungsbegriff während der Reformation der Himmelskunde von Copernikus bis zu Newton (1543-1687). (Aus Wundt's Philos. Studien III, 352-419.) Diss. Leipzig. 8°.

Capitel 2.

Kinematik.

L. BURMESTER. Lehrbuch der Kinematik. I_1, I_2. Leipzig. A. Felix.

Die Forschungen auf dem Gebiete der Kinematik, der sich das Interesse der Geometer in den letzten Jahrzehnten in erhöhtem Masse zugewendet hat, haben so reiche Ergebnisse geliefert, dass es einem Bedürfnis entspricht, die wissenschaftliche Entwickelung der Bewegungslehre mit der Praxis der Maschinentechnik in engere Verbindung zu bringen und so ihre praktische Verwendung in helleres Licht zu setzen. Aus diesem Bedürfnis ist das vorliegende Lehrbuch erwachsen, von dem der erste Band in zwei Lieferungen, 560 Seiten umfassend, vorliegt.

Der erste Abschnitt behandelt die grundlegenden Beziehungen der Bewegung eines ebenen starren Systems. Es werden darin die elementaren Begriffe, welche die Bewegung eines Punktes und einer starren Geraden darbieten, erörtert, und die Entwickelung der Kinematik eines ebenen Systems zunächst soweit geführt, dass erkennbar wird, wie jede Bewegung desselben sich auf ein Rollen der Polcurve auf der Polbahn zurückführen lässt. Specielle Bewegungsformen schliessen sich an, und ihre Behandlung zeigt die Fruchtbarkeit der allgemeinen Theorie für die Erkenntnis der besonderen Bewegungen starrer Systeme. Beigefügte Anmerkungen enthalten die Angabe der Schriften, in denen die betreffenden Probleme zuerst eine Behandlung erfahren haben, so wie derer, denen wir ein tieferes Eindringen in dieselben und lichtvolle Constructionen einzelner Elemente verdanken. Diese Literaturnachweisungen, welche sich durch das ganze Werk fortsetzen, sind eine wertvolle Beigabe. Des weiteren werden die gegenseitigen Bewegungen dreier ebenen Systeme behandelt, Geschwindigkeiten von Systempunkten, Tangenten und Normalen an den Bahncurven construirt und ein reiches Material für die Erzeugung von Curven und Constructionen wichtiger Elemente

derselben vermittelst Geschwindigkeiten gegeben. Mit der Untersuchung der Beziehungen der Krümmungsmittelpunkte der Curven im bewegten ebenen System und der erzeugten Curven im festen System schliesst der erste Abschnitt ab. Die ganze Behandlungsart ist rein geometrisch gehalten, und es ist für dieselbe charakteristisch, dass viele Ergebnisse der neueren Forschung sich systematisch in den Entwickelungsgang einfügen.

Der zweite Abschnitt ist der eingehenden Untersuchung der cyklischen Curven gewidmet, und an ihn schliesst sich die Behandlung der verschiedenen Formen der Verzahnung der Stirnräder, sowie die der Kapselräderwerke und der damit in Verbindung stehenden Motoren, welche in der Praxis mannigfache Verwendung finden. Es folgt die Lehre von der Stützung und zwangläufigen Bewegung der Gebilde in der Ebene, die Betrachtung der Bewegungsvorgänge und Geschwindigkeitsverhältnisse der einfachen ebenen Maschinen und endlich die eingehende Behandlung der zusammengesetzten ebenen Mechanismen. Auf den reichen Stoff dieser letzten Abschnitte, die wesentlich der Technik angehören, näher einzugehen, liegt ausserhalb der Aufgabe dieser Zeitschrift; es mag genügen, darauf hinzuweisen, dass über alle die Bewegungsvorgänge, welche die verschiedenen Formen der Mechanismen darbieten, sowie über alle die Constructionen, welche durch praktische Anforderungen bedingt sind, die in dem Werke entwickelte Wissenschaft der Kinematik klares Licht verbreitet. Schn.

J. Tannery. Deux leçons de Cinématique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 43-80, auch sep. Paris. Gauthier-Villars.

In der ersten Vorlesung wird die Theorie der Strecken und ihrer Momente in Bezug auf einen Punkt und auf eine Gerade streng systematisch entwickelt und im Anschluss daran der Begriff der geometrischen Derivirten einer Strecke festgestellt. Nach Einführung dieses Begriffs ist die Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes die nach der Zeit genommene geometrische Derivirte der Strecke, welche von irgend einem festen Punkt zu

dem beweglichen führt; die Beschleunigung aber ist die geometrische Derivirte der Geschwindigkeit. Im zweiten Teile wird die Darstellung der Beschleunigung eines Punktes eines starren Systems gegeben, welches entweder mit einer seiner Ebenen auf einer festen Ebene gleitet oder um einen festen Punkt drehbar ist, und diese analytisch wie rein geometrisch entwickelten Ausdrucksformen für die Beschleunigung eines Systempunktes, welche für beide Arten der Bewegung manche Analogien darbieten, werden benutzt, um die Krümmung der Trajectorien der Systempunkte zu beurteilen und die darauf sich beziehenden geometrischen Elemente constructiv zu bestimmen.. Schn.

Ph. Gilbert. Sur l'accélération angulaire. C. R. CIII. 1248-1250.

Ein starrer Körper sei um einen festen Punkt O beweglich, ω sei seine Winkelgeschwindigkeit, $OJ = \omega$ die augenblickliche Drehungsaxe und p, q, r seien die Componenten derselben gegen ein rechtwinkliges Axensystem Ox, Oy, Oz. Dieses Axensystem wird gleichfalls um den Punkt O beweglich gedacht, und seine augenblickliche Drehungsaxe $OS = 0$ hat zu Componenten α, β, γ. Sind nun λ_x, λ_y, λ_z die Componenten der Winkelbeschleunigung λ des starren Körpers, so lässt sich λ als die Geschwindigkeit des Pols J auffassen, und dadurch gewinnt man unmittelbar die Gleichungen:

$$\lambda_x = \frac{dp}{dt} + \beta r - \gamma q,$$

$$\lambda_y = \frac{dq}{dt} + \gamma p - \alpha r,$$

$$\lambda_z = \frac{dr}{dt} + \alpha q - \beta p.$$

Ist das Axensystem $Oxyz$ in Ruhe, so ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und ist es starr mit dem Körper verknüpft, so ist $\alpha = p$, $\beta = q$, $\gamma = r$. In beiden Fällen erhält man die bekannten Formen

$$\lambda_x = \frac{dp}{dt}, \quad \lambda_y = \frac{dq}{dt}, \quad \lambda_z = \frac{dr}{dt}.$$

Nach demselben Princip werden die Darstellungen für die Winkelbeschleunigungen höherer Ordnung gegeben. Schn.

A. Schönflies. Beweis eines Satzes über Bewegungsgruppen. Gött. Nachr. 497-503.

Eine Gruppe von Bewegungen heisst eine endliche oder unendliche Reihe von Ortsveränderungen eines starren Körpers, welche folgenden Bedingungen genügen:

1) zu jeder derselben soll auch die entgegengesetzte in der Reihe vorhanden sein;

2) jede Bewegung, welche durch Zusammensetzung zweier von ihnen entsteht, soll ebenfalls der Reihe angehören.

Unter den Bewegungsgruppen richtet sich das Interesse auf diejenigen, bei welchen aus den Bewegungen, welche die Gruppe erzeugen, nicht beliebig kleine Ortsveränderungen abgeleitet werden können. Von ihnen gilt der Satz: Von einem speciellen Fall abgesehen, können solche Gruppen nur dann existiren, wenn bei jeder zur Gruppe gehörenden Bewegung der bezügliche Drehungswinkel in einem rationalen Verhältnis zu 2π steht. Von diesem Satz wird eine elementare Herleitung aus dem Begriff der Bewegungsgruppe gegeben. Schn.

A. Schönflies. Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. Leipzig. Teubner. VI + 336 S. gr. 8°.

Walker. On a theorem in Kinematics. Lond. M. S. Proc. XVII. 123-226.

Wenn ein Körper zwei auf einander folgende Drehungen 2Φ und $2\Phi'$ um die Axen OA und OB, welche von einem Punkt auslaufen, erleidet, so können diese ersetzt werden durch eine Drehung 2φ um eine Axe OC. Werden A, B, C als Punkte einer Kugel aufgefasst, so bilden diese drei Punkte ein sphärisches Dreieck, in welchem die Winkel BAC und ABC bezüglich Φ

und Φ' sind, φ aber das Supplement des dritten Winkels ACB vorstellt. Dieser von Hamilton mit Hülfe der Quaternionen bewiesene Satz wird hier auf rein geometrischem Wege gewonnen, und zwar schliesst sich der Beweis an folgendes Theorem an: Wenn ein Körper zwei auf einander folgende Drehungen um zwei Axen erleidet, welche sich in einem Punkte schneiden, so beschreibt jede durch den Punkt gehende Gerade Teile von zwei Kegelflächen. Diese Kegelflächen schneiden sich zum zweiten Mal in einer Geraden, und diese Gerade gehört auch der Kegelfläche an, die durch die einfache gleichwertige Drehung erzeugt wird. Schn.

Ed. Dewulf. Mémoire sur une transformation géométrique générale, dont un cas particulier est applicable à la cinématique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 405-431.

Zwei Ebenen P und P' mögen auf einander liegend gedacht werden, und O sei ein beiden Ebenen gemeinsamer Punkt. Ein Punkt M der Ebene P entspricht einem Punkt M' der Ebene P', wenn beide auf einer Geraden, welche durch O führt, gelegen und auf dieser entsprechende Elemente zweier projectivischen Punktreihen sind, für welche die beiden Doppelpunkte in O zusammenfallen. Die Correspondenz der Punkte ist vollkommen bestimmt, sobald auf jeder Geraden durch O noch ein Paar entsprechender Punkte angegeben wird. Um dieses Paar zu fixiren, denkt der Verfasser sich eine Curve φ' vom n^{ten} Grade in der Ebene P', welche in O einen $(n-1)$-fachen Punkt hat, und lässt jedem Punkt π', in welchem eine Gerade durch O diese Curve noch schneidet, den Punkt in P entsprechen, welcher auf der Geraden im Unendlichen gelegen ist. Es entsprechen also den Punkten von φ'_n in P' die Punkte auf der unendlich entfernten Geraden in P. Die in dieser Weise gekennzeichnete Verwandtschaft von P und P' wird nunmehr analysirt. Es ergiebt sich: Jeder Geraden l der Ebene P entspricht in der Ebene P' eine Curve F'_n vom Grade n, welche in O einen $(n-1)$-fachen Punkt hat, und zwar osculirt jeder Zweig von F'_n in O einen Zweig

von φ'_n. Von der Curve F'_n sind unabhängig von der besonderen Lage der Geraden l 1) der $(n-1)$-fache Punkt O^{n-1} und 2) $2(n-1)$ einfache Punkte, welche zu je zwei auf den $(n-1)$ Zweigen von φ'_n unendlich nahe an O liegen; es hat also F'_n $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ feste Grundpunkte. Bestimmt man demnach zu zwei Punkten von l die entsprechenden in der Ebene P', so ist F'_n vollkommen bestimmt. Der unendlich entfernten Geraden in P' entspricht in der Ebene P eine Curve φ_n, welche mit φ'_n in Bezug auf O symmetrisch gelegen ist. Zieht man von O aus Parallele zu den n Asymptoten von φ'_n, so bilden diese n Geraden den Ort der sich selbst entsprechenden Punkte. Denkt man die Ebene P und P' horizontal und nimmt auf der Verticalen durch O einen Punkt Σ an, so giebt folgendes Theorem die Construction entsprechender Punkte: Der geometrische Ort der Punkte M', welche den Punkten M der Curve F_m entsprechen, ist die horizontale Projection des Schnitts zweier Kegel; der eine der Kegel hat Σ zur Spitze und φ'_n zur Leitcurve, der andere hat O zur Spitze und zur Leitcurve die Projection der Curve F_m auf eine horizontale Ebene, welche durch Σ gelegt ist.

Ist $n = 2$ und φ'_2 ein Kreis, so entsteht eine besondere Form der Verwandtschaft, welche für Fragen der Kinematik besondere Bedeutung gewinnt. Bewegt sich nämlich eine Ebene P in sich selbst, so beschreibt jeder Punkt M derselben eine Trajectorie; ihr Krümmungsmittelpunkt M' steht mit M in der oben gekennzeichneten Verwandtschaft. Denn je zwei entsprechende Punkte liegen mit dem augenblicklichen Drehungscentrum O in einer Geraden und bestimmen auf dieser projectivische Punktreihen, für welche die beiden Doppelpunkte in O zusammenfallen; den Punkten der unendlich entfernten Geraden entspricht aber ein Kreis φ'_2. Der symmetrisch in Bezug auf O liegende Kreis ist alsdann der Wendekreis φ_2, und den Ort der sich selbst entsprechenden Punkte bilden die beiden imaginären Geraden, welche vom augenblicklichen Drehpunkt nach den beiden Kreispunkten im Unendlichen laufen. Vergleicht man die Krümmungsradien der Trajectorien, welche die Punkte einer durch O führen-

den Geraden beschreiben, so findet man zwei Maxima und zwei Minima; die Maxima entsprechen dem Punkte *M* im Unendlichen und dem Punkte auf dem Wendekreise φ_2, die Minima entsprechen dem Drehungscentrum *O* und dem Punkte *M* auf einem Kreise, welcher den Durchmesser des Wendekreises zum Radius und den dem Punkte *O* diametral gegenüberliegenden Punkt desselben zum Mittelpunkt hat. Dieser Kreis ist unter dem Namen Rollkreis (cercle de roulement) bekannt. Die Punkte einer beliebigen Geraden der Ebene *P* beschreiben Trajectorien, für welche die Krümmungsmittelpunkte auf einem Kegelschnitt gelegen sind. Dieser osculirt den Kreis φ'_2 im Drehungscentrum *O*. Diesen Kegelschnitt nennt der Verfasser den Kegelschnitt von Rival, der 1853 seine Beziehung zu einer Geraden der beweglichen Ebene zuerst erkannt hat. Der Verfasser giebt entsprechend den allgemeinen Betrachtungen für ihn die Construction. Die Beziehungen der Geraden der Ebene *P* zu ihren Kegelschnitten von Rival bilden den Gegenstand der weiteren Untersuchung. Einem System paralleler Geraden entspricht ein System von derartigen Kegelschnitten, ihre Mittelpunkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, und ihre Axen sind alle den Asymptoten dieser Hyperbel parallel. Mit der Richtung der Geraden ändert sich die Lage der gleichseitigen Hyperbel, Gesetze dafür werden aufgestellt, und Beziehungen zwischen den Geraden der Ebene und ihren Polen in Bezug auf die zugehörigen Rival'schen Kegelschnitte entwickelt. Schn.

J. B. Pomey. Enveloppes des côtés d'un carré invariable dont deux sommets décrivent deux droites rectangulaires. Nouv. Ann. (3) V. 520-530.

Das Quadrat *ABCD* gleite mit dem Punkte *A* in der x-Axe, mit dem Punkt *B* in der darauf senkrechten y-Axe. Errichtet man in *A* und *B* Lote zu den Axen, so ist ihr Schnittpunkt *E* der augenblickliche Drehpunkt für das Quadrat, die Fusspunkte der Lote von *E* aus auf die Seiten des Quadrats sind also die Punkte, in denen die Quadratseiten ihre Enveloppen berühren.

Von diesen Gesichtspunkten ausgehend entwickelt der Verfasser die Gleichungen der Enveloppen der Quadratseiten und studirt ihre Formen, auch eine Bestimmung der von den Enveloppen begrenzten Flächen wird hinzugefügt. Schn.

R. Godefroy. Construction des tangentes aux courbes planes et détermination du point où une droite mobile touche son enveloppe. C. R. CII. 604-606.

Ein veränderliches Segment einer Geraden bewege sich in der Ebene so, dass seine Endpunkte A und B zwei feste Curven beschreiben. Zieht man von einem Punkt aus Richtstrahlen, welche in Grösse und Richtung mit dem veränderlichen Segment übereinstimmen, so bestimmen die Endpunkte eine Curve R, und diese kann zur Kennzeichnung der Bewegung benutzt werden. Jeder Lage der Geraden entspricht ein Richtstrahl und eine Tangente von R in seinem Endpunkte. Parallel derselben führt durch den Punkt O, in welchem sich die Tangenten in A und B schneiden, eine Gerade; diese schneidet die bewegliche Gerade in einem Punkt, der dieselbe Entfernung von dem Mittelpunkt des Segments hat, wie der Punkt, in welchem die Gerade ihre Enveloppe berührt. Diese Beziehung erweist sich nach manchen Richtungen fruchtbar für die Construction von Tangenten an ebene Curven und für die Bestimmung des Punktes, in welchem eine bewegliche Gerade ihre Umhüllungscurve berührt. So wird unter anderem auf die Lösung des folgenden Problems hingewiesen: Es ist der Punkt der Enveloppe einer beweglichen Geraden zu finden, welche durch drei Curven in proportionale Abschnitte geteilt wird. Folgendes Theorem giebt die Lösung: Jeder Abschnitt der beweglichen Geraden, welcher zwischen zwei Curven enthalten ist, wird durch den Berührungspunkt der Enveloppe nach demselben Verhältnis geteilt, in welchem das Segment der Tangente an der dritten Curve durch ihren eigenen Berührungspunkt geteilt wird. Schn.

F. Roth. Ueber die Bahn eines freien Teilchens auf einer sich gleichmässig drehenden Scheibe. Exner Rep. XXII. 354-366.

Die behandelte Aufgabe lautet: „Eine Ebene drehe sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit um eine zu ihr senkrechte, ruhende Axe, während ein freies Teilchen, durch einen einmaligen Anstoss fortgetrieben, ohne Widerstand nur seiner Trägheit folgend über sie hingleitet. Welche Bahn beschreibt es in Beziehung zu der Ebene?“ Der Verfasser hat dieses Problem schon mehrfach behandelt (cf. F. d. M. XV. 1883. 817). In dem vorliegenden Aufsatz beschreibt er hauptsächlich einen Mechanismus, mit dessen Hülfe die Curve bequem gezeichnet werden kann, und bespricht die verschiedenen Gestalten der Trajectorien, einer Art verallgemeinerter Kreisevolventen, wie dieselben durch die Constanten der Aufgabe bedingt sind. Lp.

Kr. Birkeland. Antallet af fri Bevogelser i et leidet Stangsystem. Zeuthen Tidsskr. (5) IV. 174-176.

Bezeichnet man für ein Stangensystem die Anzahl der Winkelpunkte durch h, die Anzahl der geschlossenen Polygone durch p, und wird eine der Stangen festgehalten, so kann das System $h-p-2$ von einander unabhängige freie Bewegungen gestatten. Es ist dies die Verallgemeinerung einer von Sylvester gefundenen Formel. Gm.

A. Mannheim. Théorie géométrique de l'hyperboloïde articulé. C. R. CII. 253-256.

A. Mannheim. Sur le théorème d'Ivory et sur quelques théorèmes relatifs aux surfaces homofocales du second ordre. C. R. CII. 310-313.

A. Mannheim. Sur la polhodie et l'herpolhodie. C. R. CII. 353-356.

Ein gerades Prisma mit rechteckiger Basis habe zu Diago-

nalen in den Seitenflächen die Längen P, Q, R, S, welche ein windschiefes Vierseit bilden. Ein einschaliges Hyperboloid, welches zum Mittelpunkt den Mittelpunkt des Prismas, zu Scheiteln die Mittelpunkte der vier Seitenflächen und zur dritten Axe die Höhe des Prismas hat, enthält jenes windschiefe aus P, Q, R, S gebildete Vierseit, und umgekehrt bestimmt dieses jenes. Das gerade Prisma lässt sich in andere gerade Prismen mit rechteckiger Basis umgestalten, so dass die Diagonalen P, Q, R, S ihre Längen bewahren, und bei dieser Umgestaltung wandelt das dem Prisma zugeordnete Hyperboloid (H) seine Form. Denkt man die Strecken P, Q, R, S in ihren Endpunkten durch bewegliche Glieder verknüpft, so lässt sich in obigem Sinne die Umformung mechanisch ausführen. Die Erzeugenden G des Hyperboloids (H) gehen in Erzeugende der Hyperboloide über, welche aus der Umformung hervorgehen, und alle diese Hyperboloide sind homofocal. Die Punkte von H beschreiben dabei Trajectorien, welche normal gegen jene Hyperboloide verlaufen. Diese Ergebnisse, welche Herr Greenhill (1878) über das Hyperboloid (H) veröffentlicht hat, werden hier durch einfache kinematische Betrachtungen gewonnen, und im Anschluss an diese gelangt Herr Mannheim noch zu dem Resultat, welches bemerkt werden mag: Wenn man eine Gerade G so verschiebt, dass drei ihrer Punkte α, β, γ auf drei in o senkrecht auf einander stehenden Ebenen bleiben und die Ebene, welche durch o senkrecht zu G läuft und mit dieser fest verknüpft gedacht wird, bei der Verschiebung stets durch o geht, so vollzieht sich die Verrückung von G gerade so wie bei dem durch bewegliche Glieder gebildeten Hyperboloid (H).

Geht ein Punkt n bei der Deformation von (H) in den Punkt n_1 von (H_1) über, so sind n und n_1 correspondirende Punkte der beiden homofocalen Hyperboloide. Sind l und l_1 ein anderes Paar correspondirender Punkte, so folgert Herr Mannheim, dass das Segment ln_1 gleich dem Segment l_1n ist, und gewinnt damit das Theorem von Ivory. Zugleich erfolgt der Nachweis, dass, wenn auf den beiden homofocalen Hyperboloiden (H) und (H_1) zwei Punkte angenommen werden, die Summe der

Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkt *o* mit der Summe der Quadrate der Abstände der correspondirenden Punkte übereinstimmt. Es werden also hier diese Relationen, unabhängig von analytischen Formeln, auf rein geometrischem Wege gewonnen.

Es sei *m* ein Punkt des Hyperboloids (*H*), und die durch ihn bestimmten Erzeugenden seien *G* und *L*. Jede dieser Geraden bewegt sich bei der Deformation von (*H*) so, dass drei ihrer Punkte in den Hauptebenen verbleiben. Wenn aber eine Gerade derart geleitet wird, so bleibt *m* auf einem Ellipsoid, welches concentrisch und coaxial mit (*H*) ist. Es muss also die Trajectorie (*m*) zwei concentrischen coaxialen Ellipsoiden angehören, von denen das eine durch *G*, das andere durch *L* bedingt ist. Durch die Trajectorie (*m*) geht also eine Schar von solchen Ellipsoiden. Wählt man unter diesen das Ellipsoid (*E*) aus, welches die in *m* senkrecht zu *G* gerichtete Ebene (π) berührt, und denkt sich diese Ebene (π) starr mit *G* verbunden an der Bewegung teilnehmend, die *G* bei der Deformation von (*H*) erleidet, so bleibt diese Ebene Tangentialebene von (*E*). Aus der obigen Charakterisirung der Bewegung von *G* aber folgt, dass jene Ebene (π) stets eine mit *o* concentrische Kugel umhüllt, also ist die Trajectorie (*m*) als eine Polodie aufzufassen. Wird (π) fest gedacht und lässt man auf dieser Ebene das Ellipsoid (*E*) sich rollend bewegen, während sein Centrum fest bleibt, so beschreibt der Berührungspunkt von (*E*) und (π) die Herpolodie (σ); ihre Erzeugung aus anderen Gesichtspunkten bildet den Schluss der Betrachtung. Schn.

J. Tesar. Die Contourevolute axialer Schraubenflächen. Wien. Ber. XCIV. 181-196.

Durch die Axe einer windschiefen Schraubenfläche wird eine Ebene gelegt, und auf diese die Schraubenfläche orthogonal projicirt. Die constructive Bestimmung der Evolute der Contourcurve der Schraubenfläche bildet den Gegenstand vorliegender Arbeit. Die Lösung der gestellten Aufgabe wird durch kinematische Betrachtungen gewonnen. Im Zusammenhange damit

wird die Krümmung der betreffenden Curve beurteilt und ihre analytische Darstellung gegeben. Schn.

F. Siacci. Sulla rotazione di un corpo intorno a un punto. Torino Atti XXI. 261-265.

D. Padelletti. Sulle superficie che rotolano uno sull'altra nel moto di rotazione di un corpo intorno a un punto. Nap. Rend. XXV. 242-244.

Die Bewegung eines Körpers, von welchem ein Punkt fest ist, kann dadurch beschrieben werden, dass man eine erste mit dem Körper fest verbundene Oberfläche und eine zweite im Raume feste Oberfläche angiebt, welche beide Flächen während der Drehung des Körpers sich stets in einem Punkte berühren, so dass also die erste Fläche sich auf der zweiten wälzt. Ausser den beiden Kegelflächen, welche die momentane Rotationsaxe im Körper und im Raume beschreibt, hat Poinsot entdeckt, dass das Trägheitsellipsoid auf einer festen, zur invariablen Ebene parallelen Ebene rollt. Hr. Siacci hat 1881 in dem Bande „Collectanea Mathematica in memoriam D. Chelini“ die Abhandlung veröffentlicht: L'iperboloide centrale nella rotazione dei corpi, in welcher er zeigte, dass ein Hyperboloid sich auf einem Umdrehungscylinder wälzt. Später hat Hr. Gebbia in Rom. Acc. L. Mem. (4) I. 324 in der Arbeit „Su due proprietà della rotazione dei corpi“ bewiesen, dass jede zum Trägheitsellipsoide homocyklische Fläche zweiter Ordnung sich auf einer festen Umdrehungsfläche zweiter Ordnung wälzt, welche ihren Mittelpunkt im festen Punkte hat und zur Axe die des resultirenden Kräftepaares der Bewegungsgrösse besitzt.

In der ersten der hier zu besprechenden Arbeiten giebt Hr. Siacci zwei Sätze, durch welche man zwei neue zu einander gehörige Flächen aus zwei schon bekannten finden kann. Ein starrer Körper drehe sich also irgendwie um einen festen Punkt, und eine mit ihm fest verbundene Oberfläche werde mit einer anderen fest gegebenen in Berührung gehalten. 1) Transformirt

man die beiden Oberflächen, indem man jeden Radiusvector durch eine Function desselben ersetzt (welche jedoch nicht gleiche Längen für ungleiche Werte der Variabeln gebe, auch nicht ungleiche Längen für gleiche Werte der Variabeln), so bleibt die neue bewegliche Fläche beständig mit der neuen festen Fläche in Berührung, und wenn zwischen den ersten Flächen kein Gleiten stattfand, so tritt es auch nicht zwischen den letzten ein. 2) Transformirt man die beiden Oberflächen, indem man jedes vom festen Punkte auf eine beliebige Berührungsebene gefällte Lot durch einen Radiusvector ersetzt, dessen Länge dem Lote umgekehrt proportional ist, so bleibt die neue bewegliche Fläche beständig mit der neuen festen in Berührung, und wenn zwischen den ersten Flächen kein Rollen oder Gleiten stattfand, so besteht zwischen den letzteren kein Gleiten oder Rollen. Nach kurzer Erläuterung des zweiten Satzes macht der Verfasser von beiden Anwendung auf die Transformation des Poinsot'schen Centralellipsoids und der zugehörigen festen Ebene; dadurch gelangt er unter anderem zu den Sätzen, welche von Clebsch (Journ. f. Math. LVII. 75) und von Hrn. Gebbia l. c. aufgestellt sind.

Hr. Padelletti entwickelt durch sehr einfache geometrische Ueberlegungen folgende Sätze: „Wenn eine mit dem bewegten Systeme starr verbundene Fläche *F* gegeben ist, so giebt es unendlich viele feste Oberflächen, auf denen *F* rollt. Alle diese Oberflächen gehen durch eine und dieselbe Curve und sind längs dieser Curve derselben abwickelbaren Fläche einbeschrieben.“ Es giebt also immer eine feste abwickelbare Fläche, auf welcher *F* rollt. Ist *F* selbst abwickelbar, so schliesst man: „Bei der Bewegung eines starren Systems um einen Punkt giebt es unendlich viele Paare abwickelbarer Oberflächen, sodass die eine auf der anderen rollt.“ Einige Anwendungen schliessen die Note. Lp.

W. Hess. Ueber die Herpolodie. Klein Ann. XXVII. 465-470.

W. Hess. Nachtrag zu der Note über die Herpolodie. Klein Ann. XXVII. 568.

W. Hess. Sur l'herpolhodie. C. R CII. 1304-1307, 1366-1369.

Seitdem Herr de Sparre 1884 in den C R. den Satz veröffentlicht hat, dass die beim Rollen des Centralellipsoides auf der zugehörigen festen Ebene entstehende Herpolodie keine Wendepunkte besitzt, haben ausser diesem Geometer die Herren Mannheim, de St. Germain, Franke, Darboux, Resal sich mit dieser Aufgabe und mit den ihr verwandten beschäftigt und den betreffenden Satz als Satz von de Sparre bezeichnet.

Herr Hess hatte aber schon 1880 alle diese Untersuchungen vorweg erledigt in seiner Schrift: „Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene" (F. d. M. XII. 1880. 649), wie das vom Referenten sofort in dem Bericht über die Arbeit des Hrn. de Sparre (F. d. M. XVI. 1884. 768), sowie in den Berichten über die folgenden Arbeiten vom Jahre 1885 hervorgehoben ist; die bezüglichen Sätze sind in den F. d. M. daher „Hess'sche Sätze" genannt worden. In den obigen Noten, von denen die französischen im wesentlichen Uebersetzungen der deutschen sind, wahrt Hr. Hess seine Priorität unter wörtlicher Anführung der Stellen aus seiner Dissertation vom Jahre 1880.

Lp.

J. N. Franke. Ueber die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Krak. Denksch. XII. (Polnisch.)

Der Verfasser untersucht hier die die Drehung eines starren Körpers um einen Punkt (bei Momentankräften) charakterisirenden Curven, die Herpolodie und Polodie (nach Poinsot), giebt einen Beweis der Formel für den Krümmungsradius der Herpolodie, zeigt dass diese Curve weder Rückkehr- noch Inflexionspunkte hat, bestimmt die Krümmung der ersten und die geodätische Krümmung auf den Trägheitsellipsoiden der Polodie und beweist den folgenden Satz: „Der Pol der Osculationsebene der Polodie in Bezug auf das Trägheitsellipsoid liegt auf dem Vector der Herpolodie".

A. Thévenet. Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide. Paris. IX + 155 S. 4°.

J. Neuberg. Systèmes de tiges articulées. Trace mécanique des lignes. Paris.

W. Harvey. Kinematical theorems. Edinb. M. S. Proc. IV. 38-45.

Einige neue Beweise bekannter Theoreme. Gbs.

B. Biel. Ueber Rollbewegungen unter der Voraussetzung, dass der erzeugende Punkt noch einer besonderen Eigenbewegung unterliegt. Diss. Marburg. 28 S. 8°.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

M. Lévy. La statique graphique et ses applications aux constructions. 2me éd. Partie 1: Principes et applications de statique graphique pure. Paris. XXVII + 549 S.

Anzeige in Darboux Bull. X. 146-148. Die neue Auflage des 1874 zuerst erschienenen Werkes umfasst vier Bände. Der erste Band ist in vier Abschnitte geteilt: I. Vorbegriffe hinsichtlich des graphischen Rechnens, der Statik und der Elasticität der Körper. II. Principien der graphischen Statik. III. Anwendung der graphischen Statik auf die Kunst der Constructionen.

IV. Zusammensetzung der Kräfte im Raume und daraus fliessende reciproke Figuren. — Hieran schliessen sich vier Noten.

Lp.

L. Lecornu. Sur le problème de l'anamorphose. C. R. CII. 813-816.

Anknüpfend an eine Bemerkung in Culmann's „Graphischer Statik“, wonach es keine allgemeine Regel gebe für die Umwandlung einer Beziehung $\varphi(x, y, z) = 0$ zwischen drei Veränderlichen in die Form $a_z . x' + b_z . y' + c_z = 0$, wo a_z, b_z, c_z von z, x' von x und y' von y allein abhängen, — eine Umwandlung, die nach Lalanne's Arbeiten über graphische Tafeln und anamorphische Geometrie ein besonderes Interesse hat, — ermittelt der Verfasser zunächst das Kriterium dafür, ob die Umwandlung möglich ist, und zeigt dann, wie dieselbe in solchem Falle durch einfache Quadraturen auszuführen ist.

Sbt.

J. Tesař. Zur graphischen Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume. Prag. Ber. 259-272.

Der Aufsatz schliesst sich an die Abhandlung von Herrn Mohr im Civiling. von 1876 an: „Ueber die Zusammensetzung der Kräfte im Raume“; in derselben wurde die Culmann'sche Bestimmung der Richtung und Grösse der die Paare oder Momente darstellenden Axenstrecken verworfen, und die Construction wurde mit Hülfe von drei zu einander senkrechten Projectionsebenen durch ein Verfahren geleistet, welches von dem Culmann'schen im Princip und in der Durchführung verschieden ist. Indem Herr Tesar auf einen Teil der Kontrole verzichtet, lässt er eine Projectionsebene wegfallen, behält aber die drei Coordinatenaxen bei, in denen sich jene Ebenen schneiden und trägt den Einwendungen Mohr's gegen das Culmann'sche Verfahren Rechnung. Von den beiden Aufgaben in Bezug auf die Kräfte und die Drehungen genügt es, die Zusammensetzung der Kräfte im Raume eingehend zu behandeln, also die Aufgabe: Ein System von beliebigen Kräften soll reducirt werden auf eine Einzelkraft,

welche mit einer Geraden, der Centralaxe des Systems, zusammenfällt, und ein Moment, dessen Ebene zur Centralaxe senkrecht steht. (Der Inbegriff dieser Einzelkraft und dieses Moments führt nach R. St. Ball den Namen „Winder".). Zu diesem Zwecke werden die Lösungen zweier Aufgaben vorangestellt: 1) Gegeben ist ein Paar conjugirter Kräfte P_1 und P_2, dasselbe ist zu ersetzen durch ein anderes gleichwertiges Paar anderer conjugirter Kräfte P_3 und P_4, von denen die eine, z. B. P_3 in einer gegebenen Richtungslinie c wirkt. 2) Zwei Kräfte P_1 und P_2 sind zu einem Winder zusammenzusetzen. Hiernach folgt die Lösung der eigentlich gestellten Aufgabe: 3) Ein System von Kräften im Raume soll zu einem Winder zusammengesetzt werden. Die Behandlung des Problems wird an einem System von vier Kräften gezeigt, und ein Blick auf die Figur zur graphischen Lösung des Schlussproblems genügt, um die Methode des Verfassers in einem günstigen Lichte erscheinen zu lassen.

Lp.

Mohr. Eine Aufgabe der graphischen Statik. Civiling. (2) XXXII. 535-538.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, lautet folgendermassen:

„Für eine bestimmte Reihenfolge von Kräften P_1, P_2, P_3, ... ist ein Seilpolygon T_1, T_2, T_3, ... so zu construiren, dass bestimmte Seiten desselben durch drei gegebene Punkte A, B, C gehen".

F. K.

F. P. Ruffini. Della costruzione geometrica dell' asse centrale di un dato sistema di forze e di alcune proprietà delle rette che nel sistema dato sono caratteristiche di piani. Bologna Mem. (4) VI. 83-94.

Zwei zu einander rechtwinklige Projectionsebenen werden in üblicher Weise zur graphischen Darstellung eines Kräftesystems angenommen. Die Angriffspunkte aller Kräfte werden in der Richtung ihrer Wirkungslinien nach der Verticalebene

verschoben, und jede Kraft P wird in eine Componente p, welche in der Verticalebene liegt, und in eine zweite c zur Verticalebene senkrechte Componente zerlegt. Demnach werden die Kräfte des Systems durch zwei andere Systeme in der zur Zeichenebene gewählten Verticalebene dargestellt: a) die „Projectionskräfte" $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ durch ihre Wirkungslinien 1, 2, 3, ..., n und ihr zugehöriges Polygon 1 2 3 ... n; b) die „Perpendicularkräfte" durch ihre Projectionen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, nämlich die Punkte, in welchen sie die Zeichenebene treffen, und durch ihr Polygon 1 2 3 ... n, das sämtliche Ecken in einer und derselben Geraden hat. Mit Hülfe dieser Mittel erreicht der Verfasser sein Ziel, nämlich eine Methode zur Auffindung der Centralaxe eines gegebenen Kräftesystems durch Zeichnungen, die alle in einer Ebene ausgeführt werden (in dem S. 800 besprochenen Lehrbuche von Henneberg werden vier verschiedene Methoden für diese Aufgabe gelehrt). Aus der gewählten Darstellung des Kräftesystems werden dann mit Leichtigkeit die Haupteigenschaften der Centralaxe, der Brennpunkte und Charakteristiken für die verschiedenen Ebenen des Raumes, endlich auch die der conjugirten Geraden erschlossen. Lp.

H. G. ZEUTHEN. Om Momentsätningen: Statiken.
Zeuthen Tidsskr. (5) IV. 145-154.

Wenn ein System von Kräften in irgend ein anderes umgewandelt werden kann, so bleiben bekanntlich sowohl die Summe der Projectionen desselben auf eine beliebige Gerade als die Momentensumme in Bezug auf dieselbe Gerade unverändert. Auf diese beiden Sätze baut der Verfasser eine sehr hübsche Darstellung der Lehre von dem Gleichgewicht und der Verwandlung von Kräftesystemen im Raume mittels rein geometrischer Betrachtungen. Gm.

E. CESARO. Les lignes barycentriques. Nouv. Ann. (3) V. 511-520.

Rechnet man die Bogen s einer Curve (M) von einem be-

stimmten Anfangspunkt aus, so bildet der Ort der Schwerpunkte dieser Curvenbogen die barycentrische Linie (G). Ist (M) eine ebene Curve, und bedeuten x und y die Coordinaten des Schwerpunkts G, bezogen auf Tangente und Normale eines Punktes M von (M), so sind x und y in ihrer Beziehung zum Bogen s und dem davon abhängigen Krümmungsradius ϱ durch die Gleichungen dargestellt

$$\frac{d(sx)}{ds} = \frac{sy}{\varrho} - s; \qquad \frac{d(sy)}{ds} = -\frac{sx}{\varrho}.$$

Eine zweifache Unendlichkeit von Punkten (x, y) genügt diesen Relationen; sie setzen das barycentrische System zusammen, für welches (M) die Grundcurve ist. Der Natur dieses Systems ist ein Teil der Betrachtungen zugewendet.

Für den Ort der Schwerpunkte sind die Gleichungen unter der Bedingung zu integriren, dass $x = 0$, $y = 0$ für $s = 0$ ist. Die Frage führt auf die Integration der Gleichung

$$\varrho \frac{d(sz)}{ds} + isz + \varrho \cdot s = 0,$$

wo $z = x + iy$ und $i^2 + 1 = 0$ zu setzen ist. Mit ihrer Hülfe wird folgende Darstellung der Grössen x und y als Functionen von s gegeben. Bestimmt man die Hülfsgrössen Θ, ξ, η durch die Gleichungen:

$$\Theta = \int_0^s \frac{ds}{\varrho}; \quad -s\xi = \int_0^s s\cos\Theta\, ds; \quad -s\eta = \int_0^s s\sin\Theta\, ds,$$

so ist

$$x = \xi\cos\Theta + \eta\sin\Theta; \quad y = -\xi\sin\Theta + \eta\cos\Theta.$$

Denkt man aus diesen beiden Gleichungen s eliminirt, so erhält man die Gleichung der barycentrischen Linie in Bezug auf das beweglich zu denkende Axensystem. Sind s_0 und ϱ_0 Bogen und Krümmungsradius der absoluten Trajectorie des Schwerpunkts, so stellen sich diese beiden Grössen als Function von s in der Form dar

$$s_0 = \int_0^s (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s}; \quad \varrho_0 = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{sy}.$$

An der Klothoide $\varrho . s = a^2$ findet die allgemeine Theorie ihre besondere Erläuterung. Curven doppelter Krümmung werden zum Schluss in denselben Kreis der Betrachtungen gezogen.

Schn.

W. S. McCay, T. C. Simmons, A. H. Curtis. Solution of questions 8131 and 7865. Ed. Times XLIV. 46-47.

Construirt man über allen Seiten eines geschlossenen geradlinigen Vielecks Polygone, die unter sich ähnlich sind und in gleicher Weise angeordnet liegen, so fällt der Schwerpunkt ihrer Ecken mit dem Schwerpunkte der Ecken des gegebenen Vielecks zusammen.

Lp.

H. Rainy. Bifilar suspension treated by the method of contour lines. Edinb. M. S. Proc. IV. 47-51.

Eine neue Methode zur Theorie der bifilaren Aufhängung auf Grund der Eigenschaften von Contour-Linien. Die Lösung des vorliegenden Problems ist einfacher als bei Wiedemann, Galvanismus Bd. II, Teil I, S. 289.

Gbs. (Lp.)

H. Resal. Note sur la balance de Roberval. Nouv. Ann. (3) V. 161-163.

Kurze Theorie der Wage von Roberval mit Hülfe des Princips von der virtuellen Arbeit. (Auszug aus dem Cours de Mécanique de l'École Polytechnique.)

Lp.

N. Th. Michaelis. De invloed van trekstangen op het opzetten van draaibruggen. Amst. Versl. en Med. II. (3 217-228.

Mathematisch - technische Untersuchung des Einflusses der Zugstangen auf das Aufziehen von Drehbrücken. Die Berechnung bezieht sich auf die Spannungen in den Brückenbalken bei der Anwendung von Zugstangen, welche eine verminderte Durch-

biegung der Brücke bewirken. Das Ergebnis der Untersuchung lautet folgendermassen: Durch die Anwendung von Zugstangen kann bei grossen Brücken ein beträchtlicher Teil der Arbeit gespart werden; aber die Kraft, welche für das Aufziehen notwendig ist, wird deshalb nicht kleiner. Bei Brücken von kleinen Abmessungen gewährt die Anwendung von Zugstangen nicht den Nutzen, dass Verminderung der Durchbiegung eintritt. Bei Brücken von grossen Dimensionen werden sie lang und schwer, so dass die durch ihr eigenes Gewicht verursachte Durchbiegung ein sehr ernstliches Hindernis für ihre Anwendung wird. Bei jedem einzelnen vorkommenden Fall dürfen die Zugstangen nicht angebracht werden, bevor ihr Nutzen und Nachteil genau gegen einander abgewogen sind. G.

FORCHHEIMER. Zur Beurteilung einer Construction nach ihrer Einsenkung. Centralbl d. Bauverw. VI. 362-363.

H. ZIMMERMANN. Beurteilung einer Construction nach ihrer Einsenkung. Centralbl. d. Bauverw. VI. 373.

FORCHHEIMER. Zur Beurteilung einer Construction nach ihrer Einsenkung. Centralbl. d. Bauverw. VI. 446.

Herr Forchheimer beweist für Fachwerke folgende elegante Sätze.

Die Einsenkung eines Fachwerkes unter einer gegebenen Belastung ist dann am geringsten, wenn die Materialverteilung so geschieht, dass die Beanspruchung aller Stäbe dieselbe ist, vorausgesetzt dass eine solche Verteilung möglich. Ferner ergiebt sich, dass bei jeder anderen Verteilung der Materialmenge die Beanspruchung mindestens eines Teiles der Construction grösser ist, so dass also bei gleichmässiger Beanspruchung aller Teile die Meistbeanspruchung in dem Fachwerk ein Minimum ist.

Hat man endlich zwei verschiedene Fachwerke gleicher Materialmenge, bei welchen das Material so verteilt ist, dass alle Teile dieselbe Beanspruchung erfahren, so verhalten sich bei gleicher Last die Quadrate der Beanspruchungen wie die Einsenkungen.

Die Folgerungen, welche sich aus jenen Sätzen für die Beurteilung einer Construction ziehen lassen, liegen zu sehr auf der Hand, als dass hier näher auf dieselben eingegangen werden müsste. Herr Zimmermann äussert jedoch Bedenken gegen die praktische Brauchbarkeit jener Sätze, indem er darauf hinweist, dass für die Dehnung eines Stabes der volle Querschnitt, für die Spannung nur der Nutzquerschnitt in Betracht kommt. Die Bedenken gegen den Satz selbst erscheinen uns ungerechtfertigt.

F. K.

FORCHHEIMER. Die Gegenseitigkeit der Verschiebungen. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXVII. 109.

Eine in einem Knotenpunkt A eines Fachwerks angreifende Kraft P_a bewirkt eine Verschiebung sämtlicher Knotenpunkte, welche abhängig von Grösse und Richtung der Kraft P_a ist. Bei festgehaltener Kraftrichtung ist auch die Verschiebungsrichtung constant, und die Grösse der Verschiebung ist proportional mit P_a. Bei festgehaltener Kraftrichtung und variabler Kraftgrösse beschreibt der Endpunkt der durch die Kraft hervorgerufenen Verschiebung also eine gerade Linie. Da das von jeder Kraftrichtung gilt, so erkennt man unmittelbar, dass bei festgehaltener Grösse und veränderlicher Richtung der Kraft P_a der Endpunkt der Verschiebung eines Knotenpunktes B eine Ellipse beschreibt, welche hier die Verschiebungsellipse des Knotenpunktes B für Kräfte in A genannt wird. Es sei nun B_a die Projection der durch P_a bewirkten Verschiebung von B auf irgend eine in B angreifende Kraft P_b, und A_b habe dieselbe Bedeutung für P_a bezüglich der Kraft P_b, so ist nach einem bekannten, hier noch einmal bewiesenen Satze

$$P_a A_b = P_b B_a.$$

Aus dieser Gleichung, welche auch noch für zwei verschiedene in demselben Knotenpunkt angreifende Kräfte gilt, werden mehrere interessante Beziehungen für die Verschiebungsellipsen abgeleitet.

Zum Schluss werden die zunächst für ebene Fachwerke abgeleiteten Beziehungen auf den Fall nicht ebener Fachwerke

übertragen. An die Stelle der Verschiebungsellipsen treten hier natürlich Ellipsoide. F. K.

A. Schnirch. Bestimmung der Verschiebungsmaxima und Minima im Fachwerk und starren Träger. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXVII. 161-165.

Die Abhandlung schliesst sich unmittelbar an die soeben besprochene Abhandlung des Herrn Forchheimer an. Für die dort untersuchten Verschiebungsellipsen werden auf dem Wege der Rechnung die Hauptaxen der Richtung und Grösse nach bestimmt. F. K.

Th. Landsberg. Beitrag zur Theorie des Fachwerks. Hannöv. Zeitschr. XXXII. 195-202.

In einem früheren Aufsatze (Hannöv. Zeitschr. XXXI. 361, F. d. M. XVII. 1885. 973) hatte der Herr Verfasser eine graphische Bestimmung der in den Stabenden durch feste Knotenpunktsverbindungen hervorgerufenen Biegungsmomente durchgeführt. Dieselbe ist jedoch, wie jetzt ausgeführt wird, mit zwei Mängeln behaftet. Einmal war angenommen, dass die Auflager-Knotenpunkte mittels reibungsloser Gelenke gebildet seien, und zweitens wurde nur der Einfluss der verticalen Verschiebung der Knotenpunkte berücksichtigt, dagegen der in der That geringere Einfluss der horizontalen Verschiebung vernachlässigt. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie das in der citirten Schrift angegebene Verfahren zu modificiren ist, wenn am Auflager sich feste Knotenpunktsverbindungen finden, und wenn der Horizontalverschiebung der Knotenpunkte Rechnung getragen wird.

F. K.

Fleck. Die Beanspruchung von Fachwerksträgern durch wagerechte Kräfte in der Trägerebene. Centralbl. d. Bauverw. VI. 502-504.

Die Aufgabe ist durch den Titel hinreichend gekennzeichnet. Bei der Lösung derselben kommen die gebräuchlichen Methoden

zur Anwendung; wesentliche neue Resultate in Bezug auf die Theorie des Fachwerks werden nicht gewonnen. F. K.

O. STAUDE. Ueber Verallgemeinerungen des Graves'schen Theorems in der analytischen Mechanik. Leipz. Ber. 199-206.

Das Graves'sche Theorem bezüglich des um eine erste innere Ellipse geschlungenen Fadens ohne Ende kann man mechanisch so deuten, dass der im Punkte P der äusseren confocalen Ellipse gespannte Faden eine Gleichgewichtsfigur desselben für den Fall darstellt, dass er homogen ist und sonst von keinerlei Kräften beeinflusst wird. Indem der Verfasser nun die von Möbius zuerst ausgeführten Analogien zwischen der Gleichgewichtsfigur eines Fadens und der Bahn eines bewegten Punktes benutzt, bezieht er das in Rede stehende Theorem auf die Bewegung eines materiellen Punktes und erhält den Satz, dass die Umlaufszeit für einen gleichförmig bewegten Punkt auf dem durch den Faden angezeigten Weg constant ist. Bekanntlich beschreibt aber ein beweglicher Punkt unter Einwirkung einer Centralkraft $-g^2r$ eine Ellipse mit dem anziehenden Punkt als Centrum. Dadurch dass der Verfasser zwei confocale Ellipsen mit zwei Bahnellipsen, welche in dem Ringe zwischen beiden verlaufen, zur Berührung bringt, erhält er einen ähnlichen Satz über Constanz der Umlaufszeit für eine aus Ellipsenbogen zusammengesetzte geschlossene Bahn. Dieser Satz wird auf die Gleichgewichtsfigur eines die vorige Bahn umspannenden Fadens umgedeutet, welcher in jedem Punkte eine passende Dichte hat und von demselben Centrum nach dem nämlichen Gesetze angezogen wird. Die vom Verfasser gelehrte Fadenconstruction des Ellipsoides (Klein Ann. XX. 147-185, F. d. M. XIV. 1882. 686) gestattet endlich eine Ausdehnung dieser Sätze auf den Raum. Uebrigens teilt Herr Staude nur die Sätze, nicht aber ihre Beweise mit, über deren Gang einige Andeutungen gemacht werden; die ausführlichere Darstellung der Resultate wird ausdrücklich für eine andere Gelegenheit aufgespart. Lp.

F. August. Ueber Körperketten. Schlömilch Z. XXXI. 348-361.

Eine „Körperkette" besteht aus einer beliebigen Anzahl schwerer starrer Körper, von denen jeder folgende um einen Punkt des vorhergehenden drehbar ist. Diese Verallgemeinerung der Ketten- und Seil-Polygone führt zu interessanten Ergebnissen. Zunächst werden die Bedingungen des Gleichgewichtes für einen einzigen Körper untersucht, der in zwei Punkten A_1 und B_1 seiner Oberfläche an gewichtslosen Fäden aufgehängt wird. Danach bietet es keine Schwierigkeit, das Gleichgewicht eines Systems von n schweren starren Körpern mit den Gewichten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zu untersuchen, welche dadurch zusammenhängen, dass von einem Punkte B_k der Oberfläche des k^{ten} Körpers nach einem Punkte A_{k+1} des $(k+1)^{\text{ten}}$ Körpers ein gewichtsloser Faden führt. Specieller wird dann eine Körperkette betrachtet, welche aus n in mechanischem Sinne congruenten Gliedern besteht, d. h. Gliedern, welche gleiche Massen und gleiche relative Lage des Schwerpunktes und der Aufhängepunkte zu einander haben. Für $n = \infty$ erhält man hier die gewöhnliche Kettenlinie, und der Hr. Verfasser giebt einfache Modelle an, welche dieses Ergebnis auf hübsche Weise veranschaulichen. Theoretisch interessant ist dieser Fall deshalb, weil sich zeigt, dass das allgemeine Problem der Körperketten wesentlich mit dem speciellen Kettenproblem übereinstimmt. Ein weiterer Abschnitt ist der Construction eines, einem beliebigen System von Körpern entsprechenden Kettenpolygons gewidmet, einer Aufgabe, die eine übersichtliche graphische Darstellung der Lösung zulässt. Für eine aus vier Gliedern bestehende Kette und für den Fall einer körperlichen Kette aus acht im mechanischen Sinne congruenten Gliedern sind die Constructionen durchgeführt. Im letzten Abschnitte wird die stabile Gleichgewichtslage einer Körperkette noch dadurch bestimmt, dass untersucht wird, für welche Anordnung der in einem oder in beiden Endpunkten festen Kette der Schwerpunkt die tiefste Lage hat. Lp.

H. Resal. Sur la vrille et le pieu à vis. C. R. CII. 233-237.

H. Léauté. Sur le pieu à vis. C. R. CII. 746-749.

H. Resal. Remarque. Ibid.

Der zum Eindringen in loses Erdreich, wie Sand und Thon, dienende Bohrer besitzt eine konische Spitze; die Form der Leisten auf der letzteren ist die eines geraden Konoids, dessen gerade Leitlinie die Axe des Stieles ist und dessen krumme Leitlinie auf einem Umdrehungskegel um dieselbe Axe liegt. Um die Theorie des Gleichgewichts des Bohrers zu entwickeln, macht Hr. Resal im Hinblick auf die Schraubenlinie, welche sowohl eine geodätische Linie als auch eine Loxodromie vorstelle, die Annahmen: 1) Die konische Leitlinie ist eine geodätische Linie. 2) Die Linie ist eine Loxodromie. Für die erste Hypothese werden nach des Verfassers Angabe die Rechnungen sehr complicirt, ausserdem weicht die Form von der in der Praxis üblichen bedeutend ab. Die der zweiten Hypothese entsprechenden Bedingungen für das Gleichgewicht werden dagegen nach Entwickelung der allgemeinen Formeln mitgeteilt und auf die Gestalt des (1865 für Hindostan construirten) Bohrers von Gouin angewandt.

Hr. Léauté findet, dass die beiden von Hrn. Resal angenommenen Formen praktisch einen Nachteil mit sich bringen. Da die Abstände der Punkte, in denen die betreffenden Curven dieselbe Erzeugende des Kegels schneiden, nicht constant sind, so hat die Schraube eine veränderliche Ganghöhe; beim Eindringen in den Boden kann nicht jede Windung in die vorangehende eingreifen, das Einführen wird also eine Zerbröckelung des Bodens hervorrufen. Daher schlägt Hr. Léauté als dritte Form ein gerades Konoid von constanter Ganghöhe vor, d. h. eine Schraubenfläche, und giebt in genauem Anschluss an die Arbeit des Hrn. Resal die bezüglichen Rechnungen. Lp.

H. G. Zeuthen. Om den mathematiske Behandling af Gnidrimgsmodstanden. Zeuthen Tidskr. (5) IV. 168-174.

Wenn ein Körper oder ein System von Körpern sich nicht bewegen kann, ohne dass Gleitung stattfindet in allen Punkten, wo Rücksicht auf die Reibung genommen werden muss, wird man die Grenzstellungen des Gleichgewichts bestimmen können,

indem man den factischen Reibungswiderständen ihre grössten Werte beilegt. Der Beweis dieses allgemeinen Satzes und dessen Anwendung auf specielle Beispiele bildet den Gegenstand dieses Aufsatzes. Gm.

A. Lodge. New geometrical representation of moments and products of inertia in a plane section; and also of the relations between stresses and strains in two dimensions. Phil. Mag. (5) XXII. 453-458.

A. Lodge. Diagrammatic representation of moments of inertia in a plane area. Brit. Ass. Rep. 543-544.

Zwei Methoden zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Trägheitsmomenten und Producten um Paare von rechtwinkligen Axen durch einen Punkt vermittelst eines Kreises werden angegeben ohne die Notwendigkeit, die Trägheitsellipse zu zeichnen. Die Constructionen werden auf die graphische Darstellung von Deformationen (stresses and strains) ausgedehnt.
Gbs. (Lp.)

E. Pascal. Relazioni fra le ellissi centrali d'inerzia delle aree, ed i baricentri dei volumi generati da queste. Nap. Rend. XXV. 239-242.

E. Pascal. Teoremi baricentrici. Nap. Rend. XXV. 259-263.

Beide Noten schliessen sich an Arbeiten von Herrn Jung an, nämlich: „Alcuni teoremi baricentrici“, „Osservazioni ed aggiunte alla nota Alcuni t. b.“ (Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 499-506, 646-653, F. d. M. XIV. 1882. 737), endlich „Nuovi teoremi a complemento della regola di Guldin e proprietà della spirale $r\theta = a \operatorname{sen} \theta$“ (Rom. Acc. L. (3) VII. 97-100, F. d. M. XV. 1883. 228). Die Sätze des Herrn Jung betrafen eine Beziehung zwischen dem Schwerpunkte eines schief abgeschnittenen Cylinders und den Centren zweiten Grades seiner Schnitte, sowie eine Beziehung zwischen den Schwerpunkten der Umdrehungskörper und den Centren zweiten Grades der erzeugenden Flächen

in Bezug auf die Rotationsaxe. Herr Pascal gelangt auf einem anderen Wege dazu, jene Relationen auf beliebige Körper in Bezug auf gewisse ihrer ebenen Schnitte auszudehnen, und zieht aus einem Theoreme, welches derartige Beziehungen ausdrückt, verschiedene Folgerungen. Dieses Theorem lautet: „Wenn ein Körper durch Ebenen geschnitten wird, welche einen Cylinder umhüllen, so ist der Schwerpunkt des Körpers der Schwerpunkt der Curve, welche vom Centrum zweiten Grades der Fläche des Schnittes in Bezug auf die Erzeugenden des Cylinders beschrieben wird, wenn dieser Curve eine Dichtigkeit gegeben wird, die dem Producte aus der Fläche des Schnittes in die Entfernung seines Schwerpunktes von den Erzeugenden des Cylinders proportional ist.“ Danach stellt der Verfasser die Formeln auf, welche die von dem Centrum zweiten Grades des erwähnten Schnittes des Körpers beschriebene Curve auffinden lassen (in welche Formeln die Elemente der Centralellipse der Trägheit eingehen), und zieht aus ihnen verschiedene Schlüsse betreffs des Schwerpunktes des Körpers. Zuletzt betrachtet der Verfasser in der ersten Note einige specielle Körper, unter denen die Umdrehungskörper einen besonderen Fall bilden.

In der zweiten Note werden einige Gedanken weiter entwickelt, welche in der ersten nur angedeutet werden konnten. Insbesondere wird der Schwerpunkt eines von einer gewissen Fläche erzeugten Körpers gesucht unter der Voraussetzung, dass man den Schwerpunkt eines Körpers mit einer anderen erzeugenden Fläche oder mit einer erzeugenden Fläche kennt, welche sich in einer von derjenigen der ersten Fläche verschiedenen Art deformirt. Die Anwendung der in dieser Note entwickelten Principien führt zur Lösung einer neuen Aufgabe, zur Verallgemeinerung einiger Formeln und insbesondere zu einem Theoreme des Herrn Jung über die Anwendung der schon vielfach benutzten Spirale $r\theta = a \sin\theta$ bei der Bestimmung von Schwerpunkten. Lp.

R. Hoppe. Analytisch specifische Grössen des Vierecks.
Hoppe Arch. (2) IV. 224.

Für den Schwerpunkt der gleich belasteten Ecken als Anfangspunkt der Coordinaten wird die Bedingung dafür gegeben, dass alle Trägheitsmomente für Axen, die durch den Schwerpunkt gehen, gleich sind. Lp.

V. Fiebich. Der graphische Calcul angewendet auf Erdtransporte. Mitt. üb. Art. u. Genie. XVII. Not. 209-222.

Der Aufsatz ist die Bearbeitung einer Abhandlung über dasselbe Thema von Herrn A. Chiarle in der Rivista d'artiglieria e genio vom Jahre 1885. Die Methode, welche auf Culmann's „Graphische Statik" zurückgeht, ist zuerst für Erdbewegungen vom baierischen Sections-Ingenieur Bruckner bei Bauarbeiten angewandt worden. Lp.

Chr. Nehls. Ueber graphische Rectificationen von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Hamburg. Paul Jenichen. (37 S. Roy. 8, 2 Tafeln 4).

Besprechung von Herrn L. Kiepert ist in Hannöv. Zeitschrift. XXXII, 171-172 zu finden. F. K.

E. A. Brauer. Berechnung verjüngter Förderseile und deren Spiralkörbe. Z. dtsch. Ing. XXX. 1102-1107.

Wenn eine Last aus einer grossen Tiefe durch ein Seil emporgewunden wird, was z. B. im Bergbau häufig der Fall ist, so gewinnt namentlich in den oberen Schichten das Eigengewicht an Einfluss. Man bedient sich daher zu dem bezeichneten Zwecke mit Vorteil solcher Seile, deren Querschnitt sich stufenweise ändert, und zwar derart, dass das Gewicht pro Längeneinheit und damit die Tragfähigkeit von oben nach unten abnimmt. Die Aenderung muss derart geschehen, dass an den Aenderungsstellen die Beanspruchung denselben zulässigen Wert hat. Hieraus leitet der Verfasser eine Formel für die Länge der einzelnen Stufen ab. Es folgt dann die Berechnung der Spiralkörbe, d. h.

desjenigen Rotationskörpers, auf welchen das Seil bei der Aufwärtsbeförderung der Lasten gewunden wird, während ein anderes Seil sich von demselben abwickelt. Derselbe besteht aus leicht einzusehenden Gründen aus zwei Teilen, die in Bezug auf eine zur Axe senkrechte Ebene symmetrisch sind. Die Bestimmung des kleinsten Radius erfolgt auf Grund der Forderung, dass die durch die Biegung über die Welle entstandene Spannung der einzelnen Drähte, aus welchen das Seil zusammengewunden ist, einen zulässigen Wert nicht überschreitet. Für die weitere Berechnung wird von der Forderung ausgegangen, dass die Summe der Drehungsmomente der Belastung für jede Stellung der beiden Seile constant sei. Ein Zahlenbeispiel macht den Schluss. F. K.

VON PUSTAU. Bestimmung von Futtermauerstärken. Dtsche Bauztg. 445-448, 461-462.

Auf Grund bekannter Forderungen und gewisser Annahmen über Grösse und Richtung des Erddrucks wird die erforderliche Breite für verschiedene Formen des Futtermauerprofiles bestimmt. Die Arbeit ist also im wesentlichen eine Anwendung allgemeiner Regeln auf concrete Fälle. Die Werte, welche sich aus den gewonnenen Resultaten für bestimmte Zahlen ergeben, sind in Tabellen zusammengestellt. F. K.

L. Ueber Querschnittsbestimmung bei Futtermauern. Wochenbl. f. Bauk. VIII. 331-332.

Es wird eine einfache geometrische Construction angegeben, vermittels deren man Profile von Futtermauern erhält, welche nur wenig von den durch die Herren Schwedler und Müller-Breslau abgeleiteten Profilen abweichen. F. K.

B. Hydrostatik.

L. Matthiessen. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. C. R. CII. 857-858.

H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. C. R. CII. 970-972.

Herr Matthiessen nimmt durch Hinweis auf frühere Schriften über Gleichgewichtsfiguren rotirender Flüssigkeiten in Bezug auf die Entdeckung ringförmiger Gleichgewichtsfiguren, welche Herr Poincaré den Engländern Thomson und Tait zugeschrieben, die Priorität für sich in Anspruch. Gleichzeitig weist Herr Matthiessen darauf hin, dass er auch die von Herrn Poincaré angegebenen Deformationen ringförmiger und ellipsoidischer Figuren in seinen Schriften behandelt habe. Herr Poincaré giebt den ersten Punkt zu, bemerkt jedoch zu dem zweiten, dass die von Herrn Matthiessen angewendeten Methoden nur eine beschränkte Näherung erlaubten und nicht in allen Punkten zu richtigen Resultaten führten. Uebrigens seien Herrn Matthiessen nicht alle Gleichgewichtsfiguren bekannt, welche Herr Poincaré in seiner Abhandlung in den Acta Math. VII. (F. d. M. XVII. 1885. 864-871) entwickelt habe; eben so fehlten Stabilitätsuntersuchungen, auf welche in der eben genannten Abhandlung ein besonderes Gewicht gelegt sei. F. K.

G. H. Darwin. On Jacobi's figure of equilibrium for a rotating mass of fluid. Lond. R. S. Proc. XLI. 319-336.

Zweck ist die Erzielung von Zahlenwerten für die Axen einer Reihe von Gleichgewichts-Ellipsoiden. Setzt man $b = a\cos\beta$, $c = a\cos\gamma$, $a^3 = abc$, so ist der kleinste Wert von γ, für den ein Gleichgewichts-Ellipsoid besteht, $\gamma = 54°21'27''$, und die Resultate werden in einer Tabelle gegeben „Lösungen von Jacobi's Problemen“ [illegible] d. i. dieselbe giebt für den vorgenannten Minimal-W[illegible] [illegible] für die Werte $\gamma = 55°, 57°, 60°$ und [illegible] in Intervallen [illegible] 5° bis $\gamma = 90°$ die Werte von α, β,

a/a, b/a, c/a, die Excentricitäten der Hauptschnitte, die Winkelgeschwindigkeit, das Momenten-Moment, endlich die kinetische, innere und gesamte Energie. Figuren zeigen die drei Hauptschnitte für die Werte $\gamma = 60^\circ$ und $\gamma = 75^\circ$. Cly. (Lp.)

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

G. KOENIGS. Sur les intégrales algébriques des problèmes de la dynamique. C. R. CIII. 460-463.

Existirt das Integral $f(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$ der lebendigen Kraft, so drückt die Gleichung $(f, \Phi) = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, dass $\Phi(q, p)$ ein Integral ist. Existirt das Integral der lebendigen Kraft nicht, so giebt es eine Function $f(t, q, p)$, welche die Zeit t enthält, so dass $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (f, \Phi) = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, dass $\Phi(t, q, p)$ ein Integral ist. Nun nehme man an, dass die Function f in dem einen oder anderen Falle rational von einer der Grössen $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ abhänge; dieselbe sei ω. Dann besteht der Satz: „Wenn ein in Bezug auf ω algebraisches und irrationales Integral Φ existirt, so kann man Φ immer mit Hülfe einer endlichen Anzahl nicht nur algebraischer, sondern auch rationaler Integrale in Bezug auf ω ausdrücken." Lp.

G. SABININE. Sur le minimum d'une intégrale. Brioschi Ann. (2) XIV. 13-20.

Die Arbeit schliesst sich an zwei andere desselben Verfassers an: „Développements analytiques, pour servir à com-

pléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples" (Darboux Bull. (2) II. 100-123, F. d. M. X. 1878. 270), und: „Sur le principe de la moindre action" (Brioschi Ann. (2) XII. 237-261, F. d. M. XVI. 1884. 796).

Es sei Π die Kräftefunction für ein System materieller Punkte, oder (wofür die Untersuchung bloss durchgeführt ist) für den Fall eines freien Körpers von der Masse Eins. Die Kräftefunction enthält als solche nur die Coordinaten des Körpers (Punktes) x, y, z, nicht aber die Zeit t explicit. Das betrachtete Integral ist

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt,$$

worin t_0 und t_1 die Werte von t sind, welche zwei gegebenen Lagen des Körpers entsprechen. Ist nun T die halbe lebendige Kraft, also:

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\},$$

so ist $\Pi - T = h$ (h constant) die Gleichung der lebendigen Kraft, welche als Bedingungsgleichung angesehen werden kann. Somit lautet das behandelte Problem: Unter allen Functionen x, y, z von t, welche der Bedingungsgleichung $\Pi - T = h$ genügen, worin die Constante h denselben Wert behält, diejenigen zu finden, welche für alle Werte von t, welche zwischen t_0 und t_1 liegen, das Integral V zu einem Minimum machen." Die Untersuchung der unbekannten Functionen x, y, z, welche den Bedingungen der gestellten Aufgabe genügen, führt zu den Bewegungsgleichungen. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen mit Hülfe der Lösung der Aufgabe bildet den Gegenstand des ersten Paragraphen.

Im zweiten Paragraphen wird der folgende Satz bewiesen: „Unter der Einwirkung der gegebenen Kräfte, deren mit Π bezeichnete Kräftefunction von x, y, z die Zeit t nicht explicit enthält, bewege sich ein Körper von dem Zeitpunkte t_0, wo er vom gegebenen Punkte A aufbricht, bis zum Zeitpunkte t_1, wo er an einem anderen Punkte B anlangt, derart dass die Gleichungen

dieser Bewegung sind:

$$\frac{d\Pi}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d\Pi}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2};$$

dann geschehen innerhalb desselben Zeitintervalles die anderen neuen Bewegungen, deren jede eintritt, wenn man durch Einführung neuer Verbindungen die erste Bewegung unmöglich macht und den Körper unter Einwirkung derselben Kräfte einer Bahncurve zu folgen nötigt, deren Coordinaten $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ sind, wo Δ das Zeichen der Variationen im allgemeinen ist, um von A nach B überzugehen; dabei lässt man die Gleichung der lebendigen Kraft bestehen und hält den Wert der Constanten fest, welche die Differenz $\Pi - T$ ausdrückt, wo T die halbe lebendige Kraft des Körpers ist." Mit Hülfe dieses Satzes werden die folgenden beiden Theoreme bewiesen: 1) „Die Bedingungen, welche das Princip der kleinsten Wirkung bestimmen, sind derartig, dass daraus die Gleichheit der auf seine Grenzen bezüglichen Variationen der Zeit folgt." 2) „Bei der Bewegung eines Körpers, der von Kräften beeinflusst ist, deren mit Π bezeichnete Kräftefunction von x, y, z die Zeit t nicht explicit enthält, hat das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$ ein Minimum, vorausgesetzt dass man die beiden Lagen des Körpers, denen die Grenzen t_0 und t_1 der Zeit entsprechen, als gegeben betrachtet, und dass die Gleichung $\Delta\Pi = \Delta T$ stattfindet, wo T die halbe lebendige Kraft des Körpers und Δ das Zeichen der Variationen im allgemeinen ist."

Im dritten Paragraphen zeigt der Verfasser, dass die zweite Variation des Integrals, welches ein Minimum haben soll, immer positiv ist, wenigstens so lange das Zeitintervall, auf welches sich das Integral bezieht, unterhalb einer gewissen Grenze bleibt.

Die Beweismethode ist im wesentlichen diejenige, welche der Verfasser in den beiden eingangs citirten Aufsätzen entwickelt hat; doch meint er einen Beweis (S. 119 der ersten, S. 247-249 der zweiten Arbeit) jetzt auf einfachere und directere Weise geführt zu haben. Wie Lagrange in der Mécanique ana-

lytique für das Princip der kleinsten Wirkung den Namen „Princip der kleinsten lebendigen Kraft“ vorschlägt, so möchte der Verfasser das zweite oben angeführte Theorem das „Princip der kleinsten Intensität der Kräfte“ nennen. Lp.

G. Fouret. Sur une généralisation du théorème de Koenig, concernant la force vive d'un système matériel. S. M. F. Bull. XIV. 142-146.

Durch die Sätze angeregt, welche Herr Gilbert C. R. CI. (F. d. M. XVII. 1885. 884) veröffentlicht hatte, teilt Herr Fouret im Anschluss an eine frühere Note in S. M. F. Bull. XI. 53 (F. d. M. XV. 1883. 788) folgenden allgemeinen Satz nebst dem zugehörigen Beweise mit: „Wenn ein aus beliebig vielen Punkten von beliebigen zugehörigen Massen bestehendes System eine Verrückung erfährt, indem es dabei eine beliebige Deformation erleidet oder auch nicht, so ist die Summe der Producte aus der Masse jedes Punktes in das Quadrat seiner Verrückung gleich dem Producte der gesamten Masse des Systems in das Quadrat der Projection der Verrückung des Schwerpunktes auf eine beliebig gewählte Richtung plus der Summe der Producte der Massen der verschiedenen Punkte in die Quadrate der Verrückungen, denen man sie unterwerfen muss, um sie in ihre Endlage zu bringen, nachdem man an ihnen in der schon gewählten Richtung eine gemeinsame Translation vollzogen hat, welche gleich der Projection der Verrückung des Schwerpunktes auf diese Richtung ist“. Lp.

A. Voss. Ueber ein Theorem der analytischen Mechanik. Klein Ann. XXVII. 569-574.

Das betreffende Theorem lautet: Die sechs Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers bleiben in unveränderter Form auch für ein beliebiges System materieller Punkte bestehen. Ohne in dieser bestimmten Form ausgesprochen und ohne daher beachtet zu sein, findet sich der

Satz in den Lagrange'schen Fragmenten zur Bertrand'schen Ausgabe der Mécanique analytique, in einer Arbeit von Liouville (Liouville J. (2) III. 1858) und in einer Abhandlung von Frahm in den Math. Ann. VIII: „Ueber gewisse Differentialgleichungen". (1875). Wegen des analytischen Interesses, das sich an ihn knüpft, legt der Verfasser ihn in der Form dar, dass die Gleichungen, welche Kirchhoff in seinen Vorlesungen über Mathematische Physik (S. 57-62) mit Hülfe des Hamilton'schen Principes entwickelt, als allgemein gültige vermöge einer ganz directen Transformation der Lagrange'schen Gleichungen in ihrer ersten Form nachgewiesen werden. Dabei wird ein Punktsystem vorausgesetzt, das sich in einer ebenen Mannigfaltigkeit von n Dimensionen befindet, welche auf ein System rechtwinkliger Coordinatenaxen X_1, X_2, X_3, ..., X_n bezogen ist, um die allgemeine Form der Differentialgleichungen der Mechanik unabhängig von der Anzahl der Dimensionen zu kennen. Lp.

C. Formenti. Dinamica dei sistemi che si muovono conservandosi affini a sè stessi. Lomb. Rend. (2) XIX. 435-445.

In der Determinante $|t_i x_i y_i z_i|$ ($i = 1, 2, 3, 4$) bezeichne man den Coefficienten von t_i mit T_i, so bestehen bekanntlich die Identitäten:

$$(1)\qquad \begin{cases} T_1 x_1 + T_2 x_2 + T_3 x_3 + T_4 x_4 = 0, \\ T_1 y_1 + T_2 y_2 + T_3 y_3 + T_4 y_4 = 0, \\ T_1 z_1 + T_2 z_2 + T_3 z_3 + T_4 z_4 = 0. \end{cases}$$

Sind x_i, y_i, z_i die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes (i), so ist T_i das sechsfache Volumen desjenigen Tetraeders, dessen Ecken der Coordinaten-Anfang und die drei Punkte aus (1), (2), (3), (4) sind, unter denen (i) nicht vorkommt. Da nun bei affiner Veränderung eines Systems entsprechende Tetraeder proportionale Volumina behalten, so sagen jene drei Gleichungen aus, dass die vier Punkte (1), (2), (3), (4) mit dem festen Coordinatenanfange ein affin-veränderliches System bilden, ferner dass die Bewegung dreier Punkte, welche mit dem festen Punkte nicht in derselben Ebene liegen, die Bewegungen aller anderen bestimmen.

Aus den Gleichungen (1) und den Anfangs-Coordinaten

x_0, y_0, z_0 eines Systempunktes folgert der Verfasser sofort die Coordinaten x, y, z desselben Systempunktes zur Zeit t in der Form:

$$(2)\quad \begin{cases} x = \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \alpha_{13}z_0, \\ y = \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \alpha_{23}z_0, \\ z = \alpha_{31}x_0 + \alpha_{32}y_0 + \alpha_{33}z_0, \end{cases}$$

worin die α_{rs} Functionen der Zeit sind, und zwar die nämlichen für alle Systempunkte.

Mit Hülfe der Gleichungen (2) ergeben sich sodann die Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems, wenn man mit X_i, Y_i, Z_i die zu den Axen parallelen Componenten der den Punkt (i) angreifenden Kraft bezeichnet:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum Xx_0 = 0, & \sum Xy_0 = 0, & \sum Xz_0 = 0, \\ \sum Yx_0 = 0, & \sum Yy_0 = 0, & \sum Yz_0 = 0, \\ \sum Zx_0 = 0, & \sum Zy_0 = 0, & \sum Zz_0 = 0, \end{cases}$$

und hieraus nach dem d'Alembert'schen Principe die Bewegungsgleichungen, indem man in (4) X durch $m\frac{d^2x}{dt^2} - X$ etc. ersetzt. Das System (4) wird dann noch in ein anderes auf die Hauptträgheitsaxen bezogenes umgewandelt.

Im zweiten Teile der Arbeit wird dasjenige System einer genaueren Betrachtung unterzogen, in welchem ein durch vier Systempunkte als Ecken eines Tetraeders bestimmtes Tetraeder während der Bewegung ein constantes Volumen behält. Für ein solches sind die Functionen α_{rs} in (2) an die Bedingung gebunden: $|\alpha_{rs}| = 1$.

Als einzige Vorarbeit ähnlicher Tendenz citirt der Verfasser: Durrande, „Sur les applications des théories générales de la dynamique au mouvement d'un corps de forme variable". (C. R. LXXX. 877, F. d. M. VII. 1875. 578). Lp.

G. Lespiault. Démonstration élémentaire des lois de Newton en partant des lois de Kepler. Flammarion Rev. d'Astr. V. 412-415.

Ableitung ohne Hülfe der Differentialrechnung unter blosser Benutzung der einfachsten geometrischen Sätze über die Ellipse.

Lp.

H. THUREIN. Elementare Darstellung der Planetenbahnen durch Construction und Rechnung. Berlin. B. Gärtner. 34 S.

Der Verfasser geht darauf aus, mit elementaren Mitteln die Vorausbestimmung der Planetenstellungen zu lehren. Es ist dies schon öfter versucht worden, in besonders ausgedehnter Weise von Nell, dessen Arbeit Herrn Thurein entgangen zu sein scheint, doch zeichnet sich der vorliegende Versuch durch seine Einfachheit und compendiöse Form entschieden aus. Die mitgeteilten Diagramme und Tafeln ermöglichen eine rein graphische Lösung der Aufgabe, doch wird auch gezeigt, wie man mit den nächstliegenden trigonometrischen Hülfsmitteln die geocentrischen Coordinaten des Wandelsternes und mittels dieser die Auf- und Untergangszeit desselben zu ermitteln vermag. Die Rechnungsbeispiele lassen an übersichtlicher Anordnung nichts zu wünschen übrig. Von Interesse ist darunter eine Rückwärtsrechnung, durch welche der Termin einer von dem englischen Dichter Chaucer erwähnten Conjunction der Planeten Venus und Mars im Zeichen des Stieres auf das Jahr 1379 verlegt wird. Gr.

A. MUKHOPÂDHYÂY, T. GALLIERS, G. G. STORR. Solution of question 7916. Ed. Times XLV. 36-37.

Ein Komet bewege sich in einer Hyperbel, deren Halbaxe a, Excentricität e sei; dann ist sein Ort t Secunden nach dem Durchgange durch das Perihel aus den Gleichungen bestimmt:

$$t = \frac{P}{2\pi} a^{\frac{3}{2}} [e \operatorname{tg}\theta - \log \operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\theta)], \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2} V = \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta,$$

wo V die vom Perihel gerechnete wahre Anomalie, P gleich der Periode einer Erdumwälzung ist, während ihr mittlerer Abstand zur Einheit genommen ist. Lp.

D. J. KORTEWEG. Sur la stabilité des trajectoires planes périodiques. Néerl. Arch. XXI. 201-250.

Fortsetzung der Untersuchungen des Verfassers über die centrale Bewegung eines Punktes (Siehe F. d. M. XVI. 1884. 802). Jetzt wird mehr im einzelnen über die Stabilität der periodischen Bahnen gehandelt. Der Zusammenhang zwischen dieser

Stabilität in kreisförmigen Bahnen und der Eigenschaft spiralförmiger, einen asymptotischen Kreis zu besitzen, wird nachgewiesen. Jede nicht stabile periodische Bahn hat eine unendliche Anzahl solcher Spiralformen, welche „parasitische Trajectorien“ genannt werden. Hauptpunkt der Untersuchung ist der Satz, dass das Verhältnis $\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}} = k$ (worin u_n, u_{n+1}, u_{n+2} die Abweichung der n^{ten}, $(n+1)^{ten}$, $(n+2)^{ten}$ Periode in übereinstimmenden Punkten für jede gestörte Bahn bedeuten) für jede Bahn einen bestimmten constanten Wert besitzt.

Je nachdem diese Zahl k sich innerhalb oder ausserhalb der Grenzen $+2$ und -2 befindet, ist die Bahn stabil oder instabil. Wenn k gerade auf eine der beiden Grenzen fällt, entstehen drei andere Bahntypen von verschiedenem Grade von Allgemeinheit. Nachdem die allgemeine Differentialgleichung der gestörten Bewegung aufgestellt worden ist, werden die Eigenschaften der Bahnen mit conservativen Störungen untersucht. Darauf wird die Bestimmung einer periodischen Bahn gegeben, und die Anzahl der Brennpunkte der gestörten Bahnen festgelegt. Die Gleichung mit endlichen Differenzen wird aufgestellt und integrirt und der Typus der geometrisch instabilen Bahnen, der oben erwähnten „parasitischen Trajectorien“ untersucht. Darauf folgt die Besprechung des Typus stabiler Bahnen und des Einflusses störender periodischer Kräfte auf ihre Stabilität; der Typus der arithmetischen instabilen Bahnen und derer, welche stabil sind hinsichtlich conservativer Störungen, aber instabil hinsichtlich nicht conservativer Störungen; der centralen Trajectorien, darunter der kreisförmigen. Schliesslich wird nachgewiesen, wann die Bahn selbst stabil ist, der Ort des Punktes in der Bahn aber nicht stabil. G.

D. J. Korteweg. Ueber Stabilität periodischer ebener Bahnen. Wien Ber. XCIII. 995-1040.

Es wird angenommen, dass die Kräfte, unter deren Einwirkung der bewegliche Massenpunkt seine Bahn beschreibt, ein Potential besitzen. Periodische Bahnen werden vom Verfasser

stabil genannt, wenn das Verhältnis $\frac{u_n}{u_1}$, wo u_1 die sehr kleine maximale Abweichung während der ersten, u_n diese Abweichung während der n^{ten} Periode bezeichnet, nicht unbestimmt mit n wächst, sondern zwischen Grenzen eingeschlossen bleibt. Den Schlüssel zu den erhaltenen Resultaten bildet das merkwürdige Theorem, dass der Quotient $\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+1}} = \varkappa$ (u_n, u_{n+1}, u_{n+2} die Abweichungen einer willkürlich gewählten conservativ gestörten Bahn in übereinstimmenden Stellen der betreffenden Perioden) für jede Bahn einen bestimmten constanten Wert besitzt. Je nachdem diese Zahl $\varkappa$ innerhalb oder ausserhalb der Grenzen $+2$ und -2 liegt, ist die Bahn stabil oder instabil. Gerade wie der Verfasser in einer früheren Arbeit über Bahnen bei centralen Kräften (F. d. M. XVI. 1884. 802-4) Kreisspiralbahnen gefunden hatte, die nach innen und aussen jede instabile Kreisbahn begleiten, aber erst nach unendlicher Zeit mit ihr zusammenfallen, so zeigt es sich hier, dass jede instabile periodische Bahn eine unendliche Anzahl sich ihr asymptotisch anschmiegender Bahnen besitzt, denen der Namen „parasitische Bahnen“ beigelegt wird, und die sich zu zwei Bündeln vereinigen lassen. Im Ausnahmefalle, wo keine parasitischen Bahnen bestehen und doch Instabilität vorhanden ist, zeigt diese einen eigentümlichen abweichenden Charakter, und dann giebt es einen einzigen Bahnbündel, der in gewissem Sinne an die Stelle der beiden parasitischen Bahnbündel tritt.

Je nach der Grösse von $\varkappa$ unterscheidet der Verfasser verschiedene Typen der Bahnen, welche dann einzeln untersucht werden, nämlich:

1) Der geometrisch instabile Haupttypus (A), wenn $\varkappa > 2$ oder $\varkappa < -2$, besitzt zwei parasitische Bahnbündel.

2) Der stabile Haupttypus (B), wenn $2 > \varkappa > -2$, ist auch für nichtconservative Störungen stabil.

3) Der arithmetisch instabile Bahntypus (C), einer der drei Uebergangstypen für $\varkappa = 2$ oder $\varkappa = -2$. Die Reihe der Abweichungen im Typus (A) ist eine geometrische, hier ist sie eine

arithmetische. Die zu diesem Typus gehörigen Bahnen sind für conservative Störungen einer einzigen bestimmten Art stabil, für alle übrigen arithmetisch instabil. Zum Bahntypus (*C*) gehören im allgemeinen die centralen Bahnen.

4) Der für conservative Störungen stabile, für nichtconservative instabile Bahntypus (*D*).

5) Der für Störungen beider Arten stabile Uebergangstypus (*E*).

Nach Erörterung der Eigenschaften dieser fünf Typen werden die centralen Bahnen einer besonderen Prüfung unterzogen. Während diese Bahnen im allgemeinen zum Typus (*C*) gehören, können dieselben, falls gewisse Bedingungen erfüllt sind, zum Typus (*E*) übertreten. Diese Bedingungen sind aber gerade für die beiden wichtigsten Gesetze erfüllt, nämlich für die Kraftgesetze $f.r^{-2}$ und $f.r$, an denen daher die gefundenen Bedingungen geprüft werden. Ganz zuletzt werden noch die centralen Kreisbahnen untersucht, deren parasitische Bahnen vom Verfasser früher Kreisspiralbahnen genannt worden sind. (Vgl. den voranstehenden Bericht.) Lp.

O. Staude. Ueber periodische und bedingt periodische Bewegungen. Dorpat. Naturforscher-Ges. Ber. 155-157.

Einige Bemerkungen, deren weitere Ausführung in einer folgenden Publication in Aussicht gestellt wird, über die Gruppirung der Bewegungen, welche der Einteilung der Functionen in periodische und nicht periodische entspricht. Lp.

O. Liman. Die Bewegung zweier materiellen Punkte unter Zugrundelegung des Riemann'schen elektrodynamischen Gesetzes. Diss. Halle. 42 S. 4°.

F. Folie et E. Catalan. Rapports sur le Mémoire de M. Ch. Lagrange intitulé: „Théorèmes de Mécanique céleste, indépendants de la loi de l'attraction.“ Belg. Bull. (3) XII. 231-238.

J. DE TILLY et F. FOLIE. Rapports sur une réponse de M. Lagrange aux critiques d'un rapport de M. Catalan. Belg. Bull. (3) XII. 489-493.

CH. LAGRANGE. Réponse aux critiques du Rapport de M. Catalan. Belg. Bull. (3) XII. 527-539.

E. CATALAN. Extrait d'une lettre à M. de Tilly. Belg. Bull. (3) XIII. 4.

Es sei MT die Tangente an einer Bahnlinie doppelter Krümmung, P ein fester Punkt in der beweglichen Ebene PMT, so beschreibt M eine ebene Curve. Die Stellung der beweglichen Ebene wird in jedem Augenblicke durch den Winkel α bestimmt, den sie mit einer festen Ebene bildet, und durch den Winkel β ihrer Schnittgeraden mit dieser festen Ebene gegen eine feste Gerade innerhalb dieser letzteren. Der Verfasser wendet diese Art der Darstellung der Bewegung eines Punktes M auf das Problem der drei Körper an, indem er die Anziehung beliebig lässt. P fällt der Reihe nach mit jedem der drei Körper zusammen. Dadurch kommt er zu zahlreichen besonderen Ergebnissen, unter welchen Herr de Tilly die folgenden anführt: I. Die Bewegung der Schnittgeraden sowohl in der festen als auch in der beweglichen Ebene erfolgt immer in demselben Sinne (anders ausgedrückt, β wächst immer, oder nimmt immer ab); α dagegen erleidet abwechselnd Ab- und Zunahmen. Unter der Annahme des Newton'schen Anziehungsgesetzes findet der Verfasser bei Anwendung seiner Formeln auf die Aufgabe der Bewegung der Knoten des Mondes bekannte Resultate wieder auf. II. Unter allen Anziehungsgesetzen im umgekehrten Verhältnisse einer ganzen Potenz der Entfernung ist das Newton'sche das einzige, welches für uns die Umwälzung der Knoten unseres Trabanten merkbar machen kann. (Vgl. Schemmel, F. d. M. XVI. 1884. 820). Mn. (Lp.)

G. SCHOUTEN. No. 5 der prysvragen voor het jaar 1885 beantwoord. Nieuw Archief XIII. 11-57, 117-183.

Die Preisfrage, welche gelöst wird, lautet folgendermassen:

Auf einen Massenpunkt M, welcher sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zu der Geraden bewegt, die diesen Punkt mit einem festen Centrum O verbindet, wirken von O zwei Kräfte von der Form ar^{-m} und $br^{\pm n}$. Es wird eine vollständige Untersuchung der Bewegung verlangt, wenn m und n ganze positive Zahlen sind.

Die sehr ausführliche Auflösung ist in verschiedene Abschnitte geteilt, deren Inhalt wir hier in gedrängter Uebersicht folgen lassen.

Abschnitt I. Aufsuchung der verschiedenen Fälle, in denen die Lösung möglich ist. 17 Fälle werden nachgewiesen, in denen die vollständige Auflösung mittels elliptischer Functionen ausgeführt werden kann.

Abschnitt II. Die Kraft wird durch die Function $a+br^{-3}$ dargestellt. Das Ergebnis der Untersuchung lehrt, dass, wenn a positiv ist, der bewegende Punkt sich fortwährend vom Mittelpunkt mit stets zunehmender Geschwindigkeit in einer Bahn mit einer Asymptote entfernt, welche durch das Centrum geht, so lange im Anfang der Bewegung die Centripetalkraft grösser ist als die ganze bewegende Kraft; dass die Bewegung einfach kreisförmig wird, wenn beide Kräfte einander gleich sind. Ist aber die zweite grösser als die erste, dann wird der Punkt in einer spiralförmigen Bahn mit unendlich vielen Windungen nach dem Centrum gehen und dort nach endlicher Zeit mit unendlicher Geschwindigkeit ankommen.

Ist a negativ, so wird das letzte stattfinden, so lange die Centripetalkraft im Anfange der Bewegung nicht grösser ist als der veränderliche Teil der Kraft; im entgegengesetzten Falle wird die Bahn eine regelmässige Wellencurve sein, welche in einen Kreis übergehen kann. Ist die Kraft constant, so wird der Punkt sich in einer Bahn mit Asymptote vom Centrum entfernen, wenn sie abstossend wirkt; in einer regelmässigen Wellencurve aber, wenn sie anziehend ist.

Abschnitt III. Die Kraftfunction ist $a+br^{-2}$. Hier entstehen acht verschiedene Fälle, welche entwickelt werden. In keinem derselben kann der Punkt zum Centrum gelangen und

die Bahn kann in eine Spirale mit asymptotischem Aussenkreis übergehen.

Abschnitt IV. Die Kraftfunction ist $a + br$. Hier giebt es neun verschiedene Fälle. Die Bewegung richtet sich nach dem veränderlichen Teile der Function. Neue Bahnformen treten nicht auf.

Abschnitt V. Die Kraftfunction ist $ar^{-2} + br^{-5}$. Hier entstehen 17 besondere Fälle. Das Ergebnis der Rechnung kann folgendermassen zusammengefasst werden: Für $b < 0$ wird die Bahn entweder eine Spirale, welche mit einer endlichen Zahl von Windungen nach dem Centrum geht und in einem Fall einen asymptotischen inneren Kreis hat mit unendlich vielen Windungen, oder eine regelmässig wellenförmige Bahn mit dem Kreis als besonderem Falle, oder eine Bahn, die sich bis ins Unendliche erstreckt und von hyperbolischem Charakter ist, weil sie eine Asymptote besitzt, welche nicht durch das Centrum geht, aber auch parabolischen Charakter zeigen kann, da sie nicht immer eine Asymptote hat. Ist aber $b > 0$, so ist die Bahn entweder eine regelmässige Wellencurve mit einem Kreis als besonderem Fall, oder sie ist von hyperbolischem Charakter, im besonderen Falle von parabolischer Art. Der Punkt wird niemals in das Centrum gelangen.

Abschnitt VI. Die Kraftfunction ist $ar^{-2} + br^{-4}$. Hier entstehen 11 Fälle. Die Bewegung stimmt hinsichtlich der Form der Bahnen mit der durch die Wirkung der Kraft $ar^{-2} + br^{-5}$ erhaltenen überein. Die dort erhaltenen Ergebnisse finden auch hier ihre Anwendung.

Abschnitt VII. Die Kraftfunction ist $ar^{-2} + br^{-3}$; sie giebt 12 Fälle. Die Bahn ist entweder eine logarithmisch-spiralförmige Curve oder sie erstreckt sich bis ins Unendliche mit oder ohne Asymptote; in einigen Fällen kann sie betrachtet werden als eine gestörte Bewegung derjenigen, welche unter der Wirkung von ar^{-2} allein zu Stande kommt.

Abschnitt VIII. Die Kraftfunction ist $ar^{-2} + br$; sie giebt neun Fälle. Die Bahnen stimmen mit denen überein, welche in den vorigen Abschnitten behandelt wurden.

Die Abhandlung wird in einem folgenden Jahrgang der Zeitschrift fortgesetzt. G.

C. Neumann. Ausdehnung der Keppler'schen Gesetze auf den Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet. Leipzig Ber. 1-2.

Der Verfasser stellt z. B. folgenden Satz auf: Ist die Kräftefunction umgekehrt proportional mit tang ϑ, wo ϑ den sphärischen Abstand des Planeten von der Sonne bezeichnet, so wird der Planet eine sphärische Ellipse beschreiben, deren einer Brennpunkt in der Sonne liegt. N.

U. Dainelli. Sul movimento d'un punto pesante sopra rette inclinate nel vuoto e senza attrito. Bologna Rend. 1885-86. 50-57.

Angabe der Anfangsgeschwindigkeit, unter welcher die tautochrone Bewegung eines schweren Punktes längs der Vectorradien einer Pascal'schen Schneckenlinie (limaçon) mit verticaler Axe stattfindet. Es sei:

$$\varrho = d\cos\theta + a$$

die Gleichung der Schneckenlinie, k eine beliebige Constante. Geht ein schwerer Punkt von dem Pole mit der Anfangsgeschwindigkeit:

$$V_0 = k\varrho + \frac{a(g + k^2 d - k\sqrt{k^2 d^2 + 2dg})}{\sqrt{k^2 d^2 + 2dg} - kd}$$

aus, und bewegt er sich längs eines abwärts gerichteten, nach dem Curvenpunkte (ϱ, θ) gehenden Strahles, so gelangt er zu diesem Punkte nach der Zeit:

$$T = \frac{-kd + \sqrt{k^2 d^2 + 2dg}}{g},$$

deren Ausdruck, wie ersichtlich, von den Coordinaten ϱ, θ unabhängig ist. Analoge Formeln gelten für aufwärts gerichtete Strahlen.

Als ein besonderer Fall der vorstehenden Untersuchung

kann der bekannte Tautochronismus längs der vom höchsten Punkte ausgehenden Sehnen eines verticalen Kreises angesehen werden.

Sind zwei vertikale Kreise vorhanden, deren einer den anderen in dessen höchstem Punkte von aussen berührt, so wird jede durch den Berührungspunkt gehende Secante von einem schweren Punkte in der constanten Zeit:

$$T = \frac{-KD + \sqrt{K^2D^2 + 2gD}}{g}$$

durchlaufen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $V_0 = KR$ ist. Hier bedeutet R die Länge der Secante, D die Summe der Durchmesser der beiden Kreise, K eine beliebige constante Grösse. Die vom Verfasser für diesen Fall angegebenen Ausdrücke haben wir etwas modificirt, um ihnen eine in Bezug auf die beiden Kreise symmetrische Form zu geben. Vi.

U. Dainelli. Due casi di movimento tautocrono d'un punto nel vuoto sopra una curva levigata qualunque. Batt. G. XXIV. 364-370.

Damit ein im Punkte O endigender reibungsloser Bogen von beliebiger Länge α in einer constanten Zeit T von einem beweglichen Punkte durchlaufen werde, setze man den am Ende der Zeit t zurückgelegten Bogen s:

$$(1) \qquad s = f(\alpha, t) \,.\, \varphi(t).$$

Hierin sind f und φ beliebige Functionen von t, welche (für jeden reellen, endlichen und positiven Wert von α) mit ihren ersten und zweiten Ableitungen innerhalb des Intervalles $0 \dots T$ von t reell, endlich und continuirlich bleiben; T ist unabhängig von α und die kleinste positive Wurzel von $\varphi(t) = 0$, α ist identisch gleich $f(\alpha, 0) \,.\, \varphi(0)$, und endlich dürfen f und φ in dem genannten Intervalle nicht verschwinden. Die Geschwindigkeit V und die tangentiale beschleunigende Kraft p ergeben sich aus (1): $V = \frac{ds}{dt}$, $p = \frac{d^2s}{dt^2}$. Die beiden näher untersuchten

Fälle sind diejenigen, bei denen gesetzt ist:

$$\text{(I)}\qquad f(\alpha, t) = \frac{\alpha}{T} + \frac{(\alpha - V_0 T)t}{T^2}, \quad \varphi(t) = T - t;$$

$$\text{(II)}\qquad f(\alpha, t) = \alpha - Gt, \quad \varphi(t) = \cos kt.$$

Lp.

G. Fouret. Sur certains problèmes dans lesquels on considère, sur une courbe plane, des arcs de même origine parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. C. R. CIII. 1114-1116.

G. Fouret. Sur certains problèmes d'isochronisme. C. R. CIII. 1174-1176.

G. Fouret. Mémoire sur certains mouvements dans lesquels des arcs d'une même courbe plane comptés à partir d'une origine fixe sont parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. J. de l'Éc. Pol. Cah. LVI. 171-211.

Die beiden vom Verfasser behandelten Aufgaben lauten:

I. „Ein Massenpunkt, welcher in einer Ebene unter der Einwirkung einer Kraft steht, die von einem bestimmten Potential herrührt, bewegt sich mit gegebener Geschwindigkeit von einem festen Anfangspunkte O aus. Ein System ähnlicher und ähnlich liegender, durch O gehender Curven (C) zu finden, so dass der bewegliche Punkt vom Punkte O aus einen beliebigen Punkt der Ebene in derselben Zeit erreicht, wenn er eine der Curven oder wenn er die entsprechende Sehne durchläuft".

II. „Wenn in einer Ebene ein System von ähnlichen und ähnlich liegenden Curven (C) gegeben ist, die durch einen und denselben Punkt O, den gemeinschaftlichen Aehnlichkeitspunkt, gehen, eine von einem Potential herrührende Kraft zu finden, unter deren Einwirkung ein mit gegebener Geschwindigkeit vom Punkte O ausgehender Punkt einen beliebigen Bogen einer beliebigen von den Curven (C) von O aus in derselben Zeit durchläuft, die er zur Beschreibung der entsprechenden Sehne brauchen würde".

Die erste Aufgabe besitzt nur dann eine Lösung, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null ist und der Ausdruck für das Potential die Form hat:

$$(1)\qquad \psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\varphi^2(\theta),$$

wo r und θ Polarcoordinaten für O als Pol bezeichnen. Die Gleichung der gesuchten Curve (C) ist dann:

$$(2)\qquad r^2 = k^2\varphi(\theta)e^{-\int\frac{\varphi(\theta)}{\varphi'(\theta)}d\theta},$$

worin k einen willkürlichen Parameter bedeutet. Die zweite Aufgabe ist ebenfalls nur lösbar, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Ist unter dieser Annahme die Gleichung der Curve (C)

$$(3)\qquad r = k\tilde{\omega}(\theta),$$

so erhält man das gesuchte Potential, indem man im Ausdruck (1)

$$\varphi(\theta) = \tilde{\omega}(\theta)e^{\chi(\theta)},\quad \chi(\theta) = -\int d\theta\sqrt{\left[\frac{\tilde{\omega}'(\theta)}{\tilde{\omega}(\theta)}\right]^2+1}$$

setzt, während $\psi(\theta)$ willkürlich bleibt.

Ist die Gleichung der Curve (C) von der Form

$$r^{2m^2p} = 2k^{2m^2p}\sin m\theta\cos^{m^2p^2}m\theta,$$

worin m und p positive ganze Zahlen bedeuten, so findet man als Lösung der zweiten Aufgabe den Ausdruck

$$\psi\left(\frac{r}{\cos^p m\theta}\right)\cos^{2p}m\theta.$$

Dieser Fall begreift insbesondere die Curven $r^n = k^n\sin n\theta$ in sich, deren Eigenschaften von vielen Geometern untersucht sind, so z. B. für $n = 2$ die Lemniskate, deren hierhergehörige Eigenschaften 1804 durch Saladini für eine Kraft von constanter Grösse und Richtung, 1844 durch O. Bonnet für eine der Entfernung proportionale Centralkraft entdeckt sind. Merkwürdiger Weise ist mit Ausnahme dieser beiden Fälle, welche die bezüglichen Untersuchungen veranlasst haben, die Lösung der Aufgabe I unmöglich für zwei Kategorien von Kräften, nämlich für die Centralkräfte und für diejenigen, welche bei constanter Richtung Functionen der Entfernung ihres Angriffspunktes von einer festen Geraden sind.

In der ausführlichen Abhandlung des J. de l'Éc. Pol. werden die eben mitgeteilten Resultate begründet, nachdem dieselben in der ersten Note der C. R. schon veröffentlicht waren; in der zweiten Note der C. R. dagegen kündigt der Verfasser die Ergebnisse allgemeinerer Untersuchungen über folgende Aufgaben an: Es sei ein System (A) von Curven $r = \tilde{\omega}(\theta, \alpha)$ gegeben, die durch den Pol O gehen und von einem variablen Parameter α abhängen. I. „Ein neues System (B) von Curven, welche alle durch O gehen, so zu bestimmen, dass ein Massenpunkt, der von O mit der Geschwindigkeit v_0 ausgeht, in derselben Zeit unter der Einwirkung des betrachteten Potentials in einem beliebigen Punkte M der Ebene eintrifft, möge er ununterschiedlich die Curve aus dem Systeme (A) oder die aus dem Systeme (B) beschreiben, welche beide durch M gehen". II. „Das Potential aufzusuchen, unter dessen Einwirkung die bezw. zu den beiden Systemen (A) und (B) gehörigen Curven in Bezug auf einander die oben definirte Eigenschaft des Isochronismus besitzen".

Sind beide Systeme (A) und (B) ähnlich und ähnlich liegend, so ist es auch das System (S) der synchronen Curven, d. h. derjenigen Curven $r = \lambda\varphi(\theta)$, welche den Ort des Punktes auf den verschiedenen Curven (A) oder (B) nach Verlauf der Zeit t angeben. In diesem Falle wird der Ausdruck des Potentials nach der ohne Beweis abgedruckten Angabe des Verfassers:

$$\psi\left[\frac{r}{\varphi(\theta)}\right]\frac{\varphi^4(\theta)[\varpi^2(\theta)+\varpi'^2(\theta)]}{[\varphi(\theta)\varpi'(\theta)-\varphi'(\theta)\varpi(\theta)]^2},$$

mit der Bedingung, dass die Anfangsgeschwindigkeit Null ist. Die Curven (A) und (B) berühren sich in O. Lp.

A. DE SAINT-GERMAIN. Sur la détermination géométrique des brachistochrones. Nouv. Ann. (3) V. 177-185.

Wenn die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes durch den Satz von der Erhaltung der Kraft bestimmt werden kann (also passive Widerstände nicht vorhanden sind), so lässt sich die Brachistochrone bestimmen, ohne dass man die Variationsrechnung zu Hülfe zu nehmen braucht. Hierzu benutzt der Ver-

fasser, wie schon andere vor ihm, die Lösung der bekannten Aufgabe: Wenn zwei Punkte A und B in zwei Gegenden des Raumes gegeben sind, welche durch eine Fläche S getrennt werden, auf dieser Fläche einen Punkt M zu finden, sodass ein beweglicher Punkt, welcher sich mit der Geschwindigkeit a in der A enthaltenden Gegend, mit der Geschwindigkeit b in der B enthaltenden Gegend bewegt, die gebrochene Linie AMB beschreiben muss, um von A nach B in der kürzesten Zeit zu gelangen. Indem nun die Anzahl solcher Flächen S zwischen A und B unendlich gross genommen, jede derselben durch eine Niveaufläche ersetzt wird, gelangt der Verfasser zu solchen geometrischen Eigenschaften der Brachistochrone, welche letztere völlig definiren. Im Falle von parallelen Ebenen als Niveauflächen hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung zu integriren; für den Fall allgemeiner Niveauflächen werden die erhaltenen Bedingungen geometrisch und mechanisch gedeutet. Besonders wird die Brachistochrone in der Umgebung des Anfangspunktes genauer untersucht. Endlich wird eine nicht ebene Brachistochrone unter der Annahme bestimmt, dass der bewegliche Punkt m von der Masse 1 nach einer festen Geraden Oz durch eine Kraft F angezogen wird, die nach dem von m auf Oz gefällten Lote mP gerichtet ist und die Grösse $F = \varphi'(r)$ hat, wenn $r = mP$ ist. Lp.

Werner. Beiträge zur Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf Rotationsflächen mit specieller Anwendung auf das Rotationsparaboloid. Pr. Gymn. Ratibor (No. 189). 40 S. u. 1 Taf. 4°.

Die Aufgabe der Integration der Differentialgleichungen für die reibungslose Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche, wenn von einem Punkte der Rotationsaxe eine als Function der Entfernung wirkende Centralkraft ausgeht, wird in den ersten beiden Paragraphen nach zwei verschiedenen Methoden auf Quadraturen zurückgeführt. Im dritten Paragraphen werden diese Betrachtungen auf die besondere Aufgabe ange-

wandt, bei welcher die Fläche ein Rotationsparaboloid ist, der anziehende Punkt im Scheitel desselben sitzt, die Kraft direct proportional der Entfernung wirkt, die Anfangsgeschwindigkeit in einer zur Rotationsaxe senkrechten Ebene liegt. Sowohl die Zeit t als auch der Winkel ψ, welchen die durch die Rotationsaxe und den Fahrstrahl nach dem Punkte gelegte Ebene mit einer festen Ebene durch die Axe bildet, werden in diesem Falle elliptische Integrale dritter Gattung. Die genaue Discussion derselben bildet den Hauptgegenstand der Arbeit (§§ 4 - 12, S. 10 - 40).

Die umfassenden allgemeinen Untersuchungen aus der Dissertation des Herrn Stäckel „Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche" (F. d. M. 1885. XVII. 881 ff.) scheinen dem Verfasser nicht bekannt geworden zu sein. Manche der von ihm gefundenen Eigenschaften der Bewegung gelten eben unter allgemeineren Voraussetzungen, so der Satz, dass die Bewegung des Punktes in einer Zone vor sich geht, welche von zwei durch den Punkt abwechselnd erreichten Parallelkreisen begrenzt wird. Ebenso wenig ist auch auf die Abhandlung des Herrn Züge Bezug genommen: „Bewegung eines schweren Punktes auf einem Rotationsparaboloid" (Hoppe Arch. (1) LXX. 58 - 74, F. d. M. 1883. XV. 816), wo mannichfaltige Analogien zu der hier behandelten Bewegung vorkommen.

Nachdem in § 5 die Reaction der Fläche berechnet ist, werden in § 6 nach Schellbach (Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen) die elliptischen Functionen in der Jacobi'schen Normalform eingeführt, die Integrale für t und ψ als einfache elliptische Integrale dritter Gattung dargestellt. Hieraus wird (§ 7) die Periodicität der Bewegung erschlossen; die Form der Bahncurve besteht (§ 8) aus lauter sich wiederholenden congruenten Zweigen, von denen jeder wieder aus zwei congruenten Halbzweigen gebildet ist, die jedoch eine entgegengesetzte Lage zu einander haben. Dass der höchste Punkt der Bahn auf seinem Parallelkreise im Sinne der Bewegung vorwärts schreitet, wird in § 9 mit Hülfe der zur Irrationalität der Integrale zugehörigen Riemann'schen Fläche gezeigt. Aus den allgemeinen Formeln

ergeben sich die Resultate für die besonderen Fälle, dass (§ 10) die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, und dass (§ 11) die Bewegung in einem Parallelkreise vor sich geht. Der letzte kurze Paragraph bespricht die durch eine Aenderung in der Annahme der Constanten bedingte Modification der Formeln und den Fall der Abstossung statt der Anziehung. Die ganze Arbeit zeigt an einem hübschen Beispiele die von Herrn Stäckel unter allgemeineren Voraussetzungen aufgefundenen Eigenschaften der Bewegung auf einer Fläche. Lp.

K. Weihrauch. Ueber Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, nebst Anwendung auf das Foucault'sche Pendel. Exner Rep. XXII. 480-491.

K. Weihrauch. Einfluss des Widerstandes auf die Pendelbewegung bei ablenkenden Kräften, mit Anwendung auf das Foucault'sche Pendel. Exner Rep. XXII. 643-675.

Beschränkt man sich bei der Behandlung des mathematischen Pendels auf Schwingungen von unendlich kleinem Ausschlage, so kann man, wie bekannt, die Beschleunigung des Massenpunktes des Pendels nach der Ruhelage hin direct proportional der Entfernung desselben von der Ruhelage setzen, und die auf rechtwinklige Axen bezogenen Differentialgleichungen für die Centralbewegung innerhalb der Tangentialebene der Kugel sind die bekannten der harmonischen Bewegung:

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -f^2x,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -f^2y \qquad \left(f^2 = \frac{g}{l}\right).$$

Statt der Corioli'schen zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung nimmt der Verfasser allgemein eine Kraft hinzu, deren Grösse der Geschwindigkeit v proportional und deren Richtung normal zur beschriebenen Trajectorie ist. Setzt man endlich noch den Sinn der Kraft als nach einer bestimmten Rotationsrichtung wirkend fest, so lauten die nunmehrigen Differentialgleichungen des somit charakterisirten abstracten mechanischen Problems der Ebene:

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -f^2x + 2h\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -f^2y - 2h\frac{dx}{dt},$$

wo h eine Constante bezeichnet. Aus beiden Gleichungen erhält man durch zweimalige Differentiation, resp. Elimination:

$$(3) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 2(f^2 + 2h^2)\frac{d^2x}{dt^2} + f^4x = 0,$$

eine lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Durch die Integration derselben folgt x und sofort auch y als Functionen der Zeit t. Die Discussion der erhaltenen Formeln lehrt danach die näheren Eigenschaften der Bewegung kennen, so die Gestalt der Bahncurve und die Schwingungsdauer, deren Wert $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g+lh^2}}$ gefunden wird, also kleiner als unter dem alleinigen Einflusse der Schwere.

Die Anwendung auf das Foucault'sche Pendel, wobei $h = \omega\sin\varphi$ zu setzen ist (ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, φ = geographische Breite), folgt, ohne dass die Gesetzmässigkeit dieser Anwendung begründet wird. Der Verfasser sagt hierüber (S. 489-490): „Wäre, was ich hier nicht weiter untersuchen kann, die Möglichkeit ausgeschlossen, dass eine Zunahme der Anomalien für die Maximalelongationen von genau derselben Grösse und in demselben Zeitintervalle, wie oben, durch eine andere, als die von mir bezüglich N“ (der Normalkraft) „gemachte Annahme ebenfalls geliefert werden könnte, dann müsste in der obigen Deduction ein neuer Beweis für die Art und Grösse der Ablenkung horizontaler Bewegungen infolge der Erdrotation gegeben sein.“ Trotzdem meint der Verfasser die fragliche Anwendung machen zu dürfen und spricht als Ergebnis den Satz aus: Die Formel $\mathrm{T} = T:\sin\varphi$ gilt mit demselben Grade von Genauigkeit, mit dem man die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels gleich $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ rechnet. Für die Figur der Bahncurve des beweglichen Punktes, also die Horizontalprojection der Trajectorie eines Foucault'schen Pendels nach Auffassung des Verfassers, folgt ein Sternpolygon, dessen

Seiten Curvenbogen von schwacher Krümmung, mit der convexen Seite nach der Ruhelage sind.

In der zweiten Abhandlung wird das mechanische Problem des ersten Artikels dahin erweitert, dass ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand hinzugenommen wird. Dadurch verwandeln sich die Differentialgleichungen (2) in

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -f^2x + 2h\dfrac{dy}{dt} - 2q\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -f^2y - 2h\dfrac{dx}{dt} - 2q\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Durch ein ähnliches Verfahren wie in der ersten Arbeit folgt die lineare Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 4q\frac{d^3x}{dt^3} + 2(f^2+2h^2+2q^2)\frac{d^2x}{dt^2} + 4qf^2\frac{dx}{dt} + f^4x = 0.$$

Damit ist die Lösung der neuen mechanischen Aufgabe auf die bekannte Integration dieser Gleichung reducirt. Nach Aufstellung der Integralformeln für x und y im ersten Abschnitte werden im zweiten die erhaltenen Formeln discutirt. Von den Resultaten heben wir einige heraus; alle diese Ergebnisse gelten für denjenigen Anfangszustand, welcher der Art entspricht, wie das Experiment mit dem Foucault'schen Pendel angestellt zu werden pflegt: nach einer anfänglichen Ablenkung aus der Ruhelage beginnt der Punkt seine Bahn mit der Anfangsgeschwindigkeit Null.

Von einer Schwingungsdauer als dem Unterschied je zweier Zeiten, in denen das Pendel die Geschwindigkeit Null besitzt, kann nicht die Rede sein, weil die Geschwindigkeit nur für $t = 0$ und $t = \infty$ Null ist; man kann dagegen die Schwingungsdauer als den Unterschied je zweier Zeiten definiren, in welchen das Pendel zwei aufeinanderfolgende Maxima oder Minima der Geschwindigkeit besitzt. Ein Isochronismus der unendlich kleinen Schwingungen ist dann nicht vorhanden. Das Pendel passirt (wie in dem Falle ohne widerstehendes Mittel) nie die ursprüngliche Ruhelage. Von einer gewissen Zeit an geht die Bahn des beweglichen Punktes in eine Spiralbewegung um den Ursprung

über, indem Geschwindigkeit und Fahrstrahl fortwährend abnehmen.

Specialfälle und numerische Beispiele bilden den Gegenstand des dritten Abschnittes der Arbeit. Zunächst werden die bekannten Lösungen der beiden Fälle, in denen 1) keine Normalkraft, 2) kein Widerstand vorhanden ist, aus den erhaltenen Formeln hergeleitet. Das Zahlenbeispiel, welches hiernach folgt, behandelt einen Fall, der zwar zur Erläuterung der Bewegung sehr geeignet ist, in Wirklichkeit jedoch nicht vorkommen kann, da die Erde sich (wenn die ganze Theorie überhaupt auf sie anwendbar ist) in 12,6 Sekunden mittlerer Zeit einmal um ihre Axe drehen müsste. Eigentümlich ist die in diesem Beispiel sich ergebende Folgerung über die Schwingungsdauer: Bezieht man diesen Begriff auf die Minima der Geschwindigkeit, so nimmt die Schwingungsdauer mit wachsender Zeit zu; bezieht man ihn jedoch auf die Maxima, so nimmt die Schwingungsdauer fortwährend ab.

Der vierte Abschnitt enthält die Anwendung der gegebenen Entwickelungen auf das Foucault'sche Pendel und kommt nach eingehender Berücksichtigung der praktisch möglichen Fälle zu dem schon von Resal abgeleiteten Schlusse: „Der Widerstand ändert an der Geschwindigkeit, mit welcher die „Drehung der Schwingungsebene“ beim Foucault'schen Pendel vor sich geht, gar nichts. Bei dem Versuche braucht daher auf den Widerstand keine Rücksicht genommen zu werden“. Lp.

Nouvel. Ueber die Bewegung eines Fadenpendels, welches in einer Ebene schwingt. Pr. Gymn. Cöthen. 20 S. 4°.

Giebt man einem an einem Faden von der Länge l hängenden materiellen Punkt einen Stoss, so dass er zunächst eine horizontale Geschwindigkeit v erhält, so wird er sich, anfangs bekannten Gesetzen folgend, auf der Peripherie eines verticalen Kreises bewegen. Das weitere Verhalten wird wesentlich von der Geschwindigkeitshöhe, d. h. von der Grösse $a = \frac{v^2}{2g}$ abhängen.

Ist $a > \frac{3}{2}l$, so steigt das Gewicht auf der Peripherie des Kreises bis zum höchsten Punkte desselben und schwingt auf der anderen Seite desselben abwärts, ohne dass jemals die Spannung des Fadens gleich Null oder gar negativ wird. Ist $a < l$, so pendelt der Körper auf der unteren Hälfte des verticalen Kreises; auch hier wird die Spannung niemals Null. Liegt aber a in den Grenzen l und $\frac{3}{2}l$, so steigt der Körper auf der Peripherie des Kreises so lange empor, bis er um die Strecke $h = \frac{2}{3}(a-l)$ oberhalb des Aufhängungspunktes liegt. An dieser Stelle ist die Spannung gleich Null, und hier verlässt der Körper die Peripherie, um sich auf der durch die erlangte Geschwindigkeit bedingten Parabel ins Innere des Kreises zu bewegen. In dem einzigen weiteren Schnittpunkt, welche diese Parabel mit dem Kreise nur noch hat, da der erste gemeinschaftliche Punkt dreifach zu zählen ist, wird plötzlich die zur Peripherie des Kreises senkrechte Componente der Geschwindigkeit vernichtet, und der Körper bewegt sich nun zunächst wieder auf der Peripherie des Kreises. Ist die Richtung, in welcher er dies thut, derjenigen entgegengesetzt, in welcher er sich vor dem Verlassen der Bahn bewegte, so bezeichnet der Verfasser den Vorgang dadurch, dass er sagt, der Körper kippt um. Ist jedoch die Bewegungsrichtung nach dem Aufprallen dieselbe, wie vor dem Verlassen der Bahn, so soll gesagt werden, der Körper sei herumgeschleudert. Um nun das weitere Verhalten des Körpers zu erkennen, hat man zu untersuchen, welche Geschwindigkeitshöhe a_1 ihm im untersten Punkte der Bahn zukommen würde, und daraus den entsprechenden Wert $h_1 = \frac{2}{3}(a_1-l)$ zu berechnen. Da bei dem Aufprallen lebendige Kraft verloren gegangen ist, so ist h_1 offenbar kleiner als h und damit kleiner als $\frac{2}{3}(\frac{3}{2}l-l) = l$. Es pendelt also entweder der Körper auf der unteren Kreishälfte, wenn h_1 negativ, oder es wiederholt sich das vorige Spiel mit dem Verlassen der Kreisbahn und Wiederaufprallen. Eine genauere Einsicht in das Wesen der Bewegung erlangt der Verfasser nun dadurch, dass er das Gebiet der Grösse h von 0 bis l in abwechselnd auf einander folgende Zonen und Nebenzonen teilt. Sind h'_n und h_n die untere und die obere Grenze der n^{ten} Zone,

so ist h'_{n+1} bestimmt durch die Gleichung

$$h'_n = h'_{n+1} - \frac{64 h'^3_{n+1}}{3 l^8} (l^2 - h'^2_{n+1})^2;$$

dieselbe Beziehung besteht zwischen h_n und h_{n+1}. h'_1 ist gleich 0, h_1 die kleinere und h'_2 die grössere der beiden reellen Wurzeln der Gleichung

$$h - \frac{64 h^3}{3 l^8} (l^2 - h^2)^2 = 0.$$

Die Grössen h_n und h'_n convergiren mit wachsendem n mehr und mehr gegen einander und gegen die Grenze l, ohne jedoch diese Grenze für endliche Werte zu erreichen. Die unteren und oberen Grenzen der ersten Zonen sind

0	und	0,23593,
0,75064	und	0,79077,
0,88895	und	0,89930,
0,93048	und	0,93459,
0,94869	und	0,95080,
0,95867	und	0,95992.

Das Intervall 0,23593 bis 0,75064 wird nicht als erste sondern als zweite Nebenzone bezeichnet, weil das Intervall -1 bis 0 aus praktischen Gründen als erste Nebenzone mit aufgeführt wird. Nunmehr kann der Verfasser folgende Lösung seiner Aufgabe bringen: „Wenn der Punkt geschleudert ist, haben wir zunächst sein h zu bestimmen. Es sind vier Fälle möglich:

1) $h \geqq l$. Dann schwingt der Punkt fortwährend ganz herum und durcheilt irgend eine bestimmte Stelle mit jedesmal derselben Geschwindigkeit.

2) h liegt in der x^{ten} Zone. Dann gelangt der Punkt durch $(x-1)$maliges Herumschleudern durch die $(x-1)Z$, $(x-2)Z$ etc. in die erste Zone, in welcher er bleibt und unendlich oft umkippt.

3) h liegt in der x^{ten} Nebenzone. Dann gelangt der Punkt durch $(x-2)$maliges Herumschleudern und dann durch ein nochmaliges Herumschleudern oder durch ein Umkippen in die erste Nebenzone $(0 > h > -l)$, in welcher er bleibt und hin- und herschwingt ohne ferneres Herumschleudern und Umkippen.

4) h ist der Grenzwert zwischen der x^{ten} Zone und der x^{ten}

resp. $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Nebenzone. Dann durchläuft der Punkt durch $(\varkappa-1)$ resp. $\varkappa$ maliges Herumschleudern der Reihe nach sämtliche niedrigeren Grenzwerte und kommt schliesslich an die durch den Aufhängungspunkt gelegte Horizontale, welche er bei jedem folgenden Hin- und Herschwingen berührt. F. K.

G. Kobb. Om integrationen af differentialeqvationerna för en tung partikels rörelse på en rotationsyta med vertikal axel. Stockh. Öfv. 367-373.

Eine mehr ausführliche Darstellung seiner Untersuchungen hat Herr Kobb in „Acta Mathematica" X. 89-108 in einer Abhandlung: „Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution" gegeben. M. L.

N. Wuich. Lehrbuch der äusseren Ballistik. Wien.

F. Siacci. Un procédé d'intégration des formules balistiques. Rev. d'Art. XXVII. 315-322.

Der Verfasser bringt erhebliche Abkürzungen an derjenigen Methode an, welche er in der Rev. d'Art. XVII. 45 (1880) veröffentlicht hatte. Die ältere Arbeit ging von der Didion'schen Substitution aus, bedurfte aber eines unbewiesenen Lemmas. Dieses letztere kann nur bewiesen werden, wenn, wie dies jetzt geschehen ist, die Didion'sche Methode aufgegeben wird. Die Integration wird übrigens auch nach der neuen Art nur dadurch ermöglicht, dass für eine variable Grösse ein constanter Mittelwert eingeführt wird. Lp.

A. Indra. Synthetische Entwickelung eines allgemein giltigen Luftwiderstands-Gesetzes. Mitt. üb. Art. u. Genie. XVII. 1-34, 55-80.

Der Verfasser geht von der Gleichung der Wurfparabel im

luftleeren Raume aus:

$$y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_i^2 \cos^2 \varphi},$$

in welcher φ den Abgangswinkel, v_i die Anfangsgeschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere bedeuten. Um auszudrücken, dass die ballistische Curve im endlichen Abstande x_a eine verticale Asymptote hat, fügt er dem in x quadratischen Gliede den Factor $\frac{x_a}{x_a - x}$ hinzu, ebenso der aus der Gleichung $x = v_i t \cos \varphi$ berechneten Zeit, so dass also

$$t = \frac{x}{v_i \cos \varphi} \cdot \frac{x_a}{x_a - x}$$

wird. Ferner wird erwogen, dass die Voraussetzung des gleichmässigen Widerstandes nach allen Richtungen der Bewegung für rotirende Langgeschosse nicht zulässig sei, und dadurch die Notwendigkeit eines neuen Factors von x^2 begründet, der in der einfachsten Form $1 + ax$ gewählt wird. Damit erhält also die Gleichung der ballistischen Curve die Gestalt.

$$(1) \qquad y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{g x^2}{2 v_i^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{(1 + a x) x_a}{x_a - x}.$$

Endlich wird zwischen der letzten Geschwindigkeit v_a (für $x = x_a$) und der Schussweite X noch die Relation angenommen:

$$v_a = C \cdot 10^{qX},$$

wo q und C zu bestimmende Constanten bedeuten. Aus den Schusstafeln werden für einzelne Geschosse die Werte der Constanten a, q, $k = \frac{2C}{g}$ berechnet. Die „synthetische Entwickelung“ besteht demnach in der glücklichen Wahl einer Interpolationsformel, welche in der That die Ergebnisse der Schiessversuche gut darstellt und über welche die Redaction der Mitteilungen bemerkt: „Durch eine ganz eigenartige Auffassung der Parameter ist es dem Verfasser gelungen, für dieselben innerhalb weiter Geschwindigkeitsgebiete ziemlich constante Grundwerte (auf Basis vieler Schiessresultate) zu finden, wodurch die Arbeit für Näherungsrechnungen einen praktischen Wert hat.“

Aus Gl. (1) und den allgemeinen Formeln der Bewegung wird nun die Horizontal-Componente ϱ_1 des Luftwiderstandes in der Gestalt hergeleitet:

$$(2) \qquad -m\frac{d^2x}{dt^2} = \varrho_1 = \frac{2}{gx_a}\sqrt{v_1 u^3},$$

worin m die Masse des Geschosses, v_1 und u die Horizontal-Componenten bezw. der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit (d. h. die letztere für $x = X$) bedeuten. Als wesentlich betont der Verfasser, dass ϱ_1, also überhaupt der Widerstand, von dem Anfangszustande der Bewegung abhängig gedacht ist. Auch die experimentell gefundene, bekannte Discontinuität des Widerstandsgesetzes bei einer Geschwindigkeit, welche gleich der Schallgeschwindigkeit ist, ist in der Formel (2) berücksichtigt; der Factor $\frac{1}{x_a}$ ist nämlich vom Verfasser in eine Gestalt gebracht, aus der diese Discontinuität erhellt.

Als ein allgemeines Widerstandsgesetz, welches „mit grösserer Annäherung in allgemeiner Weise gelten könnte“, wird zuletzt noch das folgende plausibel gemacht:

$$\varrho = \frac{2v^2}{g}\left\{m_0 + pv^2\left(1 - \frac{v}{3w}\right)\right\}.$$

Lp.

G. Recknagel. Ueber Luftwiderstand. Z. dtsch. Ing. XXX. 489-493, 514-519.

Die vorliegende Abhandlung schliesst sich an eine in Wiedemann's Ann. der Phys. und Chem. ((2) X. 677. 1880) erschienene Arbeit an, in welcher eine Methode der manometrischen Bestimmung des Luftwiderstandes für einzelne Punkte der bewegten Platte auseinandergesetzt ist. Die neue Arbeit bezieht sich auf kreisförmige Platten, deren Mittelpunkte sich selbst wieder in Kreisen bewegen, so dass also die Platten ringförmige Räume durchlaufen. Bezeichnet s das specifische Gewicht der Luft in Bezug auf Wasser, v die Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Platte, D den Durchmesser der Platte und L den Abstand des Plattenmittelpunktes von der Drehungsaxe, wird

ferner zur Abkürzung $F = \frac{1}{4}D^2\pi$, $H = \frac{sv^2}{2g}$ gesetzt, so lassen sich die vom Verfasser experimentell ermittelten Luftwiderstände $W(0{,}01 \leqq D \leqq 0{,}5m,\ 1 \leqq L \leqq 5m)$ durch die Formel

$$W = FH\left\{1{,}12 + 3{,}21\frac{D}{L} - 0{,}632\frac{D^2}{L}\right\}$$

in befriedigender Weise darstellen. Auch mit den Versuchen von Borda und Hutton befindet sich die gegebene Formel in verhältnismässig guter Uebereinstimmung. Um völlige Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen von Hagen zu erzielen, hat man in dem Coefficienten von FH an Stelle von 1,12 nur 1,06 zu setzen. Ferner werden Versuchsergebnisse über die Druckverteilung mitgeteilt, und zwar des Ueberdrucks auf der Vorderseite und des Minderdrucks auf der hinteren Seite der Platte, sowie Beobachtungen über die längs der Platte stattfindende Luftbewegung. F. K.

F. Ritter von Rźiha. Die mechanische Arbeit der Sprengstoffe. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XXXVIII. 19-22.

Der Verfasser giebt zunächst eine Zusammenstellung der experimentellen Untersuchungen von Bunsen und Schischkoff, Stadler, Berthelot endlich von Roux und Sarrau über die mechanische Arbeit, welche die gebräuchlichsten Sprengstoffe zu entwickeln im Stande sind. Indem der Verfasser diesen wissenschaftlichen Ergebnissen die bei praktischen Sprengungsarbeiten beobachteten Verhältnisse des mechanischen Arbeitsvermögens verschiedener Sprengstoffe gegenüberstellt, erzielt er eine verhältnismässig gute Uebereinstimmung von Theorie und Praxis, so dass die nützliche Arbeit beim Sprengen für die vier Substanzen Schiesspulver, Dynamit, Gelatine, Nitroglycerin ziemlich derselbe Bruchteil der überhaupt geleisteten Arbeit ist. Der Schluss der Abhandlung weist auf die bekannte Aufgabe des Ingenieurs hin, bei Sprengarbeiten durch geeignete Ladegrössen, Bohrlochs-Dimensionen und Stellungen der Bohrschüsse eine möglichste Ausnutzung des Sprengstoffs zu erzielen; der Verfasser

zeigt an einem Beispiel, dass es vor allem darauf ankomme, die Wurfarbeit, d. h. jene Arbeit, welche auf das Fortschleudern des Gesteins verwendet wird, möglichst zu verringern. F. K.

P. ALEXANDER. Formulae for the motion of projectiles. Glasgow Phil. Soc. Proc. XVIII. 237-241.

Formeln für den Gebrauch, wenn Tafeln nicht zur Hand sind; auf der Voraussetzung beruhend, dass der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist. Gbs. (Lp.)

C. CRANZ. Theoretische Studien zur Ballistik der gezogenen Gewehre. Eine Methode zur Bestimmung der vorteilhaftesten Combination von Kaliber, Drallwinkel, Geschosslänge, Geschossgewicht etc. Hannover. Helwing'scher Verl. (Th. Mierzwinsky.) 1887. VIII + 55 S. gr. 8° nebst 1 Taf.

Nach einer populär gehaltenen Besprechung des Einflusses der in Betracht zu ziehenden Grössen wird (S. 13) die zu lösende Aufgabe dahin formulirt: „Es ist diejenige Verbindung von Kaliber, Geschosshöhe, Drallwinkel, Geschossgewicht, Lauflänge, Pulverladung etc. in jedem einzelnen Fall, also allgemein durch eine mathematische Formel zu bestimmen, welche bei möglichst leichtem Geschoss und Gewehr die Durchschlagskraft des Geschosses beim Aufschlagen am Ziel in der durchschnittlich am häufigsten verwendeten Schussweite zu einem Maximum macht.“ Zur Lösung dieser Aufgabe stellt der Verfasser drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf; die Integration derselben gelingt unter Hinzunahme von Relationen, die zum Teil innerhalb gewisser Grenzen angenähert gelten, zum Teil aus derartigen angenäherten Annahmen und praktischen Versuchen folgen. So wird unter Verweis auf Poisson die „Pulverkraft“ als umgekehrt proportional der Entfernung des Geschosses vom Pulverraum angenommen, ferner proportional der $(1,8)^{\text{ten}}$ Wurzel aus dem Pulvergewicht. Die Aufschlagsgeschwindigkeit des Geschosses wird nach einer Näherungsformel von Prehn (Die

Ballistik der gezogenen Geschütze. Berlin, 1864) berechnet. Die Berücksichtigung der dem Geschosse entgegenströmenden Luft geschieht nach den Formeln, welche G. Green für die Gestalt eines Ellipsoids angegeben hat (abgedruckt in Quart. J. XVI.). Nach diesen Vorbereitungen wird die Formel aufgestellt, welche das Problem löst, und werden die Resultate übersichtlich zusammengestellt. Eine Reihe von durchgerechneten Beispielen dient zur Erläuterung des Verfahrens. Zum Schlusse sind in einem Anhange einige bezügliche Werke und Abhandlungen über Ballistik angeführt.

Es ist einleuchtend, dass die vorliegende Studie den Anforderungen an eine strenge Theorie nicht genügt; andererseits kann eine solche Theorie bei der Unzulänglichkeit der physikalischen und mathematischen Hülfsmittel jetzt eben auch nicht geliefert werden. Da manche von den berechneten Beispielen einer Kontrolle durch Versuche sehr wohl unterzogen werden können, so wäre es interessant zu erfahren, innerhalb welcher Grenzen die theoretisch gefundenen Resultate zutreffen. Lp.

C. Cranz. Theoretische Untersuchungen über die regelmässigen Abweichungen der Geschosse und die vorteilhafteste Gestalt der Züge. Tübingen Diss. 70 S. Stuttgart 1883. Arch. f. Art. XC. 478-543.

Der erste Abschnitt der vorliegenden Abhandlung ist in erster Linie der theoretischen Bestimmung der Rechtsabweichung der Geschosse gewidmet, welche dieselben in Folge der durch den Drall der Geschütze hervorgerufenen Rotation um ihre Axe zeigen. Der Verfasser stellt zuerst die Differentialgleichungen für die fortschreitende Bewegung des Geschossschwerpunktes und für die Rotation des Geschosses um diesen Punkt auf, indem er das Geschoss als Cylinder mit aufgesetzter Halbkugel betrachtet und für die Componenten und Drehungsmomente des Luftwiderstandes diejenigen Ausdrücke setzt, welche sich aus den bekannten Kummer'schen Untersuchungen ergeben. Eine erste Näherung für die fortschreitende Bewegung wird dann zu-

nächst dadurch gewonnen, dass in den drei betreffenden Gleichungen diejenigen Glieder unterdrückt werden, welche von der als klein vorausgesetzten Abweichung der Geschossaxe von der Bahntangente herrühren. Dadurch werden die betreffenden Gleichungen mit denjenigen identisch, welche für die Bewegung eines materiellen Punktes im widerstehenden Mittel gelten. Die angenäherten Werte für die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes werden alsdann in die Rotationsgleichungen eingesetzt und aus den letzteren Ausdrücke für die in Betracht kommenden Winkelgrössen abgeleitet. Setzt man diese Grössen in die Translationsgleichungen ein, so erhält man den Ausgangspunkt für eine zweite Annäherung für die fortschreitende Bewegung. Die letztere Rechnung wird nur in Bezug auf die Abweichung von der durch die Geschossaxe gelegten Verticalebene durchgeführt. Die Uebereinstimmung des für nicht zu grosse Flugzeiten gültigen Resultates mit der Erfahrung wird an einigen Beispielen dargethan.

Um seine Axe dreht sich das Geschoss mit constanter Geschwindigkeit, während die erstere selbst conische Pendelungen mit dem Schwerpunkt als Scheitel vollführt, indem sie in periodischen Intervallen ihre ursprüngliche Richtung wiedererlangt. Der zu einem solchen Intervall gehörige Teil der Leitlinie ist eine Rosette mit drei Blättern, welche mit der Zeit stetig wachsen.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Bestimmung der günstigsten Gestalt der Züge in einem Geschütze, gemäss verschiedener Bedingungen. Zunächst wird derjenige gleichförmige Drall bestimmt, für welchen die Abweichung der Geschossaxe von der Bahntangente am Ziele möglichst gering ist. Die Lösung der Frage nach demjenigen Drall, bei welchem die Anfangsgeschwindigkeit ein Maximum ist, wird angedeutet, aber nicht durchgeführt.

Unter Voraussetzung der Poisson'schen Hypothese, dass die Pulverkraft umgekehrt proportional dem im Geschützrohre durchlaufenen Wege ist, wird dann derjenige ungleichförmige Drall bestimmt, bei welchem die auf Ueberwindung der Reibung verwendete Arbeit ein Minimum ist. Für eine andere Hypothese

in Bezug auf die Pulverkraft wird dann der Drall so bestimmt, dass die Züge constanten Druck erleiden.

Ein Anhang behandelt die Bewegung der Geschosse, welche aus Geschützen mit axenparallelen Zügen geworfen werden, die demgemäss zu Anfang keine Rotation um ihre Axe besitzen.

F. K.

---

von Pfister. Ein ballistischer Irrtum. Arch. f. Art. XCIII. 73-77.

„Gemäss einer vielfach verbreiteten Ansicht soll die Einbusse oder der Gewinn an Schussweite auf verschiedenen Entfernungen, als Folge höheren oder niederen Luftgewichtes, letzteren proportional sein". Der Verfasser weist mit Hülfe der in einer früheren Arbeit („Beurteilung unserer ballistischen Rechnenformeln", Arch. f. Art. LXXXVIII) benutzten Flugbahngleichung

$$y = x tg\alpha - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\alpha} - \frac{gx^3}{6kc\cos^2\alpha} - \frac{gx^4}{48k^2\cos^2\alpha}$$

nach, dass der Einfluss des Luftgewichtes (in der Constante k) auf weiteren Entfernungen in stärkerem Masse hervortritt, als es nach dem angezogenen Gesetze der Fall sein dürfte.

Lp.

A. G. Greenhill and F. L. Nathan. Reduction of Bashforth's experiments by interpolation. Woolwich. Royal Art. Inst. 18 S. 8°.

Die von F. Bashforth in den Jahren 1867-68 und 1878-80 geleiteten Schiessversuche liegen den im Gebrauche befindlichen Schusstafeln zu Grunde. Bei ihnen wurden mittels des Bashforth'schen elektrischen Chronographen die Momente aufgezeichnet, in denen ein Geschoss eine Reihe von Schirmen gleichen Abstandes traf. Aus ihnen berechnete Bashforth die Geschwindigkeit und Verzögerung des Geschosses, danach den Luftwiderstand, indem er die verschiedenen Differenzenreihen der beobachteten Zeitmomente bildete.

Statt der von Bashforth gewählten Differenzenreihen benutzen

die Verfasser die Lagrange'sche Interpolationsformel, um sie differentiiren zu können. Es seien $t_1, t_2, \ldots, t_n$ die beobachteten Zeitmomente; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ die Entfernungen, in welchen die n Schirme von der Mündung des Geschosses stehen; dann liefert die erwähnte Formel die Zeit t als Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der variabeln Entfernung s und der Constanten t_i und s_i. Hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit v und die Verzögerung f nach den Formeln:

$$\frac{1}{v}=\frac{dt}{ds},\quad f=\frac{d^2t}{ds^2}\cdot v^3.$$

An einer Reihe von Zahlenbeispielen werden die erforderlichen Rechnungen erläutert und die Unterschiede von den Bashforth'schen Zahlen gezeigt. Referent hätte gewünscht, dass s als Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von t nach der Lagrange'schen Interpolationsformel auch noch ausgedrückt wäre. Es wäre sofort $v=\frac{ds}{dt}$, $f=-\frac{d^2s}{dt^2}$ (in horizontaler Richtung) geworden; vermutlich hätten die hieraus berechneten Werte mit denen von Bashforth übereingestimmt. Lp.

DENECKE. Ueber Tageseinflüsse. Arch. f. Art. XCIII. 1-39.

Die Temperatur, die Spannung, der Wassergehalt und die Bewegung der Luft können derart von Einfluss auf das Schiessen sein, dass man an verschiedenen Tagen und selbst Tageszeiten unter sonst gleichen Verhältnissen verschiedene Schussweiten erreicht. Herr Prehn, der die „Berechnung von Schusstafeln“ etc. für die Krupp'schen Versuche verfasst hat, fasst seine Ergebnisse in drei Sätze zusammen, von denen der erste lautet: „Die Wege gleicher Verluste an horizontaler Geschwindigkeit von v_0 bis v_x sind der Belastung des Querschnitts direct, der Luftdichtigkeit indirect proportional.“ Der Herr Verfasser erläutert die Prehn'schen Sätze, macht dann aber darauf aufmerksam, dass noch andere „Tagesfactoren“ auf die Leistung eines Geschützes Einfluss haben, die Beschaffenheit des Geschützes als Individuum, die Art der Bedienung und die Beschaffenheit der Munition. Zu-

örterung dieser Umstände auf Grund praktischer Erfahrungen dient eine Reihe von Schiessversuchen aus dem Jahre 1883; aus ihnen geht hervor, dass der Einfluss des Luftgewichtes in vielen Fällen durch denjenigen jener „Tagesfactoren“ überwogen wird, und dass in diesen letzteren eine Gesetzmässigkeit nicht zu entdecken war. Lp.

---

von Scheve. Tafeln für das indirecte und Wurffeuer bis zu 41° Abgangswinkel und für Anfangsgeschwindigkeiten von 240 m an abwärts. Arch. f. Art. XCIII. 97-142.

von Scheve. Berichtigungen hierzu. S. 271-272.

Ergänzung des Aufsatzes im Octoberheft des Arch. f. Art. 1885: „Zur Aufstellung der Schusstafeln für Wurffeuer“. Bei der Berechnung der Tafeln wurde von Otto's Methode zur Berechnung seiner Tafeln für den Bombenwurf ausgegangen, im einzelnen jedoch teilweise ein anderer Weg eingeschlagen, weshalb die bezüglichen Entwickelungen der Formeln auf S. 97-115 gegeben werden. Lp.

M. Perrin. Note complémentaire sur le tir au-dessus de l'horizon. Rev. d'Art. XXVII. 118-124.

Ueber die „neutrale Curve“ von Herrn Percin. Dieselbe ist der geometrische Ort der Punkte, für welche der zu benutzende Aufsatz auf das Geschütz derselbe ist, wie wenn das Ziel in der Höhe der Mündung (bei gleicher Entfernung) sich befände. Ihre Gleichung in Polarcoordinaten ist für den Schuss im luftleeren Raume:

$$\varrho = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \, \frac{1-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varepsilon}{\cos\varepsilon}.$$

(α = Schusswinkel für die gegebene Entfernung, ε = variabler Elevationswinkel des Zielpunktes.) Lp.

SIGAUT et MAURICE. Étude sur le tir à la mer dans les batteries basses. Rev. d'Art. XXVII. 27-45, 135-145.

Der Aufsatz enthält neben den rein technischen Dingen auch einige theoretische Erörterungen mit mathematischer Begründung, so über das Abmessen von Entfernungen, über die Curven gleichen Schiesswinkels mit Berücksichtigung des Einflusses des Windes. Lp.

N. MAYEVSKI. Ueber die Lösung der Probleme des directen und indirecten Schiessens. Berlin. Mittler u. Sohn.

Ausführliches Referat über diese von Herrn Klussmann übersetzte russische Arbeit im Arch. f. Art. XCIII. 481-492. Lp.

BRACCIALINI. Sulla pratica soluzione dei problemi di tiro curvo. Riv. di Artigl. e Genio. 1885.

Aus dieser Arbeit veröffentlicht die Rev. d'Art. XXVII. 237-247 einen Auszug unter dem Titel: „Tables et formules pour les problèmes du tir courbe." Lp.

Cours des écoles de tir. T. II. Armement et feux de l'infanterie. Paris. 1885. Baudouin et Cie. 359 S. 8°.

Ref. in Rev. d'Art. XXVII. 96-98. Lp.

E. PADOVA. Sul moto di rotazione di un corpo rigido. Torino Atti XXI. 38-47.

Die Anzahl der Beispiele, in welchen die Integration der Differentialgleichungen für die Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ausführbar ist, wird durch den Verfasser in der Arbeit um zwei vermehrt. 1) Der Körper erleidet einen Widerstand, welcher, nach dem festen Punkte als Reductionspunkte verlegt, ein Kräftepaar erzeugt, welches dem jeweiligen

Paare der Bewegungsgrösse proportional und ihm gerade entgegengesetzt gerichtet ist. Zu den drei Euler'schen Bewegungsgleichungen in der bekannten Form der Bezeichnungen (wenn keine äusseren Kräfte einwirken) treten daher die Terme bezw. hinzu: $-\lambda Ap$, $-\lambda Bq$, $-\lambda Cr$, worin λ eine Constante bezeichnet. 2) Ein homogener schwerer Umdrehungskörper dreht sich um einen Punkt seiner Umdrehungsaxe; während der Bewegung erleidet er einen Widerstand, welcher dem im ersten Falle betrachteten analog ist, und der Aufhängepunkt wandert auf der Symmetrieaxe derart, dass sein Abstand s vom Schwerpunkte der Bedingung genügt:

$$se^{2\lambda t} = s_1 = \text{const.}$$

Für beide Fälle werden die Rechnungen mit Hülfe der elliptischen Functionen und der Thetareihen durchgeführt und einige Eigenschaften der bezüglichen Bewegungen, insbesondere Analogien mit dem bekannten Falle der Drehung eines schweren Körpers um seinen Schwerpunkt als festen Punkt, aus den Formeln erschlossen.

Lp.

E. Padova. Proprietà del moto di un corpo di rivoluzione soggetto a forze che hanno la funzione potenziale $H\cos^2\vartheta$. Rom. Acc. L. Rend. (2) II. 135-140, 168-174.

Die Bestimmung der Bewegung eines homogenen Umdrehungskörpers, der sich um einen festen Punkt seiner Symmetrieaxe dreht, kann auf Quadraturen gebracht werden, sobald die an ihm angebrachten Kräfte eine Potentialfunction zulassen, welche nur von dem Winkel ϑ abhängt, den die Symmetrieaxe des Körpers mit einer festen Richtung einschliesst. Nun hat Herr Tisserand (C. R. CI. 193-199, F. d. M. XVII. 1885. 1132) darauf aufmerksam gemacht, dass die Rotationsgleichungen der Erde sich unter Benutzung der elliptischen Functionen strenge integriren lassen, wenn man die Störungsfunction auf das Glied reducirt, welches vom Sinusquadrat der Neigung des Aequators gegen die Fundamentalebene abhängt. Daher nimmt Herr Padova die Behandlung der Aufgabe auf, die Drehung eines Umdrehungskörpers

um einen festen Punkt O zu untersuchen, wenn die Kräftefunction von der Form $H\cos^2\vartheta$ ist, wo H eine Constante, ϑ den Winkel der im Raume festen Axe O_ζ mit der Körperaxe O_z bedeutet. (Beiläufig erwähnt der Verfasser, dass, wenn die Kräftefunction dem Quadrate von $\operatorname{tang}\vartheta$ umgekehrt proportional ist, die Lösung der Aufgabe sich schon durch die elementaren Transcendenten bewerkstelligen lässt, dass dieser Fall also als Vorlesungsbeispiel dienen könne). Der Verfasser vollzieht die Reduction der Formeln auf elliptische Functionen in der Jacobi'schen Form, sowie auf Thetareihen, wodurch die Lösung Tisserand's ergänzt wird, und kommt dadurch u. a. zu dem folgenden Satze, den wir wegen seiner vielfachen Behandlung in neuerer Zeit hersetzen: „Wenn die Gleichung $F(z) = 0$“ ($F(z)$ ist das Polynom vierten Grades unter der Quadratwurzel) „lauter reelle Wurzeln hat, so kann das Problem der Drehung eines Umdrehungskörpers um einen festen Punkt seiner Axe, wenn derselbe Kräften unterworfen ist, die eine dem Quadrate des Cosinus desjenigen Winkels proportionale Kräftefunction haben, welchen die Symmetrieaxe mit einer festen Richtung bildet, als äquivalent mit der Aufgabe der Bewegung zweier, äusseren Kräften nicht unterworfener Körper angesehen werden, abgesehen von gewissen gleichförmigen Rotationsbewegungen um die Symmetrieaxe und um die Gerade, welche durch den festen Punkt geht und die erwähnte feste Richtung hat.“ Die Betrachtung desjenigen Falles, in welchem $F(z) = 0$ zwei reelle und zwei complexe Wurzeln besitzt, bildet den letzten Paragraphen der Arbeit, in welchem ähnliche Resultate wie im ersten Teile erlangt werden.

Lp.

F. E. Nipher. The isodynamic surfaces of the compound pendulum. Silliman Journ. (3) XXXI. 22-26.

Es seien r und α die Polar-Coordinaten eines Punktes des zusammengesetzten Pendels in Bezug auf einen Punkt der Aufhängaxe als Pol und in Bezug auf die Ebene durch Schwerpunkt und Aufhängaxe. Bildet die letztere Ebene den Winkel θ mit

der Verticalen und ist dF die Kraft, welche auf ein Massenelement dm einwirken muss, um mit Hinzufügung seiner tangentialen Gewichtscomponente dem Elemente seine wirkliche Beschleunigung zu erteilen, so hat man

$$\frac{rdF}{gdm} = r\sin(\theta+\alpha) - \frac{r^2}{l}\sin\theta.$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich einer constanten a, so repräsentirt er für ein variables α und ein constantes θ eine Reihe concentrischer Kreise (Cylinder), welche die vom Verfasser „isodynamisch genannten Oberflächen sind. Lp.

G. Lorentzen. Theorie des Gauss'schen Pendels. Diss. Leipzig. 24 S. 4°, Astr. Nachr. CXIV. 241-284.

Ein starres Pendel, bestehend aus einer Stange und einer Linse, deren Rotationsaxe mit der Stangenaxe zusammenfällt, schwingt in einer Cardani'schen Aufhängung. Die Theorie dieses Pendels wird gegeben. Referat in Wiedemann Beibl. X. 466. Lp.

H. Samter. Theorie des Gaussischen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Diss. Leipzig, Berlin. Mayer & Müller. 99 S. 8°.

Referat in Wiedemann Beibl. XI. 386. Lp.

A. Lampel. Ueber Drehschwingungen einer Kugel mit Luftwiderstand. Wien. Ber. XCIII. 291-313.

Die Arbeit ist zwar experimenteller Natur, soll aber hier doch erwähnt werden, weil sie eine Stelle in G. Kirchhoff's „Vorlesungen über mathematische Physik" betrifft. Die dort für das logarithmische Decrement der Schwingungen (Vorlesung 26, § 5) gegebene Formel ist durch gewisse Vernachlässigungen gewonnen, die durch das Experiment als nicht mehr unbedingt zulässig nachgewiesen werden. Ebenso erweist sich eine von Hrn. C. J. H. Lampe 1866 gegebene Formel als unzureichend. Da-

gegen stimmen die Versuche ziemlich gut mit einer von Hrn. Boltzmann herrührenden, durch Hrn. Klemenčič 1881 in den Wien. Ber. LXXXIV mitgeteilten Formel, in welcher die Vernachlässigungen nach einem anderen Principe als bei Kirchhoff gemacht sind. Am Ende des Aufsatzes wird auch die dämpfende Kraft des Fadens der Rechnung unterworfen. Da nun in der Boltzmann'schen Formel diejenige Schwingungsdauer vorkommt, welche das System haben würde, wenn keine Dämpfung vorhanden wäre, die in jener Formel vernachlässigten Glieder aber von derselben Ordnung sind wie die bei Berücksichtigung der Dämpfung in Frage kommenden, so hat Hr. Boltzmann, auf dessen Veranlassung die Arbeit überhaupt unternommen ist, seine frühere Formel umgerechnet, und diese Rechnung wird zuletzt mit abgedruckt. Es ergiebt sich, dass die Grösse des Correctionsgliedes innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt, gerade wie dies für die Fadendämpfung selbst der Fall ist.

Lp.

T. R. Terry, D. Edwardes, N. Sarkar. Solution of question 7910. Ed. Times XLIV. 57-58.

Zwei gleiche Stäbe OA und OB von der Länge $2a$ und der Masse m sind in O starr verbunden; OA ist horizontal, OB vertical abwärts gerichtet. Die Enden eines dritten Stabes PQ von der Länge $2a$ und der Masse M können frei längs OA und OB bezw. gleiten, und das ganze System rotirt um OB als feste verticale Axe. Wenn PQ kleine Schwingungen um eine Gleichgewichtslage macht, bei der es den Winkel $\frac{1}{3}\pi$ mit der Verticalen bildet, so ist die Länge des mathematischen, synchron schwingenden Pendels $\frac{8}{9}a\frac{4m+3M}{4m+7M}$.

Lp.

E. de Jonquières. Au sujet de certaines circonstances qui se présentent dans le mouvement de la toupie. C. R. CII. 1519-1522.

E. DE JONQUIÈRES. Sur le mouvement d'un solide homogène, pesant, fixé par un point de son axe de figure. C. R. CIII. 17-21.

E. DE JONQUIÈRES. Note sur un principe de Mécanique rationnelle et une démonstration dont Daniel Bernoulli s'est servi en 1757. C. R. CIII. 617-620.

Die beiden ersten Noten sind Auszüge aus einer grösseren Arbeit des Verfassers: „Explication élémentaire du mouvement de la toupie, d'après les méthodes de Poinsot“ oder „Étude sur le mouvement de la toupie“, einer Schrift, die zwar angekündigt wird, aber nicht erschienen ist. „Will man bloss von der Art der Einwirkung der ins Spiel kommenden Kräfte eine genaue Rechenschaft ablegen, ohne die Wirkungen zu messen, so kann man, den Spuren Poinsot's nachgehend, sich eine klare und deutliche Vorstellung von der Erscheinung verschaffen. Hierzu braucht man nur, wie er es selber sagt und das Beispiel dazu giebt, die Dinge an sich zu betrachten, ohne sie im Verlaufe der Schlussfolgerung aus den Augen zu verlieren.“ Nach diesem Gesichtspunkte sollen die Ausführungen des Verfassers die Frage nach der Grösse der betrachteten Variablen nicht berühren; die mitgeteilten Auszüge können die Beweisführung nur andeuten, geben daher nichts weiter als eine ungefähre Vorstellung von der Wirkungsweise der Kräfte und vom Verlauf der Bewegung. In der ersten Note wird der Einfluss besprochen, den eine Bewegung der Stützfläche eines Kreisels auf die Bewegung desselben ausübt, besonders wenn jene Fläche periodische Oscillationen macht, deren Dauer im Verhältnis zur Präcessionsperiode der Axe klein ist. Dieses Problem ist schon von Poisson deshalb näher untersucht worden, weil man versucht hatte, auf einem Schiffe einen künstlichen Horizont durch einen Spiegel herzustellen, der auf einem Kreisel befestigt war. Dieser Gedanke soll jetzt durch den Schiffskapitän Fleuriais verwirklicht sein, allerdings in anderer Weise, als man es zu Poisson's Zeit an einem Kreisel mit nahezu verticaler Axe vergeblich versucht hatte; der Fleuriais'sche Kreisel muss im Gegenteil eine Drehaxe

besitzen, welche gegen die Verticale um einen Winkel von endlicher Grösse geneigt ist. Die zweite Note erörtert die gegenseitige Stellung der Umdrehungsaxe des um einen festen Punkt derselben beweglichen Körpers, der Axe des resultirenden Paares und der augenblicklichen Drehaxe des Körpers, welche alle drei stets in einer und derselben Ebene liegen. Der Verfasser geht von derjenigen Stellung aus, bei welcher die drei genannten Axen zusammenfallen, beschreibt die darauf folgende Periode, während welcher jene Axen fächerförmig auseinander gehen und sich zuletzt wieder vereinigen; hierauf beginnt eine zweite gleiche Phase der Bewegung. Die aus der Wiederholung solcher Phasen bestehende Drehung des Körpers kann, wie schon Poinsot bemerkt hat, als das Rollen eines beweglichen mit dem Körper fest verbundenen Kegels auf einem transcendenten festen Kegel des Raumes beschrieben werden; über beide Kegel werden einige weitere Angaben gemacht. In der dritten Note zeigt der Verf. durch mehrere Stellen aus Daniel Bernoulli's Schrift: „Principes hydrostatiques et méchaniques ou Mémoire sur la meilleure manière de diminuer le roulis et le tangage" etc., dass dieser Mathematiker zur Beurteilung des durch periodische Schwankungen beeinflussten Ganges einer Pendeluhr auf einem Schiffe ähnliche Schlüsse angewandt habe, wie er selber in seiner Note über den Kreisel. Lp.

G. Hauck. Elementare Behandlung des Kreiselproblems durch Dualisirung mit der Centralbewegung. Hoffmann Z. XVII. 81-90, 423-424.

Franke. Zum Kreiselproblem. Hoffmann Z. XVII. 422.

Verfasser giebt eine von ihm selbst im Unterricht erprobte elementare Behandlung der Rotation eines starren Körpers um eine freie Axe. „Dieselbe lässt Kräftepaare ausser Spiel, benützt nur das Princip der Zusammensetzung rotirender Bewegungen und sucht im übrigen die in Rede stehenden Bewegungseigentümlichkeiten dadurch dem Verständnis zu erschliessen, dass sie deren Analogie mit der Centralbewegung ins Licht [illegible]

bei der Discussion der Kreiselbewegung gefundene Resultat: „Die in einem Punkte festgehaltene Drehaxe eines Kreisels, welcher der Schwerkraft unterliegt, beschreibt eine Rotationskegelfläche mit verticaler Axe“, ist nur angenähert richtig, wie Verfasser selbst in einer später hinzugefügten durch die Bemerkung von Herrn Franke veranlassten Anmerkung zugiebt.

Lg.

A. Schmidt. Die elementare Behandlung des Kreiselproblems. Böklen Mitt. I_3. 65-79, auch separat Tübingen. Fues.

Als Ergänzung zu den elementaren Betrachtungen, die Herr Hauck in der Arbeit angestellt hat, über welche im vorangehenden Referate berichtet ist, entwickelt Herr Schmidt eine Methode, „welche durch die Anschaulichkeit, mit welcher sie das Wesen der fraglichen Bewegung erläutert, der sogenannten Poggendorff'schen Erklärung weit überlegen ist, andererseits durch die Gründlichkeit, mit welcher sie bis zu einer ersten Annäherung ins Detail der Sache einführt, der streng analytischen Behandlung des Problems nicht viel nachsteht, während die Entwickelung ganz auf elementarem Boden bleibt“. Diese V. v. Lang's „Einleitung in die theoretische Physik“ entnommene Methode wird daselbst G. B. Airy zugeschrieben. (Mathematical tracts. Cambridge 1845). Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: „Das Parallelogramm der Rotationen, die Präcession des Kreisels, die Nutation der Kreiselaxe, der nutationsfreie Kreisel“. Im letzten Abschnitte: „Analog oder reciprok?“ stellt der Verfasser die Analogien zwischen der Kreiselbewegung und der Centralbewegung zusammen, während Herr Hauck die beiden Bewegungen als reciprok gegenüber gestellt hatte. Herr Hess macht in der Anzeige dieser und der vorangehenden Arbeiten in Wiedemann's Beiblättern XI. 120-121 auf die Beschränkungen aufmerksam, denen diese Schlussweise unterliegt.

Lp.

J. Bertrand. Le mouvement de la Terre. Léon Foucault et le gyroscope. Flammarion Rev. d'Astr. V. 441-445.

A. Lévy. Explication sur le gyroscope. Flammarion Rev. d'Astr. V. 445-446.

Die erste Note giebt eine historische Uebersicht über die Entstehung der bezüglichen Gedanken und Apparate, die zweite eine Erläuterung des Foucault'schen Gyroskops. Lp.

D. Edwardes. Solution of question 7529. Ed. Times XLIV. 93-94.

Eine dünne homogene elliptische Platte wird auf eine rauhe horizontale Ebene geworfen; die Reibung eines Elementes ist seiner Oberfläche und dem Kubus seiner Geschwindigkeit proportional. Sind u, v die Componenten der Geschwindigkeit des Mittelpunktes zur Zeit t parallel zu den Axen, w die Winkelgeschwindigkeit, so finden (wenn α eine Constante bezeichnet) die Gleichungen statt:

$$\frac{du}{dt}+\alpha[u(u^2+v^2)+\tfrac{1}{4}w^2(a^2+3b^2)u]=0,$$

$$\frac{dv}{dt}+\alpha[v(u^2+v^2)+\tfrac{1}{4}w^2(3a^2+b^2)v]=0.$$

Ist die Scheibe kreisförmig, so ist der Weg des Mittelpunktes eine Gerade. Lp.

G. A. Maggi. Sull' integrazione delle equazioni differenziali, del movimento oscillatorio di un filo flessibile ed inestendibile, intorno ad una configurazione d'equilibrio. Lomb. Rend. (2) XIX. 682-689.

In der Abhandlung: „Sul moto di un filo flessibile e inestendibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio" (Batt. G. XIX, F. d. M. 1881. 706) hat der Verfasser besonders denjenigen Fall betrachtet, bei welchem die Kraft, welcher die Gleichgewichtsfigur des Fadens unterworfen ist, in Grösse und Richtung constant ist. Ist die Lage und Anfangsgeschwindigkeit jedes Punktes des Fadens gegeben, so kann, wie damals gezeigt wurde, die oscillatorische Bewegung in Bezug auf die Gleich-

gewichtslage in den beiden Fällen bestimmt werden, 1) dass eins der Enden fest, das andere frei ist, und 2) dass die Componente dieser Bewegung senkrecht zur Ebene der Gleichgewichtscurve ist, wenn beide Enden fest sind. Beide Probleme hängen von der Integration einer und derselben Differentialgleichung ab.

Zweck der neuen Note ist hauptsächlich der Nachweis, dass bei denselben Annahmen die Componente der Bewegung der Curve parallel zur Ebene der Gleichgewichtslage erhalten werden kann.

Es möge bezeichnen t die Zeit, s die Länge des Bogens, k die Dichte, ϱ den Krümmungsradius, T die Spannung, λ und μ die Verrückungen des Punktes bezw. parallel zur Tangente und zur Normale, endlich $\mathfrak{T}$ die entsprechende Zunahme von T, dann finden folgende Differentialgleichungen statt:

$$k^2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial s} - \frac{T}{\varrho}\left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\partial \mu}{\partial s}\right),$$

$$k^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = \frac{\mathfrak{T}}{\varrho} + \frac{\partial}{\partial s} T\left(\frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\partial \mu}{\partial s}\right), \quad \frac{\mu}{\varrho} = \frac{\partial \lambda}{\partial s},$$

wie Hr. Maggi früher gezeigt und neuerdings Hr. Padova auf directerem Wege bewiesen hat.

Führt man noch die Variable u mittels der Gleichung ein

$$\varrho = \frac{ds}{du},$$

setzt ferner

$$k\varrho = \sigma, \quad \frac{T}{\varrho} = \tau,$$

so lässt sich aus jenen Gleichungen die folgende lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für λ herleiten:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial u} \sigma \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \sigma \lambda\right) = \tau\left(\lambda + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \tau\left(\lambda + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}\right)$$

mit den Nebenbedingungen:

$$u = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}: \ \lambda = 0, \quad \mu = \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$t = 0: \left\{ \begin{array}{l} \lambda = f(u), \quad \mu = \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = g(u), \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = F(u), \quad \dfrac{\partial \mu}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} = G(u). \end{array} \right.$$

Die Integration dieser Gleichung bildet den Gegenstand der Note. In einer ausführlicheren Arbeit will der Verfasser auf verschiedene Einzelheiten zurückkommen, welche jetzt der Kürze wegen haben unterdrückt werden müssen. Lp.

P. Appell. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe.
C. R. CIII. 991-993.

Die Bewegungsgleichungen für einen biegsamen und unausdehnbaren Faden, der in einer Ebene sich bewegt, können in die Form gebracht werden

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)+X=\frac{d^2x}{dt^2};\quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)+Y=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Hierin bedeuten X und Y die Componenten der äusseren Kraft für die Einheit der Masse, und die Spannung wird durch εT gemessen, wenn ε die Masse der Längeneinheit bedeutet. Die Integration dieser Bewegungsgleichungen wird auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit Derivirten vierter Ordnung zurückgeführt.

Wenn α den Winkel bedeutet, den die Tangente des Fadens in einem Punkt zur Zeit t mit der Abscissenaxe bildet, so kann die Gleichung dieser Tangente in der Form dargestellt werden $x\sin\alpha-y\cos\alpha=p'$, wo p' als erste Derivirte einer Function p von α und t aufgefasst werden kann. Die Coordinaten des Berührungspunktes gewinnen die Form $x=p'\sin\alpha+p''\cos\alpha$; $y=-p'\cos\alpha+p''\sin\alpha$, und aus diesen lässt sich herleiten, dass $s=p+p'$ ist, wenn s die Bogenlänge, von einem Endpunkt des Fadens aus gerechnet, bedeutet.

In den obigen Bewegungsgleichungen sind x, y, T als Functionen der unabhängigen Grössen s und t hergestellt. In Folge der Relation $s=p+p'$ kann man x, y, T als Functionen von α und t ausdrücken, und man gewinnt für die Bewegungsgleichungen die Form

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}=-(p'+p''')\left(\Phi+\frac{\partial^2 p}{dt^2}\right);$$

$$T=\left(\frac{\partial p}{dt}+\frac{\partial p''}{dt}\right)^2-(p'+p''')\left(\Psi+\frac{\partial^2 p'}{dt^2}\right).$$

Hierin bedeuten Φ und Ψ die Componenten der äusseren Kraft in Richtung der Tangente und Normale, nämlich $\Phi = X\cos\alpha + Y\sin\alpha$; $\Psi = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha$. Die Grössen X, Y sind gegebene Grössen von x, y, α, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, s und t und können ausgedrückt werden durch α und t und die partiellen Derivirten von p in Bezug auf α und t. Die letzten Formen der beiden Bewegungsgleichungen definiren also T und p als Functionen von α und t. Nach Elimination von T wird alsdann die Gleichung gewonnen

$$2\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p''}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial p'}{dt}+\frac{\partial p'''}{\partial t}\right)-(p''+p^{\mathrm{IV}})\left(\Psi+\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}\right)$$
$$+(p'+p''')\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2}+\Phi-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right)=0,$$

und diese Gleichung definirt p als Function von α und t. Jedes particuläre Integral dieser Gleichung entspricht einer möglichen Bewegung des Fadens unter der Bedingung, dass T positiv ist.

Schn.

F. Grashof. Theorie der Kraftmaschinen. 2. Lieferung, S. 161-320. Leipzig, L. Voss.

Diese zweite Lieferung des im vorigen Bande S. 932 besprochenen Werkes setzt die Betrachtung der Wassermotoren fort und behandelt sehr eingehend und sorgfältig die unterschlächtigen Wasserräder und die Turbinen. Sbt.

G. Herrmann. Die graphische Untersuchung der Centrifugalregulatoren. Z. dtsch. Ing. XXX. 253-259, 301-307.

Der vorliegende Artikel giebt gemäss dem Titel an, wie man auf graphischem Wege ein Urteil über die Eigenschaften eines Regulators gewinnen kann; namentlich über die Gleichmässigkeit des Ganges, den Grad der Empfindlichkeit, sowie über die sogenannte Energie. Der Kräfteplan wird für eine grosse Zahl verschiedener Formen des Regulators entworfen. Für jeden Regulator giebt es zu jeder einzelnen Stellung eine einzige wohlbestimmte Gleichgewichtsgeschwindigkeit, oder anders ausgedrückt

eine bestimmte theoretische Zahl n von Umdrehungen. Durch die Reibung und andere störende Widerstände wird bewirkt, dass die Tourenzahl bis zu einer Zahl $n' > n$ wachsen und bis zu einer Zahl $n'' < n$ sinken kann, ohne dass eine Lageänderung des Regulators eintritt. Die beiden Zahlen $\frac{n'-n}{n}$ und $\frac{n-n''}{n}$ werden nahezu unter einander gleich sein, und für alle Lagen des Regulators fast denselben Wert haben. Ein mittlerer Wert derselben heisst der Coefficient der Unempfindlichkeit des Regulators. Als Energie eines Regulators wird diejenige Zugkraft der Hülse aufgefasst, welche unter Annahme einer Geschwindigkeitsänderung um ein Prozent auf jedes Kilogramm der Regulatormasse entfällt.

Neben dem durch den Titel gekennzeichneten Zwecke hat den Verfasser bei Veröffentlichung der Abhandlung auch die Absicht geleitet, an einem guten Beispiele die Vorteile graphischer Methoden in der Maschinentechnik zu zeigen. F. K.

J. Taubeles. Ueber die Beschleunigung des Kreuzkopfes eines Kurbelmechanismus. Civiling. (2) XXXII. 635-640.

Ein Kurbelmechanismus besteht aus drei in einer Ebene liegenden Bestandteilen, einer in ihrer Richtung beweglichen Geraden, einer um einen Punkt O drehbaren Scheibe, und einer zweiten Stange, welche den Endpunkt B der ersteren mit einem Punkt A der Scheibe verbindet. Der Punkt A heisst Kurbelkopf, der Punkt B Kreuzkopf. Indem die Stange B sich in ihrer Richtung verschiebt, dreht sich die Scheibe um den Punkt O. Soll die Winkelgeschwindigkeit der letzteren gleich 1 sein, so wird B sich mit variabler Geschwindigkeit bewegen. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie man auf graphischem Wege die Beschleunigung des Punktes B bei gegebener Lage des Apparates bestimmen kann. F. K.

L. Brennecke. Versuche über den Widerstand von Schraubenpfählen gegen Herausreissen. Z. f. Bauwesen. XXXVI. 449-452.

Es werden die Ergebnisse von Versuchen mitgeteilt, welche der Herr Verfasser in Bezug auf die Kraft anstellte, welche erforderlich ist, um einen in einer Sandmasse befindlichen kreisförmigen Teller aus der ersteren herauszureissen. Der Herr Verfasser glaubt seine Versuchsresultate durch die Formel

$$W = \gamma\pi h\left(r^2 + rh\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + \tfrac{1}{3}h^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

darstellen zu können, in welcher W die gesuchte Kraft, r den Radius des Tellers, h die Höhe der belastenden Sandschicht, γ deren specif. Gewicht und φ den Reibungswinkel bezeichnet.

F. K.

A. SEYDLER. Ausdehnung der Lagrange'schen Behandlung des Dreikörper-Problems auf das Vierkörper-Problem. Prag Abh. (7) I, separat Prag, Calve.

Referat im nächsten Jahrgang.

O. BACKLUND. Dr. Harzer's Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. St. Petersburg. 20 S. 8°.

B. Hydrodynamik.

R. LIPSCHITZ. Beiträge zur Theorie der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit. Kronecker J. C. 89-120.

Der erste Versuch einer mathematischen Behandlung der Bewegung elastischer Flüssigkeiten ohne Vernachlässigung höherer Potenzen der gesuchten Veränderlichen rührt bekanntlich von Riemann her. In der Abhandlung über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite wird in der eben bezeichneten Art eine Flüssigkeitsbewegung behandelt, bei welcher die Geschwindigkeit in jedem Punkte senkrecht zu einer Schar paralleler Ebenen gerichtet ist; in jedem Individuum dieser Flächenschar variirt der Druck und die Geschwindigkeit nur mit

der Zeit, nicht aber von Punkt zu Punkt der Ebene. In der vorliegenden Abhandlung nimmt Herr Lipschitz die Untersuchung wieder auf, indem er zunächst voraussetzt, dass an Stelle der Schar paralleler Ebenen eine andere vorläufig unbestimmt gelassene Schar von Flächen tritt. Es kommt sehr bald zu Tage, dass die Flächenschar nicht willkürlich sein darf, sondern zwei Bedingungen befriedigen muss. Es muss sich nämlich eine solche Form der Gleichung

$$G(x, y, z) = \text{const.}$$

der Flächen dieser Schar finden lassen, dass gleichzeitig

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \chi(G) \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Ferner müssen die äusseren Kräfte ein Potential haben, dessen Niveauflächen die Flächen $G = \text{const.}$ sind. Als die einzigen Flächenscharen, welche die beiden Bedingungen befriedigen, sind zu nennen die Scharen paralleler Ebenen, die Scharen coaxialer Cylinder und die Scharen concentrischer Kugeln. Bezeichnet man nun mit r den Abstand einer der Ebenen von einer festen Ebene, resp. den Radius einer Cylinder- oder Kugelfläche, mit t die Zeit, mit ω die Geschwindigkeit und mit ϱ die Dichtigkeit, so lauten die beiden Gleichungen für die Flüssigkeitsbewegung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} - \sigma(r) + \frac{1}{\varrho}\varphi'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho\omega}{\partial r} + \frac{n-1}{r}\varrho\omega = 0,$$

wo $\sigma(r)$ die Kraft vorstellt, welche senkrecht zur Oberfläche wirkt, und $\varphi(\varrho)$ den Druck als Function der Dichtigkeit darstellt; die Zahl n hat einen der Werte 1, 2 oder 3, jenachdem es sich um Ebenen, Cylinder oder Kugeln handelt. Aus den Gleichungen ergiebt sich, dass die Ausdrücke

$$dV = \omega\, dr + \left(-\tfrac{1}{2}\omega^2 + \int \sigma(r)\, dr - \int \frac{1}{\varrho}\varphi'(\varrho)\, d\varrho\right) dt,$$

$$dL = r^{n-1}\varrho(dr - \omega dt)$$

vollständige Differentiale sind, wie umgekehrt aus diesen Bedingungen die obigen Gleichungen hervorgehen. Statt ϱ und ω als Functionen der Grössen r und t zu betrachten, kann man auch r und ϱ ansehen als Functionen der Zeit t und desjenigen Wertes r_1, welcher die Lage des Flüssigkeitsteilchens zu einer bestimmten Zeit t_1 angiebt. Die Gleichungen lauten dann

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \sigma(r)\right)\left(\frac{\partial r}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r_1}\right) = 0,$$

$$r^{n-1}\varrho\left(\frac{\partial r}{\partial r_1}\right) = r_1^{n-1}\varrho_1.$$

Es zeigt sich also, wenn wieder auf die ursprünglichen Veränderlichen zurückgegriffen wird, dass

$$dL = r^{n-1}\varrho(dr - \omega dt) = r_1^{n-1}\varrho_1 dr_1$$

und L selbst eine nur von r_1 abhängende Function ist, deren geometrische Bedeutung auf der Hand liegt. Man kann auch, wie es schon in der Abhandlung Riemann's geschieht, die Grössen ω und ϱ als unabhängige Veränderliche einführen. Dann empfiehlt es sich aber, eine der Grössen:

$$W = \omega r + \left(-\frac{\omega^2}{2} + \int \sigma(r)\,dr - \int \frac{d\varrho}{\varrho}\varphi(\varrho)\right)t - V,$$

resp.

$$M = r^{n-1}\varrho r - r^{n-1}\varrho\omega t - L$$

als abhängige Veränderliche zu bestimmen. Wenn das geschehen ist, ergeben sich r und t sehr einfach.

Die permanente Bewegung, welche den aufgestellten Bewegungsgleichungen genügt, ist leicht zu bestimmen. Man kann aber auch die nicht so weit gehende Forderung stellen, dass nur die Dichtigkeit ϱ von t unabhängig und also gleich einer Function ϱ_1 von r allein sein soll. Dann folgt aus der zweiten der zuerst angeführten Bewegungsgleichungen unmittelbar

$$r^{n-1}\varrho_1\omega = f(t).$$

Setzt man den hieraus hervorgehenden Wert ω in die erste Gleichung ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{f'(t)}{r^{n-1}\varrho_1} - \frac{f^2(t)}{(r^{n-1}\varrho_1)^3}\frac{d(r^{n-1}\varrho_1)}{dr} - \sigma(r) + \frac{1}{\varrho_1}\varphi'(\varrho_1)\frac{d\varrho_1}{dr} = 0.$$

Soll nun $f(t)$ nicht constant sein, so müssen sich die drei Coefficienten, welche von r allein abhängen, wie drei Constante $1 : A : -C$ verhalten. Dann ergiebt sich

$$r^{n-1}\varrho_1 = \frac{1}{Ar+A_0}, \quad \sigma(r)+\varphi'(\varrho_1)\left(\frac{A}{Ar+A_0}+\frac{n-1}{r}\right) = (Ar+A_0)C,$$

und es wird

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}}f(t) = \frac{e^{\lambda(t-t_0)}+e^{-\lambda(t-t_0)}}{e^{\lambda(t-t_0)}-e^{-\lambda(t-t_0)}}, \quad \text{wo } \lambda = \sqrt{A.C} \text{ ist.}$$

Ferner ergiebt sich

$$L = \frac{1}{A}\log\frac{Ar+A_0}{e^{\lambda(t-t_0)}-e^{-\lambda(t-t_0)}}.$$

Da nun weiter L, als Function von r_1 und t betrachtet, lediglich von der erst genannten Grösse abhängt, so muss:

$$\frac{Ar+A_0}{e^{\lambda(t-t_0)}-e^{-\lambda(t-t_0)}} = \frac{Ar_1+A_0}{e^{\lambda(t_1-t_0)}-e^{-\lambda(t_1-t_0)}}$$

sein; durch diese Gleichung ist dann die Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens bestimmt. Uebrigens mag bemerkt werden, dass die Möglichkeit einer Bewegung der eben beschriebenen Art an eine Beziehung zwischen der Kraft $\sigma(r)$ und der Function $\varphi(\varrho)$ geknüpft ist, da zwischen den Veränderlichen r und ϱ_1 sich zwei Beziehungen ergeben haben. In dem Grenzfalle $A = 0$ wird $f(t) = Ct+E$, und es wird ferner:

$$r = r_1+\tfrac{1}{2}Ct^2+Et-\tfrac{1}{2}Ct_1^2-Et_1.$$

In diesem Falle bewegt sich also jedes Flüssigkeitsteilchen mit constanter Beschleunigung in gerader Linie. Der bisher ausgeschlossene Fall $f(t) = \text{const.}$ ist leicht zu behandeln und wird daher hier übergangen.

Ist die wirkende Kraft die Schwere, so müssen die Flächen $G = \text{const.}$ parallele Ebenen sein. In den beiden ersten Gleichungen ist dann $\sigma(r) = g$ und $n = 1$ zu setzen.

Wenn die Determinante

$$D = \frac{\partial\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial\varrho}{\partial t}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\varrho}{\partial r},$$

wo $\varepsilon = \omega - gt$ ist, nicht verschwindet, so dürfen die Grössen

$$R = \tfrac{1}{2}\left(\omega - gt + \int \frac{\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{\varrho} d\varrho\right) \text{ und } S = \tfrac{1}{2}\left(\omega - gt - \int \frac{\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{\varrho} d\varrho\right)$$

als unabhängige Veränderliche eingeführt werden; dann ist zur Lösung des Problems die Erfüllung der Bedingung erforderlich, dass die Ausdrücke

$$d\Psi = \left(r - \omega t + \frac{gt^2}{2} - \sqrt{\varphi'(\varrho)}t\right) dR$$
$$- \left(r - \omega t + \frac{gt^2}{2} + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,t\right) dS$$

$$d\Theta = \left(r - \omega t + \frac{gt^2}{2} - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,t\right) \frac{\varrho}{\sqrt{\varphi'(\varrho)}} dR$$
$$+ \left(r - \omega t + \frac{gt^2}{2} + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,t\right) \frac{\varrho}{\sqrt{\varphi'(\varrho)}} dS$$

vollständige Differentiale sind; also führt das Problem auf dieselbe Differentialgleichung wie das Riemann'sche, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\varrho}{\sqrt{\varphi'(\varrho)}} \frac{\partial \Psi}{\partial R}\right) + \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\varrho}{\sqrt{\varphi'(\varrho)}} \frac{\partial \Psi}{\partial S}\right) = 0.$$

Ist dieselbe gelöst, so lassen sich die Grössen r, t, ϱ und ω als Functionen der beiden Parameter R und S darstellen.

Die Determinante D kann auf die Form

$$D = -\varrho \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r}$$

gebracht werden, und andererseits leitet man leicht die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \left(\omega + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) \frac{\partial R}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\omega - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

ab. Soll also $D = 0$ sein, so muss entweder $\frac{\partial R}{\partial r}$ und damit auch $\frac{\partial R}{\partial t}$ oder $\frac{\partial S}{\partial r}$ und $\frac{\partial S}{\partial t}$ verschwinden, d. h. es muss in diesem Falle R oder S constant sein. Nehmen wir den ersteren Fall, dass R constant, so muss wegen der Bedingung, dass $d\Psi$ und $d\Theta$ vollständige Differentiale sind,

$$r - \omega t + \tfrac{1}{2} gt^2 + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,t$$

eine Function von S sein. Hiermit ist dann die Aufgabe für den Fall gelöst, dass $D = 0$ ist. F. K.

N. Marin. Sur le mouvement d'un fluide indéfini, parfaitement élastique. C. R. CIII. 989-990.

Die vorliegende Notiz ist eine äusserst gedrängte Inhaltsangabe einer grösseren Abhandlung desselben Autors. Da sich aus derselben nicht ersehen lässt, wie der Herr Verfasser zu seinen Resultaten gelangt, verschieben wir das Referat, bis die Abhandlung in extenso erschienen. F. K.

A. B. Basset. On the motion of a liquid ellipsoid under the influence of its own attraction. Lond. M. S. Proc. XVII. 255-262.

Riemann hat (cf. Riemann's Werke p. 168) die Differentialgleichungen aufgestellt, von denen die Bewegung einer homogenen Flüssigkeitsmasse abhängt, deren Teilchen sich nach dem Gravitationsgesetz anziehen, und die so rotirt, dass ihre Grenzfläche stets ein Ellipsoid mit variabler Grösse der Hauptaxen bildet. Dieselben Gleichungen werden hier auf anderem Wege, unter Zugrundelegung der hydrodynamischen Gleichungen in der Euler'schen Form, abgeleitet. Der Bedingung an der Oberfläche des Ellipsoids wird genügt, wenn man für die absoluten Geschwindigkeiten der einzelnen Flüssigkeitsteilchen lineare Functionen der Coordinaten setzt, die im Mittelpunkte verschwinden. Die Coefficienten dieser Functionen lassen sich durch die veränderlichen Axen und ihre Ableitungen nach der Zeit, sowie durch die Rotationsgeschwindigkeiten um diese Axen ausdrücken.

Die Rotationen um die Axen werden ferner je in zwei Teile zerlegt, so dass der erste Teil eine Rotation darstellt, die so erfolgt, als wäre das Ellipsoid in jedem Moment fest. Die Componenten der genannten Teilrotationen werden dann durch sechs neue Variable ausgedrückt, die Ausdrücke in die auf die variabeln Axen transformirten hydrodynamischen Gleichungen

eingesetzt und diese in passender Weise mit den sonstigen Bedingungen des Problems combinirt. Zum Schluss folgt eine Anwendung auf den von Dirichlet behandelten Fall, in dem das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, welches nur um die Axe der Figur rotirt. Wn.

HUGONIOT. Sur un théorème général relatif à la propagation du mouvement. C. R. CII. 858-860.

Anknüpfend an die F. d. M. XVII. 1885. 912 besprochenen Untersuchungen über Fortpflanzung von Bewegungen durch Flüssigkeiten, verallgemeinert der Herr Verfasser dieselben in der vorliegenden Note. Es wird vorausgesetzt, dass in dem ganzen Gebiet die zweiten Ableitungen der Verrückungen nach der Zeit t lineare Functionen der nach den Coordinaten gebildeten zweiten Ableitungen sind, deren Coefficienten als gegebene Functionen der Coordinaten, der Verrückungen und der ersten Ableitungen der letzteren betrachtet werden. Eine Fläche S soll das Gebiet in zwei Teile zerlegen, in denen die Bewegung durch je ein particuläres Integral dieser Differentialgleichungen bestimmt ist. Dann müssen an der Fläche S die Verrückungen und ihre ersten Ableitungen stetig sein, während die zweiten Ableitungen unstetig sein werden; die Unterschiede der letzteren an der Fläche S werden jedoch an der Fläche drei aus den Differentialgleichungen für die Verrückungen unmittelbar hervorgehenden linearen Gleichungen genügen. In dem Zeitelemente dt möge nun die Trennungsfläche S in eine benachbarte Lage S' übergehen; und zwar soll dn das Stück der Normale in einem Punkte von S sein, welches zwischen beiden Flächen liegt; dann heisst $\frac{dn}{dt}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung. In Folge des Umstandes, dass zur Zeit t die Verrückungen und ihre ersten Ableitungen an der Fläche S und zur Zeit $t+dt$ an der Fläche S' stetig sind, erhält man für die Unterschiede der zweiten Ableitungen weitere Beziehungen, durch welche sich sämtliche auf eine Componente bezüglichen Unterschiede als homogene, lineare

Functionen einer derselben darstellen lassen; z. B. der Grösse $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$, resp. $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}$, resp. $\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}$. Die Coefficienten sind umgekehrt proportional zu $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ und hängen ausserdem von den Richtungscosinus der Normale ab. Benutzt man nun jene ersterwähnten Gleichungen, so erhält man drei homogene lineare Gleichungen für die drei Unterschiede

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2};$$

es muss also die Determinante verschwinden. Diese Bedingung stellt eine Gleichung dritten Grades für $\left(\frac{dn}{dt}\right)^2$ dar. Es existiren demnach sechs Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, von denen je zwei dem absoluten Betrage nach gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt sind. Jedem Werte derselben entspricht ein Wert der relativen Beschleunigung. F. K.

HUGONIOT. Sur un théorème relatif au mouvement permanent et à l'écoulement des fluides. C. R. CIII. 1178-1181.

HUGONIOT. Sur l'écoulement des fluides élastiques. C. R. CIII. 1253-1254.

Die erste Abhandlung beweist den interessanten Satz:

„Bei permanenter Flüssigkeitsbewegung ist an der Stelle der grössten Contraction eines Flüssigkeitsfadens die Geschwindigkeit gerade gleich der Schallgeschwindigkeit, welche den zu der betreffenden Stelle gehörenden Werten des Druckes und der Dichtigkeit entspricht." Der Druck selbst, welcher an der fraglichen Stelle herrscht, ergiebt sich aus einer von der Natur der Flüssigkeit abhängenden Gleichung, und da auch die Dichtigkeit durch den Druck bestimmt ist, so kennt man für die am meisten contrahirte Stelle des Strahles Geschwindigkeit und Dichtigkeit. Hieran knüpft die zweite Abhandlung an, indem hervorgehoben wird, dass sich, wenn der Querschnitt des contrahirten Strahles

bekannt wäre, demnach die Ausflussmenge berechnen liesse. Auf diesen Querschnitt oder, was dasselbe besagt, sein Verhältnis zur Grösse der Oeffnung kommt alles an. Es wird gezeigt, dass bei einer Oeffnung, welche mit einer conischen convergenten Mündung versehen ist, dieses Verhältnis gleich 1 sein müsse.

F. K.

A. G. Greenhill. Wave motion in Hydrodynamics. Newcomb Am. Journ. IX. 62-112.

Der Verfasser giebt in der vorliegenden Abhandlung eine, wie dem Referenten scheint, ziemlich vollständige Zusammenstellung dessen, was durch die Untersuchungen über die Theorie der Wellen bis jetzt zu Tage gefördert ist; neue Methoden werden in der vorliegenden Abhandlung nicht abgeleitet, wohl aber werden mit Hülfe der bisher entwickelten Methoden einzelne neue Fragen behandelt. Besonders interessant erschien dem Referenten die an Kirchhoff's Untersuchungen sich anlehnende Behandlung der Wellenbewegung in einem Kanale mit dreieckigem Querschnitte, dessen Wände mit dem Horizont Winkel von je dreissig Grad einschliessen. Wie bei dem von Kirchhoff selbst behandelten Falle eines Kanales, dessen Wände gegen die Horizontalebene um 45° geneigt sind, lassen sich die hier vorgeführten Schwingungen durch Exponential- und trigonometrische Functionen darstellen. Während aber in dem früheren Falle alle Schwingungen, sowohl diejenigen, bei welchen die Mitte ein Schwingungsbauch, als auch diejenigen, bei welchen die Mitte ein Schwingungsknoten ist, auf diesem Wege behandelt werden konnten, lassen sich bei einer Wandneigung von 30° nur die Schwingungen der erstgenannten Art in dieser Weise behandeln und werden auch in der vorliegenden Abhandlung allein untersucht.

Die §§ 1 bis 15 der schönen und reichhaltigen Arbeit behandeln die Wellenbewegung in Gewässern constanter Tiefe mit Rücksicht auf die verschiedenartigsten beeinflussenden Momente; z. B. die Oberflächenspannung, das Vorhandensein des Windes, einer bedeckenden Eisschicht, von Schallwellen, welche

die Oberfläche des Wassers treffen, und andere Umstände. In den §§ 16 bis 23 werden im Anschluss an Kirchhoff die stehenden Wellen in Gewässern mit geneigtem Ufer und im Anschluss an Kelland die fortschreitenden Wellen in Kanälen mit dreieckigem Querschnitt behandelt. Der § 24 behandelt eine mögliche Wellenbewegung für ein kegelförmiges Gefäss und § 28 die allgemeine Aufgabe für einen Cylinder. F. K.

W. Voigt. Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. Klein Ann. XXVIII. 14-33.

Die Abhandlung stimmt im wesentlichen mit der im vorhergehenden Jahrgang besprochenen Abhandlung desselben Verfassers überein (F. d. M. XVII. 1885. 909). F. K.

J. Isaacksen. Ueber die Ablenkung von Wasserstrahlen. Civiling. (2) XXXII. 336-351.

Es wird zunächst eine Bewegung des Wassers bestimmt, bei welcher alle Flüssigkeitsteilchen sich in parallelen Kreisbahnen bewegen, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Der Verfasser wird auf jene bekannte Flüssigkeitsbewegung dieser Art geführt, welche ein Potential besitzt; bei derselben ist bekanntlich die Geschwindigkeit umgekehrt proportional dem Abstande von der Axe, der Druck bis auf eine additive Constante umgekehrt proportional dem Quadrate dieser Grösse. Dann wird der Uebergang der geradlinigen Flüssigkeitsbewegung in die soeben besprochene Bewegung behandelt. Die Ergebnisse werden auf die Theorie der Turbinen und auf die Gestalt des Wasserspiegels in Flusskrümmungen angewandt. F. K.

K. Von der Mühll. Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen, nach Johann Rudolf Merian bearbeitet. Klein Ann. XXVII. 575-600.

Den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet eine Bear-

beitung der im Jahre 1828 zu Basel erschienenen Schrift gleichen Titels von J. R. Merian; dieselbe hat die Wellenbewegung in Gefässen constanter Tiefe zum Gegenstande. Es ist ein dankenswertes Unternehmen des Herrn K. VonderMühll, die Aufmerksamkeit der Mathematiker wieder auf diese längst vergriffene und in neuerer Zeit fast gar nicht citirte Schrift zu lenken. Die allgemeinen Betrachtungen, welche der Behandlung des speciellen Problems — die Wellenbewegung auf der Oberfläche cylindrischer Gefässe mit verticaler Axe — vorangehen, sowie die auf dieses selbst bezüglichen Entwickelungen sind im Lauf der seit dem Erscheinen der oben genannten Schrift verflossenen Jahrzehnte in den Allgemeinbesitz der Mathematiker übergegangen und scheinen daher eines speciellen Berichtes nicht zu bedürfen.

F. K.

C. Razzaboni. Sopra alcuni casi di efflussi laterali. Bologna Mem. (4) VI. 341-362.

In der weitverbreiteten unrichtigen Art wird aus der bei unendlich kleinen Oeffnungen geltenden Formel für die Ausflussmenge diejenige für eine Oeffnung endlicher Grösse durch eine doppelte Quadratur abgeleitet, gerade als ob jedes Element einer solchen Oeffnung eine unendlich kleine selbständige Oeffnung wäre. Nachdem die erforderlichen, leichten Quadraturen für eine bestimmte Klasse von Oeffnungen ausgeführt sind, wird die Zeit bestimmt, in welcher das Niveau im Gefässe um eine bestimmte Höhe sinkt; das erfordert wiederum nur die Ausführung einer einfachen Quadratur. Besonders behandelt wird der Fall, dass der obere Rand der Oeffnung höher liegt als das Niveau der Flüssigkeit im Gefässe. F. K.

Th. Vautier. Sur la vitesse d'écoulement des liquides. C. R. CIII. 372-375.

Die Ausflussgeschwindigkeit aus einer kleinen Oeffnung in dem dünnen horizontalen Boden eines Gefässes wird auf folgendem Wege experimentell bestimmt. In der verticalen Axe des

Ausflussgefässes senkrecht über dem Mittelpunkt der Oeffnung befindet sich eine mit einem Gemisch von Nitrobenzin und Terpentinöl gefüllte Röhre. Die Tropfen dieser Emulsion, welche dasselbe specifische Gewicht wie Wasser hat, bewegen sich in der Axe des Strahles und zwar mit derselben Geschwindigkeit wie die Wasserteilchen. Ein Spiegel, welcher sich um eine verticale Axe dreht, entwirft nun auf einem Schirm ein Bild der Tropfen, das sich in schiefer Richtung bewegt. Ist V die horizontale Componente der Geschwindigkeit dieser Bewegung, welche aus der Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels zu bestimmen ist, und ist α der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung mit der Horizontalen bildet, so erhält man die verticale Componente und damit die gesuchte Ausflussgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$v = V \operatorname{tg} \alpha.$$

In Bezug auf die Details der Versuche verweisen wir auf die Abhandlung selbst. F. K.

Pn. Wassergeschwindigkeit in nicht voll laufenden kreisförmigen Kanälen. Dtsche. Bauztg. XX.

Bezeichnet r den Radius der Röhre, φ das Gefälle, Q die sekundliche Wassermenge und k Eytelwein's Coefficienten 50,9, so ergiebt sich für den Centriwinkel, welcher zu dem benetzten Röhrenumfang gehört, der Wert

$$\theta = \sqrt[8]{\frac{12^3}{k^2} \frac{Q^2}{r^5 \varphi}}$$

und für die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt[8]{\frac{k^2}{12} \frac{Q^2 \varphi^3}{r}}.$$

F. K.

A. Frank. Die Berechnung der Kanäle und Rohrleitungen nach einem neuen einheitlichen System mittels logarithmo-graphischer Tabellen. München und Leipzig. R. Oldenburg.

Empfehlende Besprechung Hannöver'sche Ztschrift. XXXII, 643. F. K.

Ueber die Theorie der Abflussmenge über Ueberfallwehre. Wochbl. für Bauk. VIII. 189-190.

Im Jahrgang 1885 der Ann. des Ponts et Chaussées hat Herr Kleitz ein Verfahren zur Ableitung der bekannten Formel für die Abflussmenge bei Ueberfallwehren

$$Q = \tfrac{2}{3} m l H \sqrt{\tfrac{2}{3} g H}$$

angegeben. Dasselbe wird hier reproducirt. F. K.

Joh. Thime. **Ueber die saugende Wirkung conisch-divergenter Ansatzröhren.** Auszug aus „Gornago Journala“ (Berg. Journal) 1884 No. 1. Civiling. (2) XXXII. 463-472.

Der Inhalt der Abhandlung geht aus dem Titel hervor; die vorher gehenden theoretischen Betrachtungen werden nach der in der technischen Hydraulik üblichen Art angestellt. F. K.

H. J. Sharpe. **Motion of compound bodies thro' liquids.** Edinb. Proc. XIV. 29-35.

Die betrachtete Aufgabe ist eine von nur zwei Dimensionen; nämlich statt eines unendlichen Cylinders haben wir den zur Axe senkrechten Schnitt. Dieser Schnitt ist eine discontinuirliche Linie, symmetrisch bezüglich der x-Axe, und aus einem Halbkreise $r = a$ $(\theta = 0$ bis $\pm \tfrac{1}{2}\pi)$ und zwei unendlichen Zweigen

$$\theta - \frac{\pi}{a} \cdot \frac{r}{a} \sin\theta + \frac{2}{1\,.\,2\,.\,3} \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta - \cdots (\theta = \pm \tfrac{1}{2}\pi \text{ bis } \pm \pi)$$

zusammengesetzt. Der Einfachheit wegen ist der Körper in Ruhe angenommen, die Flüssigkeit hinter ihm in Bewegung mit einer Geschwindigkeit gleich $-c$. Danach kann die entstehende rotationslose Bewegung der Flüssigkeit vollständig bestimmt werden. Cly. (Lp.)

Sir W. Thomson. **On stationary waves in flowing water.** Nature. XXXIV [illegible]

[illegible] Untersuchung ist die Wellenbewegung,

welche ein gleichmässig vorwärts rückendes Schiff in vorher ruhigem Wasser erzeugt. Der vom Verfasser für die Nature gelieferte Auszug seiner der British Association gemachten Mitteilung beschränkt sich auf die zweidimensionale Bewegung.

Lp.

L. DE BUSSY. Détermination du mouvement angulaire que prend un navire sur une houle de vitesse et de grandeur données. C. R. CII. 35-38.

A. LEDIEU. Considérations sur le roulis à propos d'une communication récente de M. de Bussy. C. R. CII. 581-585.

L. DE BUSSY. Observations sur une note de M. Ledieu, relative à des considérations sur le roulis. C. R. CII. 1446-1449.

A. LEDIEU. Dernières objections aux formules de M. de Bussy sur le roulis. C. R. CIII. 23-27.

Ein Schiff befindet sich in ruhigem oder bewegtem Wasser im Gleichgewicht, wenn die durch die Masten gelegte Ebene senkrecht zur Wasseroberfläche steht. Im Falle, dass das Schiff sich nicht in diesem Gleichgewichtszustande befindet, wird die Mastenebene das Bestreben zeigen, in die vorbezeichnete Lage zu gelangen, und in Folge dessen Schwingungen um dieselbe ausführen. Im Anschluss an die Herren de Benazé und Risbec stellt Herr de Bussy den Winkel θ, welchen die Mastenebene zur Zeit t mit der Normallage bildet, durch die Gleichung:

$$(3) \qquad \theta = \eta(\cos t + \frac{\varepsilon}{k}\sin kt)$$

dar, in welcher $\varepsilon = -\frac{\eta'}{\eta}$ und k eine Constante ist; η ist als Function von t durch die empirische Formel

$$(1) \qquad (1+\eta) = (1+\eta_0)^{\alpha^{-\frac{at}{T}}}$$

bestimmt, in welcher η_0, a, α und T Constante sind, von denen die letztere $\frac{\pi}{k}$ ist. Wenn man aus Formel (1) den Wert

$\varepsilon' = \frac{T\varepsilon}{\alpha \log a}$ ableitet, so ergiebt sich zwischen ε und η die Gleichung

$$(6) \qquad \varepsilon' = \frac{(1+\eta)\log(1+\eta)}{\eta}.$$

Bildet man andrerseits aus Gleichung (3) den Wert $\Omega = \frac{d\theta}{dt}$, für welchen der Herr Verfasser in der Voraussetzung, dass ε wie eine Constante zu behandeln sei, den Ausdruck

$$(4) \qquad \Omega = -\eta \frac{k^2 + \varepsilon^2}{k} \sin kt$$

erhält, so kann man aus (3) und (4) t eliminiren und erhält dann die Gleichung

$$(5) \qquad \eta^2 = \frac{k^2\theta^2 + (k'\varepsilon'\theta + \Omega)^2}{k^2 + k'^2\varepsilon'^2}. \qquad \left(k' = \frac{\alpha \log a}{T}\right).$$

Ist nun θ_1 und Ω_1 ein zusammengehörendes Wertepaar θ und Ω, so kann man aus Gleichung (5) und (6) die zugehörigen Werte ε_1 und η_1 bestimmen. Aus Gleichung (4) erhält man einen Wert t_1 von t, d. h. die Zeit, welche seit dem letzten grössten Ausschlage verflossen ist; indem man noch η_1 und t_1 für η und t in (1) einsetzt, erhält man eine Gleichung zur Bestimmung von η_0, d. h. der einzigen von Fall zu Fall für dasselbe Schiff variirenden Constanten. Damit ist dann, da die übrigen Constanten, d. h. $k = \frac{\pi}{T}$ und $k' = \frac{\alpha \log a}{T}$, als nur von der Natur des Schiffes abhängend gegeben sind, die Bewegung des Schiffes vollständig bestimmt. Sollen nun für eine Zeit t_2, nachdem θ und Ω die Werte θ_1 und Ω_1 hatten, die Werte von θ und Ω bestimmt werden, so hat man zunächst in Gleichung (1) für t den Wert $t_1 + t_2$ zu setzen und erhält dann $1 + \eta_2 = (1+\eta_0)^{e^{-k'(t_1+t_2)}}$; ferner erhält man aus Gleichung (6) $\varepsilon'_2 = \frac{(1+\eta_2)\log(1+\eta_2)}{\eta_2}$ und mit [illegible] Werten [illegible] (3)

[illegible] $\frac{k'\varepsilon'_2}{k} \sin k(t_1 + t_2)\Big)$

und (4)

$$\Omega_2 = -\eta_2 \frac{k^2 + \varepsilon_2'^2 k'^2}{k} \sin k(t_1 + t_2).$$

Herr Ledieu erhebt hiergegen den Einwand, dass bei der Bildung des Ausdrucks Ω der Wert $\frac{d\varepsilon}{dt}$ vernachlässigt sei, was bei der Form des Zusammenhangs zwischen η und t nicht zulässig sei.

Aus Formel (6) erhält man nämlich:

$$\frac{d\varepsilon'}{d\eta} = \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta^2}\log(1+\eta) = \frac{1}{\eta} - \frac{\varepsilon'}{\eta(1+\eta)}.$$

Multiplicirt man dieses mit $k'\eta'$, so ergiebt sich

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\eta'}{\eta}\left(k' - \frac{\varepsilon}{1+\eta}\right) = -\varepsilon\left(k' - \frac{\varepsilon}{1+\eta}\right).$$

Aus dem correct gebildeten Wert

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = -\eta \frac{k^2 + \varepsilon^2 - \frac{d\varepsilon}{dt}}{k} \sin kt$$

ergiebt sich dann der Wert

$$(4_b) \qquad \Omega = -\frac{\eta}{k}\left(k^2 + \varepsilon^2 \frac{\eta}{1+\eta} + k'\varepsilon\right)\sin kt.$$

Mit Rücksicht auf diese Correctur ist dann die Gleichung (5) zu modificiren. Herr de Bussy hebt dem gegenüber hervor, dass in der Praxis thatsächlich $\frac{d\varepsilon}{dt}$ gegen $k^2 + \varepsilon^2$ sehr klein und damit die begangene Vernachlässigung gerechtfertigt sei. Die übrigen Teile der Discussion beziehen sich auf Fragen mehr praktischer Natur und müssen daher hier unberücksichtigt bleiben.

F. K.

Boussinesq. Sur un manuscrit de Saint-Venant intitulé: Résistance des fluides. C. R. CIII. 179-184.

Inhaltsangabe eines Manuscriptes, welches sich in dem Nachlasse des berühmten französischen Gelehrten gefunden hat, und entsprechend einem Wunsche des Verstorbenen in den Memoiren der Akademie veröffentlicht werden soll, und zwar in

Verbindung mit zwei anderen hydraulischen Abhandlungen desselben Verfassers. Das Hauptmanuscript enthält nach dem Bericht des Herrn Boussinesq eine eingehende Untersuchung über den Widerstand, welche ein fester Körper in einer reibenden Flüssigkeit findet. Von den beiden andern Abhandlungen betrifft die eine den Energieverlust, welcher beim plötzlichen Uebergang einer Flüssigkeit aus einem engeren in einen weiteren Querschnitt zu finden ist, während die zweite den Einfluss der Centrifugalkräfte auf die Bewegung in Wasserläufen zum Gegenstand hat.

F. K.

A. B. Basset. On the motion, in an infinite liquid, of a cylinder whose cross section is the inverse of an ellipse with respect to its centre. Quart. Journ. XXI. 336-339.

Die schon einmal von demselben Herrn Verfasser behandelte Aufgabe wird hier in einfacherer Weise gelöst, indem an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten (x, y) in einer zur Axe des Cylinders senkrechten Ebene, Coordinaten (ξ, η) eingeführt werden, welche mit jenen durch die Beziehung

$$x+iy = \frac{c}{\cos(\xi+i\eta)}$$

verbunden sind; dann ist bei passender Wahl von c die Gleichung der Oberfläche $\eta =$ Const. Die Stromfunction ergiebt sich in einfacher Weise als unendliche Reihe, welche nach den sinus und cosinus der ungeraden Vielfachen von ξ fortschreitet, wenn der Körper nur fortschreitende Bewegung besitzt, und welche nur die cosinus der geraden Vielfachen enthält, wenn der Cylinder lediglich um seine Axe rotirt. Im ersteren Falle lassen sich die Reihen auf elliptische Functionen von ξ und η reduciren.

F. K.

F. [illegible] Notes [illegible] the straining of ships caused by [illegible] Lond. R. [illegible] XL. 23-28.

E. [illegible] Zur [illegible] der Schiffsschraube. Civiling. [illegible]

Der Herr Verfasser entwickelt in der vorliegenden Abhandlung den Druck, den eine Schiffsschraube in Richtung der fortschreitenden Bewegung des Schiffes erfährt, indem er für jedes Element der Schraubenfläche den Druck so bestimmt, wie er sich für ebene Platten nach dem Kirchhoff-Rayleigh'schen Widerstandsgesetz ergeben würde; es wird also angenommen, dass der Druck, den ein einzelnes Flächenelement erfährt, im wesentlichen proportional ist dem Producte aus seiner Geschwindigkeit und deren Normalcomponente. Ein Flügel der Schraube wird als begrenzt gedacht durch die Axe, einen Kreiscylinder mit dem Radius r und zwei erzeugende Gerade der Schraubenfläche, welche den Winkel ψ mit einander bilden. Da die Schiffsschraube nicht eine geometrische Fläche, sondern ein Körper ist, so hat die einschneidende Kante derselben auf die Wirkungsart der Schraube einen Einfluss, der nicht zu vernachlässigen ist. Der Verfasser setzt voraus, dass die einschneidende Kante von einer durch die Axe gehenden Ebene gebildet wird. Dann hat die einschneidende Kante zwar keinen Einfluss auf den Druck, welchen die Schraube in Richtung ihrer Axe erfährt, wohl aber auf die Arbeit, welche erforderlich ist, um dem Schiff eine bestimmte Geschwindigkeit zu erteilen. Wenn die Schraube sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Axe dreht, müsste das Schiff mit einer gewissen Geschwindigkeit c fortschreiten, damit die Schraube sich in sich selbst bewegt. Ist h die Ganghöhe der Schraube, so wäre $c = \omega \frac{h}{2\pi}$. Thatsächlich bewegt sich aber das Schiff mit einer geringeren Geschwindigkeit u; für das Verhältnis $\lambda = \frac{u}{c}$, gewöhnlich Vorrückungscoefficient genannt, wendet der Verfasser, in Anlehnung an den französischen Ausdruck recul für $1-\lambda$, den Namen „Mitlauf" an. Das Verhältnis $\frac{2r\pi}{h}$, d. h. die trigonometrische Cotangente des Randsteigungswinkels, nennt der Verfasser x; die Projection der Schraubenfläche auf eine zu ihrer Axe senkrechte Ebene wird F_1 genannt, ein gewisser Widerstandscoefficient k_1, dann ist der Druck P, welchen die

Schraube in Richtung ihrer Axe erfährt, vorausgesetzt, dass die Schraube sich in ruhendem Wasser bewegt:

$$P = \frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi}{4}\right) k_1 F_1 u^2 \frac{1-\lambda}{\lambda^2} xL,$$

wo

$$\frac{1}{3}x^3 L = \int_0^x \frac{y^2\sqrt{\frac{y^2+\lambda^2}{y^2+1}}}{1+\frac{\pi}{4}\frac{(1-\lambda)y}{\sqrt{(y^2+1)(y^2+\lambda^2)}}} dy$$

ist, L selbst also der Wert des rechtsstehenden Integrals gemessen durch seinen Wert für $\lambda = 1$. Bei gleichmässiger Bewegung des Schiffes ist P gleich dem Widerstande des Schiffes, d. h.

$$W = kFu^2.$$

Setzt man die Constante $\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{k_1 F_1}{kF} = \mu$, so erhält man den „Mitlauf", d. h. λ aus der Gleichung:

$$\mu x \frac{1-\lambda}{\lambda^2} L = 1.$$

Für die Arbeit, welche in der Zeiteinheit erforderlich ist, um die Widerstände, welche die Schraube erfährt, zu überwinden, ergiebt sich der Ausdruck:

$$A = Pc + \frac{1}{4}k_2 F_2 u^3 B,$$

in welchem F_2 die Grösse der einschneidenden Fläche, B eine von der Form derselben abhängende Function des Winkels β ist, welche durch die Gleichung $\operatorname{tg}\beta = \frac{\lambda}{x} = \lambda \operatorname{tg}\alpha$ bestimmt ist; z. B. ist für Rechtecke:

$$B = \frac{1}{\sin^3\beta}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta \sin^3\beta\, l \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Denkt man sich die einschneidende Fläche als schmales rechtwinkliges Dreieck, dessen Spitze am Rande der Schraube, dessen Grundlinie in der Axe der Schraube liegt, so ist

$$B = \frac{2}{5\sin^3\beta}\left(1 + \frac{1}{6}\sin^2\beta + \frac{2}{3}(1-\sin\beta)\sin^4\beta - \frac{5}{4}\operatorname{tg}\beta \sin^3\beta\, l\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Von dieser Arbeit wird nun nutzbringend verwendet diejenige, welche zur Ueberwindung des Schiffswiderstandes gebraucht wird, d. h. $Wu = Pu = Pc\lambda$, und also ist der Nutzeffect:

$$\eta = \frac{Wu}{A}.$$

Setzen wir mit dem Verfasser

$$\nu = \tfrac{1}{4}\frac{k_2 F_2}{kF},$$

so ist

$$\eta = \frac{\lambda}{1+\lambda\nu B},$$

d. h. stets kleiner als der Rücklauf. Diese Function von λ und x (insofern $\operatorname{tg}\beta = \frac{\lambda}{x}$ ist) ist nun bei der günstigsten Form der Schraube ein Maximum. Zwischen λ und x besteht die Gleichung $\mu x \frac{1-\lambda}{\lambda^2} L = 1$. Nach bekannten Regeln wird endlich die noch fehlende Bedingungsgleichung für das Maximum von η oder, was dasselbe besagt, das Minimum von $\frac{1}{\eta} = \frac{1}{\lambda} + \nu B$ aufgestellt und gezeigt, wie man in einem concreten Falle das resultirende Gleichungssystem aufzulösen habe.

In einem Schlussparagraphen rechtfertigt der Verfasser noch die seiner Betrachtung zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die Schraube in ruhigem Wasser arbeitet, oder, anders gesprochen, die Vernachlässigung des sogenannten Nachstromes.

F. K.

E. Gerlach. Ableitung gewisser Bewegungsformen geworfener Scheiben aus dem Luftwiderstandsgesetze. Zeitsch. des Deutschen Vereins zur Förderung der Luftschifffahrt V. Heft III.

Die Schrift ist die Wiedergabe eines Vortrages, welchen der Herr Verfasser vor der Gesellschaft gehalten hat, in deren Organ der zu besprechende Artikel erschienen ist. Es werden in derselben einzelne interessante Bewegungsformen von Platten unter

Einfluss des Luftwiderstandes theoretisch erörtert, und Mittel angegeben, diese Erscheinungen experimentell hervorzubringen. Zu Grunde gelegt werden der Erklärung die Ergebnisse der Untersuchungen von Kirchhoff und Lord Rayleigh über den Druck der Flüssigkeitsströme gegen feste Wände. Die letzteren werden zunächst besprochen, in praktischer Weise graphisch dargestellt und auch durch numerische Tabellen erläutert. Die Resultate, welche in der vorliegenden Abhandlung zur Verwendung gelangen, sind die folgenden:

1) Der Druck, welchen die Platte erleidet, ist im wesentlichen proportional dem Product aus der relativen Geschwindigkeit und ihrer zur Platte senkrechten Componente; so dass die Drucke bei gleicher Grösse der relativen Geschwindigkeit sich nicht wie die zweiten, sondern wie die ersten Potenzen der Sinus derjenigen Winkel verhalten, unter welchen die Ströme die Platte treffen.

2) Ist die Stromrichtung zur Platte senkrecht, so greift der Druck in der Mitte an; bei einem zur Normale geneigten Strome dagegen rückt der Angriffspunkt nach vorn, d. h. dem Strome entgegen, im Grenzfalle eines zur Platte parallelen Stromes um $^3/_{16}$ der ganzen resp. $^3/_8$ der halben Breite.

Lässt man also eine genau horizontal gehaltene Platte hinabfallen, so müsste dieselbe ihre ursprüngliche Richtung beibehalten, während bei einer schief gehaltenen Platte sich sehr bald ein aufkippendes Kräftepaar geltend machen und bedeutende Schwankungen verursachen müsste. Man kann dieselben beträchtlich vermindern, indem man die Platte in der Mitte trennt und dann ihre Hälften so mit einander verbindet, dass sie einen gewissen Abstand haben. Dadurch wird das Trägheitsmoment vergrössert, das aufkippende Kräftepaar auf die Hälfte reducirt, ihr Verhältnis also auch vergrössert. Ist z. B. der Abstand dreimal so gross als die ursprüngliche Breite der Platte, so wird dieses Verhältnis 38-mal so gross als sein ursprünglicher Wert.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass von einem Gleiten von Platten in i[illegible] eigenen Ebene mit Rücksicht auf die Schwere nicht die [illegible] kann, [illegible] mit jeder Bewegung

der Platte in ihrer eigenen Richtung notwendig eine Verschiebung in der Richtung ihrer Normale verbunden ist.

Dann gelangen Erscheinungen zur Besprechung, welche in der Verschiebung des Druckangriffspunktes nach vorn ihren Grund haben. Eine kreisförmige Platte wird in horizontaler Richtung fortgeschleudert und derselben gleichzeitig eine Rotation um ihre Axe erteilt, und zwar vom Experimentator aus gesehen von rechts nach links, d. h. im entgegengesetzten Sinne des Zeigers der Uhr. Der Angriffspunkt des Druckes liegt nach vorn, und also wirkt ein aufkippendes Kräftepaar, welches den vorderen Rand gegenüber dem hinteren Rand hebt; in Folge dessen wird die Axe nach rechts abgelenkt. Dadurch rückt nun aber auch der Druckangriffspunkt wieder etwas nach rechts, und die Axe wird nahezu in demselben Sinne abgelenkt wie zu Anfang. Das setzt sich so lange fort, bis die Platte ungefähr eine verticale Stellung angenommen hat und dann in parabolischer Bahn abwärts fährt. Die ursprüngliche obere Seite wird dabei nach rechts gelangen.

Eine Platte, welche unter dem Einfluss der Schwere in einer Flüssigkeit abwärts sinkt, wird bald eine constante bleibende Grenzgeschwindigkeit U annehmen, welche der Verfasser Fallschirmgeschwindigkeit nennt. Hat die Platte auch eine horizontale Geschwindigkeitscomponente c, so sinkt sie viel langsamer; bei einigermassen grossem c wird man die verticale Componente u durch die Relation $u = \frac{U^2}{c}$ bestimmen können. Ein Mittel, diese Erscheinung zu veranschaulichen, ist das folgende. Man lasse zwei aus Pappe geschnittene Sterne neben einander hinabfallen, ohne ihnen eine fortschreitende Bewegung mitzuteilen; der eine von ihnen sei in Rotation um seine Axe versetzt, der andere nicht. Man wird alsbald bemerken, dass der rotirende Stern hinter dem nicht rotirenden zurückbleibt. Hat der rotirende Stern noch eine fortschreitende Bewegung, so wird man eine Drehung der Axe bemerken. Dreht sich der Stern von rechts nach links, so haben die Strahlen auf der rechten Seite eine grössere Horizontalcomponente der Geschwindigkeit als die

auf der linken Seite; in Folge dessen wird die Verticalgeschwindigkeit rechts kleiner, links grösser sein müssen als in der Mitte, d. h. die Axe senkt sich nach links.

Einige Bemerkungen über die Bewegungen des Bumerang im Anschluss an eine Abhandlung des Herrn Fuchs-Oldenburg (Natur 1886, Heft 8 u. 11) bilden den Schluss der interessanten Abhandlung.

Ein kleiner Rechenfehler ist unterdes vom Herrn Verfasser selbst verbessert; übrigens ist derselbe von keiner Bedeutung, da die Folgerungen in verstärktem Masse von dem richtigen Resultate gelten. F. K.

H. Tomlinson. The coefficient of viscosity in air. Lond. R. S. Proc. XL. 40-42.

H. Léauté. Calcul des régulateurs. Marche rationnelle à suivre, en pratique, pour l'établissement d'un appareil de régulation à action indirecte. C. R. CII. 497-500.

Die Note schliesst sich an die Arbeit desselben Verfassers an: Mémoire sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques" etc. (J. de l'Éc. Pol. cah. LV. 1 - 126, F. d. M. XVII. 1885. 929). Auf Wunsch des Akademikers Hrn. Phillips, welcher Berichterstatter über jene Abhandlung gewesen war, stellt Hr. Léauté jetzt die praktischen Folgerungen zusammen, welche sich aus seinen Untersuchungen ziehen lassen, um ihre Anwendung für diejenigen zu erleichtern, welche hydraulische Motoren zu bauen haben.

Lp.

Forchheimer. Ueber die Ergiebigkeit von Brunnen-Anl[illegible] und Sick[illegible]. Hannov. Zeitschr. XXXII. 39 S.

W[illegible] durchlässigen Erdschicht, welche auf ein[illegible] undurchlässigen Schicht ruht,

sich Brunnenanlagen befinden, denen in der Zeiteinheit eine gewisse Wassermenge entzogen wird, so werden dadurch Bewegungen im Grundwasser hervorgerufen. Ist der Zustand stationär geworden, so wird der ursprünglich ebene Grundwasserspiegel an jeder Stelle eine von der Zeit unabhängige Senkung erlitten haben, welche in der Nähe der Brunnenanlage am stärksten ist, und sich im Unendlichen asymptotisch der Grenze Null nähert. Einer rationellen Bestimmung des Grundwasserspiegels müsste natürlich eine theoretische Untersuchung über die Bewegung des Wassers durch Sandschichten vorhergehen. Eine solche wird in der vorliegenden Abhandlung nicht gegeben, vielmehr beruht die Discussion der Grundwasserbewegung auf zwei dem Referenten nicht unanfechtbar erscheinenden und durch die mitgeteilten Beobachtungen wohl nicht hinreichend gerechtfertigten Hypothesen. Der Verfasser construirt zunächst eine Schar Cylinder mit verticaler Axe, welche den Grundwasserspiegel in Linien constanter Senkung schneiden, welche als Niveaulinien bezeichnet werden. Die Strömungslinien sollen dann in einer zweiten auf der ersten senkrecht stehenden Schar verticaler Cylinder liegen; ferner soll der mittlere Wert der horizontalen Geschwindigkeitscomponente für jede verticale Linie proportional dem Gefälle des Grundwasserspiegels sein. Aus diesen Bedingungen folgt dann, dass das Quadrat der Höhe H des letzteren über der undurchlässigen Schicht der bekannten Differentialgleichung des logarithmischen Potentials genügt. Besteht die Brunnenanlage aus einem verticalen Kreiscylinder, so sind die Höhencurven natürlich horizontale Kreise, deren Mittelpunkte auf der Axe des Brunnens liegen, wodurch dann H^2 bis auf zwei linear auftretende Constanten bestimmt ist, von denen die eine sich aus der dem Brunnen entzogenen Wassermenge ergiebt, während das constante additive Glied sich bestimmen lässt, wenn die Höhe des Grundwasserspiegels im Brunnen bestimmt ist. Sind mehrere Brunnen verschiedener Anlagen vorhanden, so hat man die für die einzelnen Brunnen geltenden Ausdrücke mit vorläufig unbestimmt gelassener Constante zu addiren und dann die additive Constante, zu welcher sich die einzelnen vereinigen, derart zu bestimmen, dass

im Unendlichen der Ausdruck sich unendlich wenig von demjenigen unterscheidet, der sich ergeben würde, wenn die ganze Wassermenge vermittelst eines einzelnen Brunnens entzogen wäre. Ist der Querschnitt der Anlage ein Spalt, handelt es sich also um Sickerschlitze, so sind die Projectionen der Niveaulinien confocale Ellipsen, diejenigen der Strömungslinien Hyperbeln mit denselben Brennpunkten. F. K.

R. Bosse. Das Ausfliessen von Sand. Z. dtsch. Ing. XXX. 547.

Es wird die Beobachtung mitgeteilt, dass selbst unter der stärksten Belastung Sand aus seitlichen Oeffnungen nicht ausfliesst, wenn dieselben nicht eine gewisse von der Dicke des Gefässes abhängende Grösse überschreiten. Für spaltförmige Oeffnungen in ebener Wand ist diese untere Grenze dadurch bestimmt, dass die durch den äusseren Rand der unteren Spaltengrenze und die innere Grenzlinie der oberen gelegte Ebene unter dem Böschungswinkel ansteigen muss. F. K.

Ch. Lagasse. Note sur les jaugeages des cours d'eau par pertuis et par voie directe. Brux. S. sc. X. A. 48-52, 52-53.

Notwendigkeit der Kontrolle beider Methoden durch einander. Mn.

Ph. Lenard. Ueber die Schwingungen fallender Tropfen. Diss. Heidelberg. 37 S, 8°.

R. Reiff. Zur Kinematik der Potentialbewegung. Tübingen. Fues Verl. 8 S.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

BOCK. Ueber Potentialwerte verschiedener Kräfte und Folgerungen daraus. Hamb. Mitt. 119-123.

Ein Vortrag, der die Bedeutung des Potentials für die Mechanik und für verschiedene Zweige der mathematischen Physik bespricht, dabei jedoch lediglich Bekanntes reproducirt.

Wn.

J. FRISCHAUF. Beitrag zur Theorie der Potentialfunction. Schlömilch Z. XXXI. 252-253.

Es wird eine Modification des Dirichlet'schen Beweises für die Aenderung von $\frac{\partial V}{\partial n}$ beim Durchgang durch eine mit Masse belegte Fläche mitgeteilt. Diese Modification besteht darin, dass man (cf. Dirichlet's Vorlesungen, herausgegeben von Grube, § 14) für die Ausführung der Integration $a = l.\varrho^2$ setzt, falls $\frac{1}{2l}$ der Krümmungsradius des betreffenden Normalschnitts ist. Durch diese Einführung wird die Dirichlet'sche Voraussetzung über das Grössenverhältnis von x und a überflüssig. Wn.

A. HARNACK. Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume. Leipz. Ber. 144-169.

Der Beweis der Green'schen Formel für das Potential und damit der Beweis für das sogenannte Dirichlet'sche Princip wird hier zuerst für die Ebene durchgeführt, dann auf den Raum übertragen. Da der Gang der Entwickelung für beide Fälle derselbe ist, so beschränken wir uns hier darauf, die Hauptpunkte des Beweises für den Raum wiederzugeben. Vorangeschickt wird Folgendes: 1) Eine Function u, die im Innern eines

Raumes T nebst ihren Ableitungen eindeutig und stetig ist, dort der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt und an der Begrenzung vorgeschriebene Werte U annimmt, wird als harmonische Function bezeichnet. Die Existenz einer harmonischen Function kann nach den Arbeiten von C. Neumann und H. A. Schwarz für das Innere jedes von Ebenen begrenzten Polyeders als bewiesen vorausgesetzt werden. Dasselbe gilt demnach auch für die zu einem beliebigen Punkte O im Innern des Polyeders gehörige Green'sche Function.

2) Eine im Innern eines Raumes T harmonische Function kann in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt werden; und zwar gilt die Entwickelung für das Innere einer um einen beliebigen Punkt von T beschriebenen Kugel, falls nur die Kugel ganz in T liegt. Aus der genannten Entwickelung ergiebt sich für u die Integraldarstellung

$$u = \frac{R^2 - \varrho^2}{4\pi R} \int \frac{U_k d\sigma}{l^3},$$

für die man auch schreiben kann

$$u = \frac{1}{2\pi} \int U_k (d\sigma)_x - \frac{1}{4\pi} \int U_k \frac{d\sigma}{R \, . \, l}.$$

Hier stellt U_k die Werte von u auf der Kugel mit dem Radius R dar, $d\sigma$ das Flächenelement der Kugel, $(d\sigma)_x$ den Raumwinkel, unter welchem das Flächenelement $d\sigma$ von dem betrachteten, im Innern der Kugel liegenden Punkte x, y, z erscheint; endlich ist ϱ die Entfernung dieses Punktes vom Kugelmittelpunkt, l seine Entfernung von $d\sigma$. Für den Wert von u im Mittelpunkte der Kugel folgt daraus

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \int U_k \frac{d\sigma}{R^2}.$$

3) Mi[illegible] dieser Int[illegible]tellung wird der folgende Satz abgel[illegible]ist ein[illegible] Function u an der Begren[illegible] T nur positive (oder nur negativ[illegible] von u in irgend einem inneren [illegible] bestimmten endlichen Grösse [illegible] auch für jeden andern Pun[illegible] darstellbar durch [illegible] Product [illegible] Diese hängt

ausser von E im wesentlichen nur von der Lage des betreffenden Punktes ab. Der Beweis wird so geführt, dass der Punkt, in dem $u = E\delta$ ist, zum Mittelpunkt einer Kugel gemacht wird. Die Integraldarstellung von u und u_0 ergiebt dann leicht die Richtigkeit für beliebige andere Punkte im Innern der Kugel, die dann ihrerseits zu Mittelpunkten neuer Kugeln genommen werden etc. Der obige einfache Satz ist deshalb von Bedeutung, weil er lehrt, dass die Function u, falls sie überall dasselbe Zeichen hat, gleichmässig für alle Punkte im Innern der Fläche nach Null convergirt, sobald sie in einem einzigen Punkte mit δ beliebig klein wird. Dasselbe gilt auch für die Ableitungen der Function u.

4) Weiter ergiebt sich: Ist für einen beliebigen endlichen Raum T eine unbegrenzte Reihe von harmonischen Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_n, \cdots$ gegeben, die alle innerhalb T einerlei Zeichen haben, und convergirt die Reihe

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

an irgend einer Stelle im Innern von T, so convergirt sie auch für alle inneren Punkte von T und ist in T eine harmonische Function.

Nach diesen Vorbereitungen und nachdem noch die Haupteigenschaften der Green'schen Function abgeleitet sind, wird der Existenznachweis einer harmonischen Function mit beliebigen stetigen Randwerten folgendermassen geführt. a) Ist ein einfach zusammenhängender, von einer beliebigen Fläche F umschlossener, endlicher Raum T gegeben, und construirt man im Innern dieses Raumes eine unbegrenzt fortsetzbare Reihe von Polyedern, von denen jedes ausserhalb des vorhergehenden sich befindet, und die sich der Fläche F beliebig nähern, so convergirt die Reihe der auf diese Polyeder bezüglichen Green'schen Functionen $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n, \ldots$, welche zu einem Punkte O im Innern des Raumes T gehören, nach einer bestimmten harmonischen Function g. Diese Function ist die zum Punkte O gehörige [Gree]n'sche Function in Bezug auf den von der Fläche F einge[schlosse]nen Raum.

ie ... als Fläche

... angenommen

... stellt eine im In-

... ie ... der Begrenzungs-

... Eckpunkte) in

... nur dass

... Randpunkt

... Ableitung von g

... im Innern von T

... bezeichnet

... Punkt gehörige

... Punkten dieser

... so stellt

... convergirt, wenn F'

... harmonischen Function u_2,

... Fläche F gleichmässig in

$$\int U \cdot d\sigma),$$

... der Green'sche Satz in der Form:

$$u_2 = \lim \frac{1}{4\pi} \int U \frac{\partial g}{\partial n'} d\sigma'$$

... für den Raum T, welche an der

... Werte U besitzt.

... hiernach nicht direct durch ein

... als Grenzwert eines solchen definirt

ist, hat nichts Unbefriedigendes, da die Fundamentalsätze der Potentialtheorie fast insgesamt einen ähnlichen Charakter tragen, wenn nicht über die Dichtigkeit besondere Voraussetzungen gemacht werden.

Von den auf die Ebene bezüglichen Betrachtungen, bei denen natürlich Fourier'sche Reihen an Stelle der nach Kugelfunctionen fortschreitenden treten, sei noch erwähnt die Ableitung der Eigenschaften der Green'schen Function. Der Verfasser folgt dabei wesentlich dem Vorgange von Riemann (in seinen Vorlesungen über Schwere, Elektricität und Magnetismus), nur mit der Modification, dass die Randcurve durch eine andere innere Curve mit integrirbarem Bogenelement ersetzt wird, und zwar durch eine Niveaucurve.

Wn.

O. Callandreau. Sur le développement en série du potentiel d'un corps homogène de révolution. C. R. CIII. 33-35, 195-198.

Eine Masse von constanter Dichtigkeit sei durch eine Rotationsfläche begrenzt, deren Meridiancurve in Polarcoordinaten

$$r = a[1 + \alpha f(\vartheta)]$$

ist. Dann kann man, wie schon Legendre und Laplace gezeigt haben, das Potential für äussere sehr entfernte und für innere dem Anfangspunkt sehr nahe Punkte in ähnlicher Weise entwickeln, wie für eine Kugel mit beliebiger Dichtigkeit. Um zu ermitteln, unter welchen Bedingungen diese Entwickelung nicht nur für die oben erwähnten, sondern für alle Lagen des angezogenen Punktes gilt, untersucht der Verfasser, ob die betreffende Reihe die Dirichlet'schen charakteristischen Eigenschaften besitzt. Eine besondere Betrachtung erfordern dabei nur die Eigenschaften der ersten Gruppe, Continuität des Potentials und ...er Differentialquotienten. Die Frage nach deren Erfüllung ...n auf die der absoluten Convergenz der Reihen für das ...sserer und innerer Punkte zurückgeführt. Es bleibt ...n die einzelnen Glieder jener Reihen noch nach ...entwickelt, zu untersuchen, für welche Werte

[illegible] im Rota- [illegible]

[illegible] C. B.

[illegible] Ellipsoids, [illegible] Ellipsoids [illegible] der [illegible] kurz angegeben. [illegible] der Ausdruck von P für [illegible] Ellipsoide sich auf unendlich [illegible] begrenzte Schalen reduciren. [illegible] Ableitungen von P nach ξ, η, [illegible] Variabeln und der Coefficienten [illegible] die ersten Ableitungen von P also Inte- [illegible]

Wn.

}. H. HALPHEN. Sur le problème de Gauss, concernant l'attraction d'un anneau elliptique. C. R. CIII. 363-367.

Zur Berechnung der säculären Störungen, welche ein Planet urch einen andern erfährt, kann man bekanntlich die Anziehung, velche dieser zweite ausübt, ersetzen durch die Anziehung, welche eine Masse ausüben würde, wenn sie auf der Bahn mit einer Dichtigkeit ausgebreitet wäre, die für jedes Bogenelement der zum Durchlaufen desselben nötigen Zeit proportional ist. Die Anziehung eines solchen unendlich dünnen elliptischen Ringes hat nun Herr Halphen nach einer neuen Methode bestimmt, die nicht, wie die Gauss'schen Formeln, die Auflösung einer Gleichung dritten Grades erfordert. Die Hauptresultate, die hier ohne Beweis mitgeteilt werden, sind folgende: In einem beliebigen (schiefwinkligen oder rechtwinkligen) Coordinatensystem sei M das Quadrat des Abstandes eines Punktes x, y, z vom Anfangspunkte, $\mathfrak{L}$ eine quadratische Form, die, gleich Null gesetzt, einen vom Anfangspunkt ausgehenden Kegel darstellt, der gleich und homothetisch ist zu dem Kegel, der den angezogenen Punkt mit der anziehenden Ellipse verbindet; Λ endlich sei eine dritte quadratische Form, die den zum vorigen reciproken Kegel darstellt. Der Quotient der Discriminanten von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}' = S.\mathfrak{L}-M$, wo S ein variabler Parameter, ist ein Polynom dritten Grades in S, dessen Coefficienten K Invarianten des Formensystems sind. Von diesen Coefficienten hängen in einfacher Weise auch die Invarianten g_2, g_3 der vorkommenden elliptischen Functionen ab. Die gesuchte Anziehung lässt sich darstellen mittelst einer quadratischen Form Φ, die aus M, $\mathfrak{L}$, Λ zusammengesetzt ist, und zwar derart, dass die Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$, wenn man darin x, y, z durch die Differenzen der Coordinaten des angezogenen Punktes und des Brennpunktes der Ellipse ersetzt, die Anziehungscomponenten repräsentiren. Die Coefficienten von Φ ergeben sich in einfacher Weise aus den oben erwähnten Grössen K, g_2, g_3 bis auf einen Factor, der eine transcendente Function von

$$\zeta = \frac{27 g_3^2}{g_2^3} \text{ ist.}$$

Letztere Function aber lässt sich durch hypergeometrische Reihen ausdrücken. Wn.

U. Bigler. Potential einer elliptischen Walze. Hoppe Arch. (2) III. 337-440.

In dem vorliegenden Teile der Arbeit wird lediglich das Potential des Umfangs einer Ellipse mit den Axen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ bestimmt für den Fall, dass die Dichtigkeit in jedem Punkte gleich dem Abstand des Mittelpunktes von der Tangente des Punktes ist. Es ist dies der Grenzfall des Potentials einer von zwei ähnlichen Ellipsen begrenzten, mit Masse von constanter Dichtigkeit belegten Scheibe. Als Resultat ergiebt sich

$$(1)\qquad T = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}.$$

Dabei sind t, t', t'' die elliptischen Coordinaten des angezogenen Punktes, bezogen auf ein System confocaler Flächen zweiten Grades, unter denen die gegebene Ellipse als Grenzfall, resp. als Focalcurve enthalten ist. Zur Ableitung des Resultats geht der Verfasser von der sich leicht ergebenden Gleichung

$$(2)\qquad T = \sqrt{AB}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r}$$

aus, wo

$$r^2 = (x-\sqrt{A}\cos\varphi)^2 + (y-\sqrt{B}\sin\varphi)^2 + z^2$$

ist, während x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des angezogenen Punktes sind. Durch eine lange, wenig durchsichtige Rechnung, in der vielfach bekannte Dinge, wie die Auflösung der Gleichungen vierten Grades, in breitester Weise reproducirt werden, wird dann das Integral (2) in die Form (1) transformirt. Auf die Einzelheiten dieser Transformation gehen wir hier um so weniger ein, als sich mittelst einer von Grube (Borchardt J. LXIX, cf. Fort. d. M. I. 1868. 313) auf wenigen Seiten entwickelten Formel das Resultat mit einem Schlage ableiten lässt. Eine zweite Ableitung, die der Verfasser für Formel (1) mitteilt, geht [illegible] hung

$$(3) \qquad T = \int \frac{p\,ds}{r}$$

aus und transformirt dies Integral durch Einführung neuer rechtwinkliger Axen, die zusammenfallen mit den Normalen der durch den angezogenen Punkt zu der Ellipse gelegten confocalen Flächen. Den Schluss der Arbeit bildet eine ausführliche Discussion des Ausdrucks (1) und der daraus folgenden Anziehungscomponenten. Wn.

CHR. IBRÜGGER. Ueber die Anziehung eines homogenen schiefen Kreiscylinders. Diss. Jena. 31 S. 4°.

J. B. POMEY. Sur un problème de potentiel. Nouv. Ann. (3) V. 483-488.

Um den Punkt P seien zwei concentrische Kreise beschrieben und in denselben zwei parallele und gleiche Sehnen gezogen, deren Mitten C und C' seien. Denkt man diese Sehnen mit Massen von der Dichtigkeit 1 belegt, so gilt für die Werte, welche die Potentiale U, U' dieser Massen im Punkte P annehmen, die leicht abzuleitende Gleichung

$$\left(e^{\frac{U}{2}} - e^{-\frac{U}{2}}\right) : \left(e^{\frac{U'}{2}} - e^{-\frac{U'}{2}}\right) = \frac{1}{PC} : \frac{1}{PC'}.$$

Transformirt man die Figur mittels reciproker Radien von P aus, so gehen die gegebenen concentrischen Kreise in zwei andre concentrische Kreise, die parallelen Sehnen in Bogen zweier sich in P berührender Kreise über, und zwar in die Bogen, die ausserhalb der letztgenannten concentrischen Kreise liegen. Denkt man nun die so erhaltenen Kreisbogen ebenfalls mit Masse von der Dichtigkeit 1 belegt, so haben die Potentiale dieser Bogen in P dieselben Werte U, U' wie die Potentiale der obigen Geraden, wie überhaupt entsprechende Bogen von Curven, die durch Transformation mittels reciproker Radien aus einander entstehen, im Pol gleiche Werte des Potentials ergeben. Zugleich verhalten sich die Radien der mit Masse belegten Bogen wie $\frac{1}{PC} : \frac{1}{PC'}$.

Damit ist die Aufgabe, zwei sich in P berührende und ausserdem durch je einen Punkt O resp. O' gehende Kreise zu beschreiben, deren ausserhalb zweier gegebener um P geschlagener concentrischer Kreise liegende Bogen in P Potentialwerte U, U' ergeben, die der obigen Bedingung genügen, auf die elementare Aufgabe zurückgeführt: durch zwei Punkte O, O' parallele Linien zu ziehen, die in zwei gegebenen concentrischen Kreisen gleiche Sehnen abschneiden. Die Construction dieser Aufgabe und die Bedingungen für die Möglichkeit derselben werden abgeleitet. Wn.

R. Hoppe. Anziehung eines der Kugel analogen Gebildes von n Dimensionen auf einen Punkt. Hoppe Arch. (2) IV. 185-196.

Die bekannten Sätze über die Anziehung einer homogenen Kugel auf einen äusseren oder inneren Punkt gelten, falls die Anziehung dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, für keine andere Dimensionenzahl als 3. Spricht man aber das Newton'sche Gesetz so aus: Ein Punkt zieht alle auf dem Radius normalen und sich perspectivisch deckenden Flächenelemente gleich stark an, und erweitert dasselbe in dieser Form von 3 auf n Dimensionen, so gelten die oben erwähnten Sätze über die Anziehung einer Kugel für jede Dimensionenzahl. Dies wird hier dadurch bewiesen, dass die Anziehungscomponenten in Form von Doppelintegralen dargestellt werden. Die Auswertung der Integrale erfordert eine längere Rechnung, die zu besonderen Bemerkungen keinen Anlass giebt. Wn.

K. Weihrauch. Ueber die dynamischen Centra des Rotationsellipsoids mit Anwendung auf die Erde. Bull. de l. Soc. Imp. d. Nat. de Moscou 1886.

Jedem Punkte P der Oberfläche eines um seine Axe rotirenden Rotationsellipsoids wird eine bestimmte Grösse und Richtung der Schwere, d. h. der Resultante der Anziehung des Ellipsoids [illegible] Centrifugalk[illegible] Derjenige Punkt

P_1, in welchem man sich die gesamte Masse des Ellipsoids vereinigt zu denken hat, damit ihre anziehende Wirkung nach Grösse und Richtung mit der in P stattfindenden Schwerkraft übereinstimmt, heisst das dynamische Centrum des Punktes P in Bezug auf das anziehende Ellipsoid. Der Ort der dynamischen Centra ist, wie man sofort erkennt, eine Rotationsfläche, deren Meridianschnitte algebraische Curven sind. Unter Voraussetzung hinreichend kleiner Abplattung und Rotationsgeschwindigkeit reducirt sich der Grad derselben auf sechs, und die Coordinaten des Punktes P_1 lassen sich durch die geocentrische Breite ψ des Punktes P in der Form darstellen:

$$\xi = \cos\psi[h(2-\cos^2\psi)+m(2-3\cos^2\psi)],$$
$$\eta = -\sin\psi[h(2+\cos^2\psi)+3m\cos^2\psi],$$

wo ξ den Abstand von der Axe und ζ denjenigen von der Aequatorebene bezeichnet; und zwar ist in diesen Formeln, wenn b die kleine Axe, $a = b(1+\delta^2)$ die grosse Axe, ω die Rotationsgeschwindigkeit des Ellipsoids bedeutet, und k^2 die Kraft darstellt, welche zwei Masseneinheiten in der Entfernung 1 ausüben:

$$h = \frac{3b\delta^2}{20} \quad \text{und} \quad m = \frac{b\lambda^2}{2} = \frac{b}{2}\cdot\frac{\omega^2 b^3}{Mk^2}.$$

Die Formel wird für vier specielle Fälle discutirt; nämlich 1) für den Fall eines flüssigen Rotationsellipsoids; dort ist $\lambda^2 = \frac{2}{5}\delta^2$ und folglich $m = \frac{4}{3}h$. 2) Für ein homogenes, nicht rotirendes Ellipsoid; in diesem Falle sind λ und m gleich 0. 3) Bei der Erde sind die Formeln etwas zu modificiren; es ergiebt sich

$$\xi = b\cos\psi(0{,}005090-0{,}006014\cos^2\psi),$$
$$\zeta = -b\sin\psi(0{,}001628+0{,}006014\cos^2\psi).$$

4) Würde die Erde plötzlich ihre Rotationsgeschwindigkeit verlieren, so ergäbe sich als Ort des dynamischen Centrums

$$\xi = b\cos\psi(0{,}001624-0{,}000814\cos^2\psi),$$
$$\eta = -b\sin\psi(0{,}001628+0{,}000814\cos^2\psi).$$

Dieser Ort heisst der Ort der Attractionscentra der Erde für Punkte ihrer Oberfläche.

Aus einer beigefügten Zeichnung erkennt man besonders gut die auch aus den Zahlenwerten leicht abzuleitende Uebereinstimmung der Curven 1 und 3 resp. 2 und 4. F. K.

J. W. Haeussler. Die Schwere, analytisch dargestellt, als ein mechanisches Princip rotirender Körper. Exner Rep. XXII. 501-510.

Die Erde wird als rotirende Kugel aufgefasst, der die Eigenschaft der Schwere als besondere Kraft nicht anhaftet. Ein materieller Punkt wird von der Oberfläche auf der Verlängerung eines Erdradius nach aussen verschoben und in der neuen Lage mit der Erde fest verbunden. Dadurch wird die Rotationsgeschwindigkeit der Erde verringert. Die Anwendung des Princips von der Erhaltung der Energie dient zur Berechnung der Arbeit, welche bei der Verschiebung des materiellen Punktes aufzuwenden ist; aus der berechneten Arbeit wird das Potential der Kugel hergeleitet. Der Verfasser gelangt dadurch u. a. zu folgenden Ergebnissen: „Der Wert des Potentials ändert sich mit der Rotationsgeschwindigkeit und ist dem Quadrate derselben direct proportional; wird also die Rotationsgeschwindigkeit gleich Null, so wird auch das Potential gleich Null. Für eine nicht rotirende Kugel existirt demnach kein Potential, also auch keine anziehende Kraft. Die Ursache der anziehenden Kraft kann also nur in der rotirenden Bewegung zu suchen sein.“ Referent hat die Irrtümer des Gedankenganges und der Rechnung in zwei Notizen (Exner Rep. XXIII. 571-574, XXIV. 324-327) besprochen, begnügt sich daher hier damit, auf jene Entgegnungen hinzuweisen. Lp.

E. Beltrami. Sull' uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale et dell' elasticità. Bologna Mem. (4) VI. 401-448

Siehe Abschnitt XI, Cap. 1 A.

R. DE BONAVENTURA MARTINS PEREIRA. La rotation et le mouvement curviligne. Nouvelle théorie de l'attraction et de la répulsion des corps, appliquée à la gravitation, à la gravité, à la cohésion et à l'affinité. Paris.

B. O. PEIRCE. . Newtonian potential function. Boston. 143 S. 8⁰.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

J. Boussinesq. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse. Paris. Gauthier-Villars. 722 S. gr. 8°.

Eine Besprechung dieses umfänglichen Werkes über die verschiedenartigsten Gegenstände auf wenigen Seiten erscheint uns nicht angänglich; daher wollen wir uns mit einer übersichtlichen Aufzählung der in ihm behandelten Fragen begnügen.

Wir weisen zuerst auf zwei Punkte am Schlusse der Einleitung hin: Ueber einen Unterschied, welcher in der mathematischen Physik bei den wirklich einfachen Lösungen oder den natürlichen Elementen der allgemeinen Lösungen sich zeigt, jenachdem es sich um unbegrenzte materielle Systeme oder um begrenzte Körper handelt (S. 36-41). Und über die natürliche Definition der Differential-Parameter einer Punktfunction (S. 44-49). Folgendes sind die in der Arbeit selbst abgehandelten Themata:

Das inverse Potential, das directe, das logarithmische; ihre

Anwendung bei dem Ausdrucke des inneren Gleichgewichtes eines Körpers, dessen Oberfläche an einem kleinen Teile ihrer Ausdehnung beliebige Drucke erleidet oder gegebene Verrückungen erfährt (S. 50-103, 182-186, 196-201). Uebermittelung der Drucke von der Oberfläche nach dem Innern (S. 104-108, 186-189). Deformationen eines elastischen Bodens unter der Einwirkung verschiedenartig verteilter Lasten (S. 109-127, 139-181, 190-196). Analogie mit einer am Rande unterstützten oder eingeklemmten Kreisplatte (S. 128-138). Ueber die Art, nach welcher sich das Gewicht eines Körpers von gegebener Form zwischen den verschiedenen Teilen seiner Berührungsfläche mit dem elastischen, ihn tragenden Boden verteilt, besonders wenn seine Basis horizontal mit elliptischem Rande, und wenn er ein Paraboloid mit verticaler Axe ist (202-255). Gegenseitiger Eindruck und directer Stoss zweier convexen Körper, insbesondere zweier elastischen Kugeln (S. 713-719). Ermittelung der verschiedenen Potentiale für die Punkte innerhalb der einwirkenden Massen (S. 265-275). Gleichgewicht eines Körpers unter der Einwirkung von Spannungen, die sich in seinem Innern geltend machen, und Uebermittelung dieser Spannungen nach den benachbarten Regionen (S. 276-295). Von den örtlichen Störungen und ihrer Berechnung in den einfachsten Fällen (S. 296-318).

Note I. Kugelpotentiale (S. 319-334). Anschauliche Integration der Schallgleichung durch diese Potentiale und wichtige Folgerungen (S. 335-340). Gesetze des Antriebes der Flüssigkeiten nach den Regionen hin, wo sie verdünnt werden, oder nach Mündungen hin (S. 341-351). Erforschung der kleinen inneren Bewegungen der homogenen und isotropen Mittel mit Hülfe der Kugelpotentiale (S. 352-356, 690-696, 719).

Note II. Integration einer wichtigen Klasse partieller Differentialgleichungen und einiger Differentialgleichungen vermittelst bestimmter Integrale, welche unter dem Integralzeichen das Product zweier willkürlichen Functionen enthalten (S. 357-403, 652-655, 720). Anwendungen auf die Untersuchung der Erwärmung athermaner Körper, der Fortpflanzung der Reibungen in den Flüssigkeiten, der Diffusion aufgelöster Körper (S. 404-434).

Anwendung auf die Probleme der Fortpflanzung und der Zerstreuung der transversalen Bewegung in Stäben (435-463) und in ebenen Platten (S. 464-480). Theorie des Stosses von Stäben und Scheiben durch massive Körper (S. 481-561, 655-664). Bewegung einer rollenden Last längs eines an seinen beiden Enden aufliegenden Stabes (S. 561-577). Anwendung derselben Integrationsmethode auf die eingehende Erforschung der an der Oberfläche einer Flüssigkeit entweder durch das Eintauchen eines festen Körpers oder einen Stoss z. B. des Windes erregten Wellen (S. 578-651, 721).

Note III. Ausdehnung der in der Hauptuntersuchung für die isotropen Körper bewiesenen Gleichgewichtsgesetze auf die deformirten isotropen Körper (S. 665-671). Ermittelung der Fortpflanzung der Bewegung um ein Centrum in einem beliebigen homogenen elastischen Mittel. Theorie der seitlichen Abgrenzung der Schall- oder der Lichtwellen (S. 672-698).

Ueber die asymptotischen Integrale der Differentialgleichungen, mit einer Note bezüglich der continuirlichen nicht differentiirbaren Functionen und ihres Ersatzes durch andere differentiirbare. (S. 699-704).

Ueber die successiv angenäherte Integration der Gleichgewichts-Gleichungen einer Sandmasse im Geröllzustande.

Mn. (Lp.)

E. Beltrami. Sull' uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale et dell' elasticità. Bologna Mem. (4) VI. 401-448.

Maxwell hat gezeigt, dass man die Fernwirkung von Kräften, die nach dem Newton'schen Gesetze wirken, ersetzen kann durch ein System von Druck- und Zugkräften, die den elastischen Kräften analog sind. Um nun die Allgemeingültigkeit der Maxwell'schen Formeln zu prüfen und zu untersuchen, in wiefern dieselben etwa von der Natur unseres Raumes abhängen, leitet Herr Beltrami jene Formeln aufs neue her für einen Raum von beliebigem Krümmungsmass. In diesem Raum sei (ebenso wie in einer früheren Untersuchung des Verfassers, die F. d. M. I.

1868. 196 besprochen ist) das Bogenelement ds durch die Gleichung

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{h,k} Q_{hk}\, dq_h\, dq_k, \quad (Q_{hk} = Q_{kh};\ h,k = 1, 2, 3)$$

definirt, der Winkel zwischen zwei Richtungen ds und δs durch die Gleichung

$$ds\,.\,\delta s \cos(ds, \delta s) = \sum_{k,h} Q_{hk}\, dq_h\, \delta q_k.$$

Dabei sind die Grössen Q_{hk} beliebige Functionen der q, jedoch so beschaffen, dass ds^2 für reelle dq stets positiv ist. Ferner sei Q^2 die Determinante der Coefficienten Q_{hk}; P_{hk} seien die Coefficienten der zu ds^2 reciproken quadratischen Form, endlich sei

$$\varDelta_1 U = \sum_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial U}{\partial q_k}, \quad \varDelta_1(UV) = \sum_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

$$U_k = \sum_h P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varDelta_1 U}{\partial \dfrac{\partial U}{\partial q_k}},$$

$$\varDelta_2 U = \frac{1}{Q} \sum_k \frac{\partial (Q U_k)}{\partial q_k}.$$

Neben dem eben besprochenen allgemeinen System der Variabeln wird noch ein specielles betrachtet, in welchem

$$(2) \qquad ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2 + dr^2$$

ist. Dabei ist r der geodätische Abstand eines beliebigen Punktes des Raumes von einem festen Punkte, und daher bleiben die Grössen

$$\frac{E}{r^2}, \quad \frac{F}{r^2}, \quad \frac{G}{r^2}, \quad \frac{H}{r^2} \qquad [H^2 = EG - F^2]$$

auch für $r = 0$ endlich.

Für den durch die Festsetzungen (1) definirten Raum wird zunächst eine Anzahl von Integralsätzen hergeleitet. Ist

$$dS = Q dq_1\, dq_2\, dq_3$$

.. Volumenelement eines Raumes S, $d\sigma$ ein Oberflächenelement ... Raumes, φ eine in S überall monodrome, continuir- ... lliche Function von q_1, q_2, q_3, so gilt unter einer ... hnenden Beschränkung der Satz

$$\ldots \frac{dS}{Q} = - \int \frac{\varphi \sqrt{Q_{ii}} \cos(n, i)}{Q} d\sigma;$$

und dieser Satz bleibt, wie durch Einführung des Systems (2) sich ergiebt, auch richtig, wenn φ in discreten Punkten von S oder seiner Oberfläche unendlich wird, wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$, falls φ nur im übrigen monodrom und endlich ist. Die Beschränkung, an welche die Gültigkeit von (3) gebunden ist, ist die, dass sich S durch Hülfsflächen in Einzelräume zerlegen lässt, die cartesischen Charakter besitzen. Hierunter ist Folgendes zu verstehen. Ordnet man jedem Punkte P von S denjenigen Punkt P' des gewöhnlichen Raumes zu, dessen cartesische Coordinaten gleich den den Punkt P bestimmenden Variabeln q_1, q_2, q_3 sind, und entspricht bei dieser Zuordnung dem Raume S der cartesische Raum S', so hat S dann cartesischen Charakter, wenn jedem Punkte von S nur ein Punkt von S' entspricht und umgekehrt, und wenn S' durch Parallele zu jeder Coordinatenaxe nur in zwei Punkten getroffen wird.

Für das System (2), das nicht mehr cartesischen Charakter besitzt, wenn der Punkt $r = 0$ innerhalb S liegt, tritt an Stelle der Gleichung (3) die folgende, welche eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Gauss bildet:

$$(4)\qquad \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0\,\varphi_0.$$

Hierin ist $(\sigma)_0 = 4\pi$, wenn der Pol $r = 0$ innerhalb S, $(\sigma) = 2\pi$, wenn der Pol auf der Oberfläche von S, endlich $(\sigma)_0 = 0$, wenn der Pol ausserhalb S liegt. Die Formel (4) gilt ebenfalls, wenn φ in discreten Punkten von S unendlich wird, wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$; nur müssen jene Punkte in endlicher Entfernung vom Pole $r = 0$ liegen. Aus (3) und (4) folgt

$$(5)\qquad \int [\Delta_1(UW) + W\Delta_2 U]\,dS + \int W\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = (\sigma)_0\,W_0$$

und weiter

$$(5^a)\qquad \int (U\Delta_2 W - W\Delta_2 U)\,dS$$
$$+\int\left(U\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma + (\sigma)_0 W_0 = 0,$$

d. h. der Green'sche Satz. Hier ist W eine überall in S monodrome, continuirliche und endliche Function, U wird für $r = 0$ unendlich wie $\frac{1}{r}$, hat aber im übrigen dieselben Eigenschaften wie W. Ferner ist W_0 der Werth von W für $r = 0$; $(\sigma)_0$ hat dieselbe Bedeutung wie in (4), so dass $(\sigma)_0 = 0$ wird, wenn U innerhalb S nirgends unendlich wird.

An diese Sätze knüpft der Verfasser die Definition des Potentials, und zwar gelten die Betrachtungen für alle Punkte eines bestimmten invariabeln Raumes Σ. Er geht aus von einer Function U, die überall monodrom, continuirlich und endlich ist mit Ausnahme eines Punktes (ihres Poles), wo sie unendlich wird wie $\frac{1}{r}$ für $r = 0$, und die der Gleichung $\Delta_2 U = 0$ genügt. Durch diese Bedingungen ist die Function U, auch wenn ihr Pol gegeben ist, nicht völlig bestimmt; der Verfasser denkt daher noch eine weitere Bedingung irgend welcher Art hinzugenommen, so jedoch, dass zu jedem Pole nur eine Function U gehört. Aus einer derartigen Function U wird eine neue Function V gebildet

$$V = \Sigma U_p m_p \quad \text{oder} \quad V = \int U_p dm_p,$$

die dem Potential des euklidischen Raumes ganz analog ist. Die Anwendung der Gleichung (5), darin $W = 1$ gesetzt, auf die Function U_p ergiebt für das Potential V die Gleichung

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4\pi M_\sigma.$$

Hierbei ist die Integration über eine geschlossene Fläche σ auszudehnen, und $M_\sigma = \Sigma m_p$ oder $= \int dm_p$ ist die innerhalb σ liegende Masse. Doch ist, falls die Masse auf Flächen, Linien oder in discreten Punkten verteilt ist, der Fall auszuschliessen, dass auf der Fläche σ selbst Teile der Masse ausgebreitet sind. Die Anwendung der Gleichung (5^a), darin $U = 1$, $W = V$ gesetzt, ergiebt sodann

$$\int \Delta_2 V dS + 4\pi M_\sigma = \int (\Delta_2 V + 4\pi k)\, dS = 0,$$

unter k die Dichtigkeit der räumlichen Masse in S verstanden. Da der Raum S ein beliebiger Teil des Raumes Σ sein kann, für den V definirt ist, so ist überall

$$\Delta_2 V + 4\pi k = 0.$$

Auf analoge Weise ergiebt sich für das Potential einer mit Masse belegten Fläche

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} + 4\pi h = 0,$$

wenn h die Flächendichtigkeit ist. Man muss, um zu diesem Resultate zu gelangen, nur die mit Masse belegte Fläche durch eine andere geschlossene Fläche umhüllen, die jener unendlich nahe kommt. Sonach besitzt die oben definirte Function V alle charakteristischen Eigenschaften des gewöhnlichen Potentials [auch bei Massenverteilung auf Linien oder in discreten Punkten] mit Ausnahme der Eigenschaften, die sich auf die unendlich fernen Punkte beziehen. Für den gewöhnlichen Raum, wie auch für den pseudosphärischen Raum [für welchen $U_p = R\{\text{coth.}\left(\frac{r}{R}\right) - 1\}$ ist] lässt sich die zunächst nur für einen endlichen Raum Σ gültige Definition leicht auf den unendlichen Raum ausdehnen.

Aus V ergiebt sich weiter das Potential des in dem Raum S enthaltenen Massensystems, dessen Dichtigkeit im Innern von S gleich k, auf der Oberfläche von S gleich h ist, auf sich selbst

$$P = \tfrac{1}{2}\int Vh\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int VkdS;$$

und es lässt sich nun der Zuwachs δP berechnen, den P erhält, wenn die Coordinaten aller Punkte der Massenverteilung (h, k) die Variationen δq erfahren. Der Ausdruck für δP wird durch eine längere Rechnung umgeformt, und insbesondere wird das in δP enthaltene Flächenintegral durch ein Raumintegral ausgedrückt.

Soll es nun möglich sein, die Fernwirkung der in Rede stehenden Massenverteilung durch ein System von Druck- und Zugkräften, die den elastischen Kräften analog sind, zu ersetzen, so muss der Ausdruck von δP identisch werden mit der Arbeit

der elastischen Kräfte. Um die letztere zu ermitteln, sind die Fundamentalformeln für unendlich kleine Deformationen eines continuirlichen Mediums aufzustellen, die für den Raum Σ gelten. Die Grundzüge bei Ableitung dieser Formeln sind die folgenden. Das zu betrachtende Medium fülle den Raum S aus; auf jedes Volumenelement mögen äussere Kräfte wirken, deren Componenten nach den Richtungen 1, 2, 3 [d. h. nach den Bogenelementen, für die $dq_2 = 0$ und $dq_3 = 0$, resp. $dq_3 = 0$ und $dq_1 = 0$, resp. endlich $dq_1 = 0$ und $dq_2 = 0$] $F_1 dS$, $F_2 dS$, $F_3 dS$ seien. Die virtuelle Arbeit dieser Kräfte für den Fall, dass die Coordinaten des Angriffspunktes die Variationen δq erfahren, ist

$$(\mathrm{F}_1 \delta q_1 + \mathrm{F}_2 \delta q_2 + \mathrm{F}_3 \delta q_3) dS,$$

wo

$$\mathrm{F}_h = \frac{Q_{h1} F_1}{\sqrt{Q_{11}}} + \frac{Q_{h2} F_2}{\sqrt{Q_{22}}} + \frac{Q_{h3} F_3}{\sqrt{Q_{33}}}$$

ist. Ferner mögen auf das Oberflächenelement $d\sigma$ von S Druckkräfte wirken, deren Componenten $\varphi_1 d\sigma$, $\varphi_2 d\sigma$, $\varphi_3 d\sigma$ seien; ihre Arbeit ist

$$(\Phi_1 \delta q_1 + \Phi_2 \delta q_2 + \Phi_3 \delta q_3) d\sigma,$$

falls die Φ mit den φ durch dieselbe Gleichung verbunden sind, wie die F mit den F. Durch die erwähnten Verrückungen mögen ferner innere Kräfte hervorgerufen werden, von denen angenommen wird, dass ihre Arbeit, auf das Volumenelement bezogen, von der Form ist

$$dS \sum_{hk} L_{hk} M_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, 3;\ M_{hk} = M_{kh}).$$

Darin sind die Grössen M_{hk} noch unbekannte continuirliche Functionen der Coordinaten, die von dem Spannungszustand des Mediums abhängen, während die Coefficienten L_{hk} sich aus der Variation der Länge des Bogenelements ds ergeben; diese Variation lässt sich nämlich auf die Form bringen

$$\frac{\delta ds}{ds} = \sum_{hk} L_{hk} \frac{\partial q_h}{\partial s} \frac{\partial q_k}{\partial s}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für das Medium ist nun

$$\int (\mathrm{F}_1 \delta q_1 + \mathrm{F}_2 \delta q_2 + \mathrm{F}_3 \delta q_3) dS + \int (\Phi_1 \delta q_1 + \Phi_2 \delta q_2 + \Phi_3 \delta q_3) d\sigma$$
$$+ \int dS \sum L_{hk} M_{hk} = 0.$$

Das letzte Integral lässt sich zerlegen in ein Oberflächenintegral von der Form

$$-\int(\mu_1\delta q_1+\mu_2\delta q_2+\mu_3\delta q_3)\,d\sigma$$

und ein anderes Raumintegral. Die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung erfordert ferner, dass die Oberflächenintegrale für sich verschwinden, dass also

$$\mu_1 = \Phi_1, \quad \mu_2 = \Phi_2, \quad \mu_3 = \Phi_3$$

ist, Gleichungen, die nach der Bedeutung der Grössen Φ und μ darauf hinauskommen, dass

$$\varphi_i = \sqrt{Q_{ii}}\sum_k M_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(n,k) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Die letzte Gleichung enthält die für das Gleichgewicht zu erfüllende Grenzbedingung: zugleich ergiebt dieselbe die Bedeutung der vorher unbekannten Grössen M_{hk}. Führt man statt der M_{hk} andere Bezeichnungen ein, indem man

$$\varphi_{hk} = M_{hk}\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}} \qquad (\varphi_{hk} = \varphi_{kh})$$

setzt, so hat man drei Grenzbedingungen, deren erste

$$\varphi_1 = \varphi_{11}\cos(n,1)+\varphi_{12}\cos(n,2)+\varphi_{13}\cos(n,3)$$

lautet; und die φ_{hk} sind damit direct als Druck- resp. Zugkräfte definirt. Der nach Ausscheidung des Oberflächenintegrals übrig bleibende Ausdruck für die Arbeit der inneren Kräfte wird nach Einführung der φ_{hk} an Stelle der M_{hk}:

$$\int dS\sum\frac{L_{hk}\varphi_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}.$$

Soll derselbe gleich der Variation δP des Potentials der früher betrachteten Massenverteilung auf sich selbst sein, so muss zwischen dem Potential V jener Massenverteilung und den Druckkräften φ_{hk} die Gleichung bestehen:

$$\varphi_{hk} = -\frac{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}{4\pi}V_h V_k+\frac{P_{hk}\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}{8\pi}\Delta_1 V \qquad (h, k = 1, 2, 3).$$

Die Bedeutung der hier vorkommenden Grössen ist oben dargelegt. Die letzte Gleichung giebt, auf den gewöhnlichen Raum angewandt, die bekannten Maxwell'schen Formeln für das System von Druckkräften, das die Fernewirkung der Massenverteilung ersetzen kann. Die Formeln vereinfachen sich wesentlich, wenn

man als Flächen $q_1 =$ Const. die Flächen gleichen Potentials nimmt, während die Curven $q_2 =$ Const., $q_3 =$ Const. die auf jenen Flächen senkrechten Kraftlinien sind.

Die obigen Betrachtungen über das Gleichgewicht der inneren Druckkräfte ergeben endlich noch die allgemeinen Elasticitätsgleichungen isotroper Körper für den Fall des Gleichgewichts in folgender Gestalt:

$$\frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = \frac{1}{Q} \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{Q\varphi_{mj}}{\sqrt{Q_{mm}Q_{jj}}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{hki} \frac{P_{mi}\varphi_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}} \cdot \left(\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h} - \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i}\right) \qquad (m = 1, 2, 3).$$

[In der Arbeit des Herrn Beltrami findet sich in dieser Formel ein Druckfehler; in der ersten Summe steht dort fälschlich bei φ_{mj} und Q_{jj} der Index i statt j]. Setzt man

$$\varphi_{hk} = K_k \sqrt{P_{kk} Q_{kk}},$$

so ergiebt sich noch die Relation

$$H_k \sqrt{P_{hh} Q_{hh}} = K_h \sqrt{P_{kk} Q_{kk}},$$

eine Verallgemeinerung der für den gewöhnlichen Raum geltenden Gleichung $H_k = K_h$.

Zum Schluss giebt der Verfasser noch eine geometrische Interpretation der Formeln für unendlich kleine Deformationen; es führt dies zu Betrachtungen, die analog sind denen über das Verschiebungs- und das Elasticitätsellipsoid. Wn.

H. v. Helmholtz. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. Kronecker J. C. 137-166, 213-222.

Sir W. Thomson spricht im § 318 seiner „Theoretischen Physik" die Ueberzeugung aus, dass man dem Princip der kleinsten Wirkung noch „eine viel tiefere Bedeutung beilegen wird, nicht nur in der abstracten Dynamik, sondern auch in der Theorie mehrerer Zweige der Physik, die jetzt anfangen, dyn Erklärungen zu erhalten." Diese tiefere Bedeutung er Princip in der vorliegenden Abhandlung.

Der Herr Verfasser benutzt dasselbe in einer von Hamilton's Formen, welche zulässt, dass auf das betreffende mechanische System, dessen innere Kräfte nur conservative sind, noch äussere von der Zeit abhängige Kräfte einwirken, deren Arbeit besonders berechnet wird. Er nennt die Function $H = F - L$, wo F die potentielle Energie, L die lebendige Kraft ist, das kinetische Potential, weil es die Function ist, durch deren Differentialquotienten Lagrange die nach aussen gewendeten Kräfte des bewegten Systems ausgedrückt hat, und spricht dann das Princip in folgender Fassung aus: Der für gleiche Zeitelemente berechnete Mittelwert des kinetischen Potentials ist auf dem wirklichen Wege des Systems ein Minimum (bez. für längere Strecken ein Grenzwert) im Vergleich mit allen anderen benachbarten Wegen, die in gleicher Zeit aus der Anfangslage in die Endlage führen. Für das Gleichgewicht muss dann einfach die potentielle Energie ein Minimum sein. Wird zu H noch $\sum_{\mathfrak{a}}(P_{\mathfrak{a}}p_{\mathfrak{a}})$ hinzugefügt, wo $p_{\mathfrak{a}}$ die Coordinaten, $P_{\mathfrak{a}}$ die in der Richtung von $p_{\mathfrak{a}}$ wirkenden Kräfte bedeuten, und diese $P_{\mathfrak{a}}$ gegebene Functionen der Zeit sind, so erhält man aus jenem Satze durch Variation Lagrange's Gleichungen für die Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$. Alle speciellen Untersuchungen also, welche sich auf diese Bewegungsgleichungen gründen, gehören auch in den Bereich des — etwas modificirten — Princips der kleinsten Wirkung oder des „Minimalsatzes des kinetischen Potentials". Und danach erscheint es als höchst wahrscheinlich, dass dieser das allgemeine Gesetz aller umkehrbaren Naturprocesse ist.

Indem H als beliebige Function der Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ und der Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$, welche nur in allen Lagen endliche erste und zweite Differentialquotienten nach $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ haben soll, vorausgesetzt, nicht aber darauf beschränkt wird, dass nur homogene Functionen zweiten Grades der $q_{\mathfrak{a}}$ in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft vorkommen, wird der Minimalsatz entwickelt und werden die Bewegungsgleichungen von Lagrange daraus hergeleitet. Besondere Erwähnung finden die „Fälle mit verborgener Bewegung", d. h. physikalische Vorgänge, bei denen

auch die Geschwindigkeit linear enthaltende Glieder in der Function H vorkommen, und es werden ferner Eliminationen angegeben, infolge deren auch für Systeme wägbarer Massen höhere Potenzen der Geschwindigkeiten in den Gliedern von H vorkommen können.

Aus dem Minimalsatze wird das Princip von der Constanz der Energie abgeleitet, und der Wert der letzteren wird aus demjenigen des kinetischen Potentials berechnet:

$$E = H - \sum_{a}\left(q_a \frac{\partial H}{\partial q_a}\right).$$

Nicht immer gilt das Princip der kleinsten Wirkung, wenn dem Gesetz von der Constanz der Energie genügt wird; ersteres drückt noch einen besonderen Charakter der vorhandenen conservativen Naturkräfte aus. Zur Erläuterung dienen Beispiele aus der Mechanik, Elektrodynamik und Thermodynamik.

Durch Integration der Gleichung

$$E = H - \sum\left(q_a \frac{\partial H}{\partial q_a}\right)$$

wird dann umgekehrt H durch E bestimmt; die auftretende Integrationsconstante ist eine homogene Function ersten Grades der q_a und entspricht den verborgenen Bewegungen.

Aus den Gleichungen von Lagrange ergeben sich für die Kräfte bewegter Systeme, welche dem Minimalsatz der kinetischen Energie unterworfen sind, Wechselbeziehungen zwischen den Kräften einerseits und den Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Coordinaten andererseits; und diese Betrachtungen werden angewandt auf die Verknüpfung der elektrodynamischen und elektromagnetischen Gesetze mit dem Inductionsgesetz, auf thermodynamische, thermoelektrische und elektrochemische Vorgänge. Es wird noch bemerkt, dass die Gültigkeit des Princips der kleinsten Wirkung auch aus dem Bestehen jener Wechselbeziehungen der Kräfte abgeleitet werden kann; der Beweis wird auf eine spätere Mitteilung verschoben.

Es folgt die Herleitung von Hamilton's Differentialgleichung unter den erweiterten Voraussetzungen, welche in dieser Abhandlung gemacht sind, und im Anschluss daran die Entwicke-

lung der Reciprocitätsgesetze für die durch kleine Anstösse nach Ablauf einer bestimmten Zeit erfolgenden Aenderungen der rechtläufigen und rückläufigen Bewegung. Das Gesetz der Reciprocität, welches der Verfasser in früheren akustischen Untersuchungen nachgewiesen hat, gehört als specieller Fall hierher.

Endlich werden noch die Bewegungsmomente statt der Geschwindigkeiten als unabhängige Veränderliche eingeführt, woraus sich eine andere Form des Variationsproblems und ein anderes Reciprocitätsgesetz ergiebt. Sbt.

J. Todhunter. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time. Edited by K. Pearson. Vol. I. Galilei to St. Venant. 1639—1850. Cambridge. University Press. XVI + 924 S.

Referat in Wiedemann Beibl. XI. 480. Lp.

Gros. Sur le coefficient de contraction des solides élastiques. C. R. CII. 418-421.

Es wird bewiesen, dass das Verhältnis der Quercontraction zur Längendilatation als obere Grenze den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Rs.

R. Weber. Sur une nouvelle méthode pour déterminer le coefficient de dilatation des solides. C. R. CIII. 553-556.

Vorschlag zu einer Experimentaluntersuchung, die der Verfasser ausführen will. Rs.

B. Élie. Des constantes d'élasticité dans les milieux anisotropes. Bordeaux Mém. (3) II, 343-422.

Der Inhalt wird in der Einleitung kurz angegeben. Im ersten Capitel werden die Fundamentalformeln für schiefwinklige Coordinatensysteme zusammengestellt. Der Verfasser bezeichnet

die Verlängerungen und Verschiebungen gemeinsam mit déformations und löst im zweiten Capitel für schiefwinklige Coordinaten die Aufgabe, die Deformationen und Rotationen in Bezug auf ein Axensystem als Functionen der Deformationen oder Rotationen auszudrücken, welche sich auf ein anderes Axensystem beziehen. Im dritten Capitel werden die Beziehungen für die sechs Spannungen, welche zur Kenntnis des Gleichgewichts eines Mediums erforderlich sind, für schiefwinklige Coordinatensysteme in analoger Weise gegeben, wie die Beziehungen für die Deformationen im vorhergehenden. Die Vereinigung der Spannungen und Deformationen giebt im vierten Capitel die Energie der Volumeneinheit des Mediums. Der Verfasser geht dabei von dem Green'schen Ausdruck für die Energie aus. Das fünfte Capitel enthält die Formeln für die Axen der Isotropie, für die Symmetrieaxen (analog denen in Kirchhoff's Mechanik), für das heterotatische und orthotatische Ellipsoid und die tasinomische Oberfläche (Rankine Lond. Trans. 1855). Im letzten (6.) Capitel werden die vorhergehenden Betrachtungen auf verschiedene Krystalltypen angewandt: auf das kubische, das orthorhombische System, auf das Rhomboeder, das hexagonale, das monoklinische und das asymmetrische Prisma. In einem Anhange ist zusammengestellt, was für den Experimentator von Interesse sein kann. Dieser Anhang ist fast wörtlich im J. de phys. (2) V. 204-208 abgedruckt. Rs.

W. Voigt. Bestimmung der Elasticitäts-Constanten von Beryll und Bergkrystall. Gött. N. 1886. 93-120, 289-339.

Eine Experimentaluntersuchung. Hier sei erwähnt, dass auf den Seiten 99-103 gezeigt wird, wie die Elasticitätsconstanten aus den Beobachtungen für einen Krystall des hexagonalen Systems zu berechnen sind. In einer Anmerkung auf Seite 104 wird darauf aufmerksam gemacht, dass die elastischen Gleichungen für gewisse krystallinische Medien in den Vorlesungen von F. Neumann über die Elasticitätstheorie unter der Voraussetzung erhalten werden, die Molecüle der Krystalle besitzen

keine Polarität, während Poisson in seiner Arbeit Paris Mém. XVIII. 1842 die Polarität zulässt, daher allgemeinere Resultate erhält. — Auf den Seiten 289-305 werden die Formeln für das rhomboëdrische System gegeben. Auf Seite 337 wird der Beweis für den Satz mitgeteilt: Zwei Prismen, deren Orientirungen durch eine Drehung um die kürzere Querdimension um 90° in einander übergehen, oder bei denen Längs- und Breitenrichtung vertauscht sind, zeigen den gleichen Torsionscoefficienten. Rs.

T. ANDREWS. On the properties of matter in the gazeous and liquid states under various conditions of temperature and pressure. Lond. R. S. Proc. XL. 254.

Auszug aus einer Abhandlung in den Transactions.

Cly.

H. TOMLINSON. On the influence of stress and strain on the physical properties of matter. Part I. Elasticity (continued). The internal friction of metals. Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 801-837, Lond. R. S. Proc. XL. 240-242, 343-345, 447-449.

Cly.

H. TOMLINSON. The coefficient of viscosity of the air. Appendix. Lond. R. S. Proc. XLI. 315-316.

Cly.

O. REYNOLDS. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments including an experimental determination of the viscosity of olive oil. Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 151-234, Lond. R. S. Proc. XL. 191-203.

Der Verfasser nimmt Bezug auf Herrn Tower's Experimente, die 1883 und 1884 in den Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers veröffentlicht sind, und er bemerkt, dass, obschon

seine eigenen Forschungen sich auf die Umstände dieser Experimente gerichtet haben, nämlich eine cylindrische Walze, die sich in einer cylindrischen Fütterung dreht, er es doch einerseits für nötig erachtet hätte, von den allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts zäher Flüssigkeiten auszugehen, andererseits etwas allgemeiner die physikalische Eigenschaft der Viscosität und ihre Abhängigkeit von der Temperatur zu betrachten. Die Abhandlung zerfällt in neun Abschnitte. Die allgemeine Theorie, welche aus den hydrodynamischen Gleichungen für zähe Flüssigkeiten abgeleitet wird, steht in den Abschnitten 4 bis 8.

Cly. (Lp.)

P. DE HEEN. Note touchant la loi qui régit la dilatabilité des liquides. Belg. Bull. (3) XI. 545-554.

Ergänzung zu den früheren Untersuchungen des Verfassers.

Mn. (Lp.)

A. KÖHLER. Ueber die hauptsächlichsten Versuche einer mathematischen Formulirung des psychophysischen Gesetzes von Weber. (Aus Wundt's philos. Studien. Bd. III.) Diss. Leipzig. 71 S. 8°.

B. Elasticitätstheorie.

A. CASTIGLIANO. Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung. Aus dem Französischen von Emil Hauff. Mit 50 Holzschnitten und einem Atlas von 10 Tafeln. Wien. Carl Gerold's Sohn. VIII + 479 S. 8°.

Das wissenschaftliche Hauptwerk des im jugendlichen Alter von 37 Jahren 1884 verstorbenen Verfassers (S. F. d. M. XVII

1885. 19) „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications" erschien in den Jahren 1879-80, nachdem der Verfasser die von ihm zur Grundlage angenommenen Sätze schon 1873 und 1875 aufgestellt und bewiesen hatte. Die neue Methode zur Begründung der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme beruht nämlich auf folgenden drei Lehrsätzen, von denen der dritte mit dem „Principe der Elasticität" von Menabrea identisch ist.

1. Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit. Erster Teil. Wenn man die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems in Functionen der relativen Verrückungen der an den Eckpunkten wirkenden Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Verrückungen den Wert der correspondirenden Kräfte geben.

2. Zweiter Teil. Wenn man andererseits die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems in Functionen der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Kräfte die relativen Verrückungen ihrer Angriffspunkte geben.

3. Lehrsatz von der kleinsten Arbeit. Sucht man das Minimum der Function

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{T_{pq}^2}{\varepsilon_{pq}},$$

welche die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems ausdrückt, indem man die $3n-6$ Gleichungen (12) zwischen den Spannungen aller Stäbe des Systems in Rechnung zieht, so erhält man für diese Spannungen jene Werte, welche in dem System nach der Deformation herrschen.

Die Fassung der mitgeteilten Sätze bezieht sich auf die gegliederten Systeme, für welche die Beweise zuerst geführt werden; danach wird der Beweis geliefert, dass die Sätze auch für die gefügten Systeme in Geltung bleiben, d. h. für Systeme, welche aus in einander gefügten festen elastischen Körpern zusammengesetzt sind. So lautet z. B. der Satz von der kleinsten Arbeit: Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des

Körpers oder Systems zwischen den Molecülpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insofern man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, dass zwischen diesen Kräften um jedes Molecül Gleichgewicht herrscht.

Nach den beiden ersten Capiteln, die sich mit den angeführten Sätzen beschäftigen, folgen in dem umfangreichen dritten Capitel die allgemeinen Gleichungen des elastischen Gleichgewichtes fester Körper, danach in den folgenden Capiteln der Reihe nach angenäherte Anwendungen, die Theorie der Gitterträger, Formeln für die Deformationsarbeit fester Körper, die Theorie belasteter Träger mit geradliniger Axe, die Theorie der auf Zerknicken beanspruchten Träger mit geradliniger Axe, die Theorie der krummen Balken mit einfacher Krümmung, die Theorie zusammengesetzter Systeme und endlich die unvollkommen elastischen Systeme, wie gemauerte Gewölbe. Damit ist der erste Teil erschöpft, welcher der Theorie gewidmet ist. Der zweite Teil enthält die Anwendungen. Die drei ersten betreffen einen durch zwei resp. drei Zugstangen aus Schmiedeeisen und eine resp. zwei Druckstreben aus Gusseisen armirten Balken. Die folgenden sechs behandeln eine Halle aus schmiedeeisernen Bundgespärren mit je 0, 1 oder mehreren Zugstangen. Zwei weitere enthalten eine eiserne Bogenbrücke mit ebenen und cylindrischen Auflageflächen. Die beiden letzten endlich besprechen eine Brücke aus Ziegelmauerwerk über den Oglio und eine Brücke aus Hausteinen über die Dora bei Turin. Die 10 Tafeln des Atlas gehören zu den Anwendungen des zweiten Teils, nämlich die erste Tafel zu den drei ersten Capiteln, die anderen neun einzeln zu je einem.

Ueber die Treue der Uebersetzung vermag der Referent nicht zu urteilen, da er das Original nicht vergleichen konnte. Im Stile sind manche Wendungen und Constructionen auffällig, von denen nicht entschieden werden mag, ob sie bloss als specifisch östreichisch einem norddeutschen Ohre ungewohnt klingen. Man vergleiche z. B. S. 202: „In dem speciellen Falle, als der Träger an seinem Ende *B* durch das Gewicht *P* und seiner ganzen Länge nach durch ein gleichmässig verteiltes

Gewicht von p Kilogramm per Längeneinheit belastet wird, hat man bei Beachtung, dass sowohl die Normalkräfte als auch die Tangentialkräfte, welche auf die Grundfläche B wirken, gleich Null sind, $M_1 = 0 \ldots$" S. 122: „Nachdem man bis jetzt ... noch nicht die genügende Anzahl von Erfahrungen hat und noch lange nicht haben wird, hat man versucht ...". Der französische Name Doire für den Fluss Dora durfte in einer deutschen Uebersetzung nicht stehen. Lp.

H. F. B. Müller - Breslau. Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Bauconstructionen ausgehend von dem Gesetze der virtuellen Verrückungen und den Lehrsätzen über die Formänderungsarbeit. Leipzig. Baumgärtner. 8°.

Das vorliegende Werkchen ist eine Darstellung der Festigkeitslehre, wie sie sich Dank den Untersuchungen von Castigliano, Mohr, Fränkel und vom Verfasser selbst in neuerer und in neuester Zeit gestaltet hat. Entsprechend den Hauptproblemen dieser Disciplin zerfällt das Buch in drei Abschnitte, von denen der erste die Theorie des Fachwerks, der zweite die Biegungstheorie gerader und gekrümmter Stäbe, der dritte endlich die Drehungs- und Schubfestigkeit behandelt. In der Theorie des Fachwerks geht der Herr Verfasser von der Thatsache aus, dass im allgemeinen die rein statischen Beziehungen nicht ausreichen zur Bestimmung der Spannungen und Auflagerdrucke; indem die Anzahl der ersteren (m) meistens kleiner ist als die Anzahl der letzteren (n). Wohl aber lassen sich mit Hülfe der gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen m der gesuchten Grössen als lineare Functionen der $n-m$ anderen darstellen, so dass den statischen Bedingungen ein $(n-m)$-fach unendliches System von Grössen genügt. Für jedes derselben gilt als Folge der statischen Beziehungen auch das Princip der virtuellen Verrückungen, so dass die Gleichung, welche dasselbe darstellt, in $(n-m)$ Bestandteile zerfällt, von denen jeder einzelne eine lineare Beziehung zwischen den virtuellen Längenänderungen der Stäbe liefert. Da nun die wirk-

lich eingetretenen Längenänderungen nur ein specieller Fall der virtuellen sind, so müssen die ersteren denselben Gleichungen genügen. Indem man nun diese Ausdehnungen und Einschrumpfungen nach dem Grundgesetz der Elasticität durch die Spannungen der Stäbe ausdrückt, erhält man soviel Gleichungen, als zur Bestimmung der gesuchten Spannungen noch erforderlich sind. Aus gewissen in der Entwickelung auftretenden Gleichungen wird dann der Satz von Castigliano (Menabrea), und dann weiter die Theoreme von Maxwell und Fränkel abgeleitet. Es ist bekannt, dass der erste der angeführten Sätze häufig in unzureichender und geradezu unverständlicher Weise ausgesprochen wird, und es muss daher um so mehr anerkannt werden, dass in dem vorliegenden Buche der fragliche Satz eine präcise, verständliche und unanfechtbare Form hat. Aber andererseits muss doch auch gesagt werden, dass die Eleganz desselben nicht voll zur Geltung gelangt, indem die Spannungen S und damit der Ausdruck

$$A_i = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s$$

(vergl. bezüglich der Bezeichnungen das folgende Referat) als Functionen der oben erwähnten, doch willkürlich ausgewählten $(n-m)$ Grössen aufgefasst werden.

Während im ersten Abschnitt der Satz von Castigliano gewissermassen ein mathematisch interessantes, den eigentlichen Zwecken der Theorie aber fremdes Anhängsel der vorgetragenen Lehren bildet, wird in dem zweiten und dritten Abschnitt dieses Gesetz in den Vordergrund gerückt und fast ausschliesslich zur Ermittlung der statisch nicht bestimmbaren Grössen verwendet. Die Grundanschauungen, welche verwendet werden, sind auch hier die geläufigen, z. B. im zweiten Abschnitt die bekannte Navier'sche Biegungstheorie; es verdient Erwähnung, dass auch die Temperaturänderungen in diesem Abschnitt wie im ersten berücksichtigt werden.

Zahlreiche Beispiele dienen zur Erläuterung der vorgetragenen Lehren; nach Meinung des Referenten wird der Gang der allgemeinen Entwickelung für einen mathematisch geschulten Leser zu häufig unterbrochen; so wirken z. B. die vollständig durch-

geführten Zahlenbeispiele im ersten Abschnitt entschieden ermüdend. Diese Eigenschaft hat das vorliegende Werk mit vielen Werken gemein, die technische Fragen auf mathematischem Wege behandeln; es erklärt sich dieselbe dadurch, dass den Kreisen, für welche das Buch bestimmt ist, im allgemeinen weniger an einer theoretischen Erörterung als an der praktischen Brauchbarkeit der entwickelten Methoden liegt. Trotzdem glaubt der Referent das Werk allen Mathematikern empfehlen zu können, die sich die Kenntnis des heutigen Standes der technischen Festigkeitslehre zu erwerben wünschen. Auf einen Missstand, der leicht zu Irrungen Anlass geben kann, soll als einen bei späteren Auflagen vielleicht zu vermeidenden hingewiesen werden; die virtuellen und thatsächlichen Aenderungen sind durch denselben Buchstaben bezeichnet, was insofern unbequem ist, als bald die einen, bald die anderen in Anwendung kommen. F. K.

MOHR. Ueber die Elasticität der Deformationsarbeit. Civiling. (2) XXXII. 395-400.

H. F. B. MÜLLER-BRESLAU. Zu dem Artikel: Ueber die Elasticität der Deformationsarbeit. Civiling. (2) XXXII. 553-560.

Am Schlusse des oben besprochenen Werkes „Die neueren Methoden der Festigkeitslehre“ giebt Herr Müller-Breslau einen historischen Ueberblick über die Entwickelung dieser Methoden und bespricht dabei auch ein abfälliges Urteil, welches Herr Mohr bei früherer Gelegenheit über die Sätze von Castigliano gefällt habe.

Hierauf Bezug nehmend, wiederholt Herr Mohr die früher erhobenen Einwände, dass nämlich

1) der Satz von Castigliano in der Form „Die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers ist ein Minimum“ nicht verständlich sei, und dass

2) derselbe in berichtigter Form für die Lösung mancher Aufgaben nicht hinreiche.

Diesen Einwänden wird in der vorliegenden Note der weitere

Vorwurf hinzugefügt, dass die Anhänger des besagten Theorems ihrem Satz zu Liebe dem Begriffe der Deformationsarbeit eine unzulässige Dehnbarkeit erteilt hätten.

Was den ersten Einwand betrifft, so ist derselbe unumwunden zuzugeben, da ja in dem angegebenen Wortlaut eine Angabe über das Grössensystem vollständig fehlt, innerhalb dessen die Deformationsarbeit ein Minimum ist. Der Einwand wird jedoch hinfällig, wenn man das betreffende Theorem in präciser, etwa folgender Form ausspricht:

„Bezeichnen die Grössen t die in den einzelnen Stäben eines Fachwerkes auftretenden Temperaturänderungen, so geht die Function

$$\mathfrak{A}_t = \Sigma \frac{S^2 s}{2EF} + \Sigma \varepsilon t S s + \Sigma \frac{\varepsilon^2 t^2 EFs}{2}$$

der Grössen S für das System der wirklichen Spannungen in die Deformationsarbeit über und nimmt zugleich einen kleineren Wert an als für irgend ein anderes System von Grössen S, welches die rein statischen Beziehungen der Spannungen befriedigt". Dass der Satz, in dieser Form ausgesprochen, in jedem Falle ein und nur ein System von Spannungen liefert, davon wird man sich leicht überzeugen können, und damit erledigt sich dann auch der zweite der erhobenen Einwände. Anders liegt die Sache mit dem Namen der Deformationsarbeit; diesen will Herr Mohr ganz allein zur Bezeichnung des Ausdrucks $\Sigma \frac{S^2 s}{2EF}$ gebraucht wissen. Es wäre leicht, die Berechtigung des Ausdrucks $\mathfrak{A}_t$ zu dem gewählten Namen nachzuweisen. Aber darum handelt es sich hier nicht. Für den Satz von Castigliano kommen nur die beiden ersten Glieder in Betracht; diese zieht Herr Müller in einen Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ zusammen und nennt ihn „ideelle Deformationsarbeit". Der Name mag nicht glücklich gewählt sein; aber es kann doch durch denselben, wenn er einmal definirt ist, keine Verwirrung hervorgerufen werden.

Es ist klar, dass es auf die Gestaltung der übrigen Teile eines Fachwerks und die in ihnen herrschenden Spannungen ohne Einfluss ist, wenn man einen Teil der Stäbe fortlässt, dafür

aber je zwei gleiche und entgegengesetzte äussere Kräfte einführt, welche den betreffenden Spannungen gleich sind, und dass man sich umgekehrt die äusseren Kräfte als Spannungen passend gewählter Stäbe vorstellen kann. Indem man eins von beiden oder beides gleichzeitig thut, erhält man ein neues Fachwerk, auf das sich natürlich auch der Satz von der Deformationsarbeit anwenden lässt. Referent kann sich nicht der Meinung anschliessen, dass Herr Müller-Breslau dem Begriffe der Deformationsarbeit, indem er derartige Betrachtungen anstellt, eine unzulässige Ausdehnung gegeben habe.

Mag dem nun aber sein, wie ihm wolle, soviel kann als feststehend betrachtet werden: Wenn der fragliche Satz in der oben angegebenen Weise ausgesprochen wird (und der Sache nach geschieht das in dem Buche des Herrn Müller-Breslau), so kann über den Sinn desselben keinerlei Zweifel mehr entstehen. Trotzdem wiederholt Herr Mohr folgende schon früher ausgeführte Argumentation: Bei gegebener Belastung sind die Temperaturen t die einzigen unabhängigen Veränderlichen, von welchen die Deformationsarbeit abhängt. Um also das Minimum der Deformationsarbeit festzustellen, müssten die Abgeleiteten der letzteren nach den Grössen t gleich Null gesetzt werden. Verzichtet man dann auf den Beweis, dass diese Bedingungen mit den von Herrn Müller-Breslau aufgestellten gleichbedeutend sind, so verlässt man das Gebiet der Wirklichkeit; man hat es dann nicht mit einem wirklichen, sondern mit einem eingebildeten Minimum zu thun.

Dem ersten Teil dieser Ausführung gegenüber bleibt uns nichts anderes als die Berufung auf die oben angeführte präcise Fassung des Theorems übrig. Warum aber das Minimum, wie es Herr Müller-Breslau und mit ihm viele andere, so auch wir, auffassen, ein eingebildetes sein soll, vermag Referent nicht einzusehen. Ist denn die Eigenschaft eines Quadrates, das in einen Kreis eingezeichnet ist, grösser zu sein als jedes anders geartete Rechteck, das sich demselben Kreise einzeichnen lässt, darum eine eingebildete, weil etwa von den andern Rechtecken keines gezeichnet vorliegt?

Zum Schluss empfiehlt Herr Mohr noch folgende Fassung des Satzes: „Die ideelle Deformationsarbeit ist ein ideales Minimum". „Der Satz ist zwar ein wenig dunkel", dafür aber auch „kurz, allgemeingültig und unanfechtbar".

Die beiden ersten Prädicate geben wir zu. Ob aber auch die beiden anderen Eigenschaften dem Satze zukommen, wagen wir nicht zu entscheiden, da uns dieser Satz bisher ebenso unverständlich geblieben, wie die von Herrn Mohr selbst bemängelte Form des Theorems von Castigliano.

In der zweiten der oben erwähnten Noten weist Herr Müller-Breslau die hauptsächlich, wenn auch nicht ausschliesslich gegen ihn gerichteten Angriffe des Herrn Mohr zurück. Wenn auch in dieser Widerlegung ein grösserer Formelapparat herangezogen wird, stimmen doch die gegen Herrn Mohr gerichteten Ausführungen dem Inhalte nach mit unseren Auseinandersetzungen überein. Der schon erwähnte breite Apparat von Formeln hindert uns, auf die Einzelheiten der Entgegnung einzugehen.

In einer angefügten Notiz beharrt Herr Mohr bei seinen Behauptungen; er fordert noch einmal, dass in dem Satze von Castigliano die Natur des Minimums zum Ausdruck komme; es müsse ausgedrückt werden, dass es sich nicht um ein thatsächliches, sondern um ein ideales Minimum handle. F. K.

E. Beltrami. Sull' interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. Bologna Mem. (4) VII. 1-38.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Frage: Wie muss ein elastisches Medium beschaffen sein, damit bei passender Deformation die Druckcomponenten mit den Maxwell'schen Ausdrücken übereinstimmen, d. h. die Form haben:

$$(1)\qquad \begin{cases} X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1(V), \\ Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}\ \text{etc.}, \end{cases}$$

wo V ein Newton'sches Potential und

$$\Delta_1(V) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Der Herr Verfasser setzt das Potential der elastischen Kräfte in der Green'schen Form an und schreibt

$$(2_a) \qquad \Phi = \tfrac{1}{2}\{A\vartheta^2 + B(\lambda^2+\mu^2+\nu^2-4\beta\gamma-4\gamma\alpha-4\alpha\beta)\},$$

indem er unter α, β, γ, ... die Ausdrücke

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \beta = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \quad \vartheta = \alpha+\beta+\gamma, \\ \lambda = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \quad \mu = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, \quad \nu = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

versteht. Dann sind die Componenten der elastischen Kräfte die Ableitungen von Φ nach α, β, γ, λ, μ, ν. Indem man dieselben mit den unter (1) angegebenen Formeln vergleicht, erhält man zur Bestimmung der sechs Grössen α, β, γ, ... sechs lineare Gleichungen, als deren Auflösung sich ergiebt:

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{8\pi B}\left\{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{A-B}{3A-4B}\Delta_1 V\right\}, \\ \lambda = \dfrac{1}{4AB}\dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

Nun bestehen aber zwischen den zweiten Ableitungen von α, β, γ, λ, μ, ν sechs lineare Relationen, und in Folge dessen eben so viel Bedingungsgleichungen, denen die dritten und zweiten Ableitungen von V zu genügen haben. Durch eine geeignete Behandlung derselben gelangt der Herr Verfasser zu folgender Relation zwischen den zweiten Ableitungen von V

$$(6_d) \qquad (3A-4B)\theta^2 + A(e^2+f^2+g^2+2e'^2+2f'^2+g'^2) = 0,$$

wo

$$(5) \qquad \begin{cases} e = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad f = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad g = \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \quad e+f+g = \theta = \Delta_2(V), \\ e' = \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad f' = \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad g' = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

gesetzt ist. Man erkennt nun sofort, dass die Gleichung (6_d), wenn nicht sämtliche Grössen e, f, g, e', f', g' überall verschwinden, mit den Bedingungen

$$(2_b) \qquad B > 0, \quad 3A - 4B > 0$$

nicht vereinbar ist, d. h. mit denjenigen Bedingungen, welche ausdrücken, dass der durch $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ dargestellte Zustand des Mediums ein Zustand stabilen Gleichgewichts ist. Genügt V der Gleichung $\Delta_2(V) = 0$, so ist, abgesehen von dem schon angegebenen speciellen Falle, eine Erfüllung der Gleichung nur dadurch möglich, dass $A = 0$ ist. Diesen Fall nun unterzieht der Verfasser einer eingehenden Besprechung. Es ergiebt sich zunächst, dass, wenn Φ auch nicht mehr für ein beliebiges System von Verschiebungen positiv ist, dieses wenigstens für solche der Fall ist, welche hier in Betracht kommen, indem sich hier für Φ ergiebt

$$(6_f) \qquad \Phi = \frac{5}{8B}\left\{\frac{\Delta_1 V}{8\pi}\right\}^2.$$

Die Hesse'sche Determinante Δ von V und die durch Θ bezeichnete Grösse

$$fg + ge + ef - (e'^2 + f'^2 + g'^2)$$

lassen sich rational durch dieselbe Grösse h darstellen, indem

$$\Theta = -3h^2 \qquad \Delta = 2h^3$$

ist. Durch diese Grösse h und drei andere Grössen ξ, η, ζ, deren Ableitungen nach Richtung der Kraftlinien verschwinden und deren Quadratsumme gleich 1 ist, lassen sich dann die zweiten Ableitungen von V in folgender Weise darstellen:

$$(10_b) \qquad \begin{cases} e = h(3\xi^2 - 1), & f = h(3\eta^2 - 1), & g = h(3\zeta^2 - 1), \\ e' = 3h\zeta\eta, & f' = 3h\xi\zeta, & g' = 3h\eta\xi. \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $\frac{\partial h}{\partial n}$ die Ableitung von h in Richtung der Kraftlinie, so genügt h der Differentialgleichu[illegible]

$$(10_c) \qquad H\frac{\partial h}{\partial n} = 3h^2,$$

in welcher $H = \frac{\partial V}{\partial n}$ ist.

Nun ist aber gemäss den Definitionen von [illegible]

$$edx + g'dy + f'dz \; [illegible] \; \text{etc.}$$

daraus folgt in einfacher Weise, [illegible]
ständiges Differential dr sein müs[illegible]

eben dieser einen Variabeln r und genügt der Bedingung:

$$\frac{d\log h}{dr} = -\tfrac{3}{2}\Delta_2(r).$$

Im weiteren Verlauf der Abhandlung wird dann für r^2 der Ausdruck $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ abgeleitet, welcher durch passende Wahl des Coordinatenanfangspunktes natürlich auf die einfachere Form $x^2+y^2+z^2$ gebracht werden könnte. Hiermit sind dann die Ausdrücke ξ, η, ζ, h und damit die Grössen e, f, g, e', f', h' bestimmt.

Es ist nämlich

$$\xi = \frac{x-x_0}{r}, \quad \eta = \frac{y-y_0}{r}, \quad \zeta = \frac{z-z_0}{r}, \quad h = \frac{M}{r^3},$$

und die Differentiale der ersten Ableitungen von V sind dann

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -Md\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right), \quad d\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = -Md\left(\frac{y-y_0}{r^3}\right),$$
$$d\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -Md\left(\frac{z-z_0}{r^3}\right).$$

Da nun die Grössen $\frac{\partial \xi}{\partial n}$, $\frac{\partial \eta}{\partial n}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$, wie oben angegeben, verschwinden, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \xi\frac{\partial r}{\partial n}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \eta\frac{\partial r}{\partial n}, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \zeta\frac{\partial r}{\partial n};$$

und es verhalten sich die ersten Ableitungen von V wie ξ, η, ζ. Demnach ist $V = \frac{M}{r} + \text{const}$. Die Druckcomponenten sind dann die sechs zweiten Ableitungen nach den Coordinaten der Function $\psi = \frac{M^2}{8\pi}\log r$; die Grössen α, β, γ, λ, μ, ν lassen sich ebenfalls als zweite Ableitungen einer Function von r darstellen, nämlich der Function $\varphi = \frac{M^2}{64\pi B r^3}$. Dadurch sind dann die Verrückungen bis auf lineare Glieder bestimmt; sollen dieselben im Unendlichen nicht selbst unendlich werden; so muss

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

sein.

In einem weiteren Abschnitt wird dann zunächst die Frage behandelt, welche Verrückungen, die nur in Richtung der Entfernung von einem festen Punkte geschehen und deren Grösse lediglich eine Function dieser Entfernung ist, durch blosse Einwirkung von Druckkräften zu stande kommen. In einem Schlussparagraphen wird die zuerst behandelte Frage unter der veränderten Voraussetzung behandelt, dass A von Null verschieden, dass $\Delta_2(V)$ zwar nicht mehr gleich Null ist, aber ebenso wie V selbst nur von $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ abhängt. Setzt man

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so ergiebt sich allgemein

$$V = \frac{M}{r^\eta}; \quad \varphi = \frac{\eta}{16\pi E} V^2,$$

wo M eine willkürliche Constante, E der Elasticitätsmodul und η das Verhältnis der Längendilatation zur Quercontraction ist. In einer angehängten Note werden die linearen Beziehungen unter den zweiten Ableitungen der Grössen α, β, γ, λ, μ, ν besprochen.

F. K.

P. Uhlich. Die Festigkeitslehre und ihre Anwendung. Mittweida 1885.

Herr A. Ernst widmet diesem Werke in der Zeitschrift deutscher Ing. XXX eine eingehende Besprechung. Trotz einiger Irrtümer wird das Buch im ganzen empfohlen. F. K.

C. Chree. A new solution of the equations of an isotropic elastic solid, and its application to the theory of beams. Quart. J. XXII. 89-118.

Die Differentialgleichungen eines isotropen elastischen festen Körpers werden mit Hülfe von Kugelfunctionen integrirt. Die Methode gestattet unmittelbare Anwendung sowohl auf Stäbe, als auch auf feste Körper, die von Kugelflächen begrenzt sind.

Die erhaltenen allgemeinen Gleichungen werden auf gerade

cylindrische Stäbe angewandt, im speciellen auf Stäbe von rechteckigem und elliptischem Querschnitt, wobei angenommen wird, dass die auf die Seitenflächen der Stäbe wirkenden Kräfte verschwinden.

Für den Fall, dass die elastischen Kräfte in der Endfläche des Stabes gegebene Functionen sind, ist die Annahme erforderlich, dass die elastischen und äusseren Kräfte sich auf der Endfläche in derselben Weise das Gleichgewicht halten wie bei einem starren System. Rs.

W. J. Ibbetson. On the Airy-Maxwell solution of the equations of equilibrium of an isotropic elastic solid, under conservative forces. Lond. M. S. Proc. XVII. 296-309.

Neue Lösung der von Airy (London Phil. Trans. for 1863) und allgemeiner von Maxwell (Edinb. Trans. XXVI.) behandelten Aufgabe. Rs.

H. Resal. Sur la flexion des prismes. C. R. CII. 658-666, 719-722.

J. Boussinesq. Observations relatives à une Note récente de M. Resal sur la flexion des prismes. C. R. CII. 797-799.

H. Resal. Réponse. C. R. CII. 799.

Herr Resal hat gefunden, dass er in einem speciellen Falle nicht zu dem Resultate gelangte, welches aus der de St.-Venant'schen Theorie der Biegung elliptischer Prismen (1856 in Liouv. J. veröffentlicht) folgen würde, und glaubt, dass ein Irrtum de St.-Venant's vorliege.

Herr Boussinesq weist nach, dass Herr Resal einen Rechenfehler gemacht hat.

Herr Resal giebt dies zu. Rs.

G. J. Michaelis. Sur l'équilibre d'un cylindre élastique dont l'axe est perpendiculaire à un plan principal d'élasticité. Néerl. Arch. XXI. 387-405.

Diese Abhandlung schliesst sich an die Untersuchungen von de Saint-Venant und Clebsch über die Torsion elastischer Prismen an; die hier befolgte Methode ist die von Kirchhoff in seiner „Mechanik" angegebene. Sie wird auf das Gleichgewicht eines elastischen Cylinders, dessen Axe senkrecht auf der Hauptebene der Elasticität steht, angewandt. Hauptsächlich wird gezeigt, in welcher nahen Beziehung diese Aufgabe zu der steht, welche die Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt behandelt, und wie die bekannten Eigenschaften dieser Bewegung auf die erwähnte Aufgabe übertragen werden können, wenn auf die Basis nur ein Kräftepaar wirkt. Doch erhält der Verfasser auf diesem Wege nicht die vollständige Lösung des Problems; es bleibt eine schwierige Integration übrig, durch welche die Biegungscurve der Axe bestimmt werden muss. Wenn ausser dem Kräftepaar noch eine Kraft auf die Basis wirkt, erhält er Differentialgleichungen, welche mit denjenigen übereinkommen, die die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen ausserhalb des Schwerpunktes gelegenen Punkt bestimmen. So kann die Integration ausgeführt werden, wenn die Axe senkrecht auf einer Ebene der Symmetrie steht und der Durchschnitt kreisförmig ist. G.

J. Thomae. Weitere Untersuchungen über den elastischen Kreiscylinder. Leipz. Ber. 186-198.

Die vorliegende Abhandlung ist die Fortsetzung derjenigen, über welche im vorigen Jahrgange referirt wurde (F. d. M. XVII. 958-961). Zu den früher gegebenen particulären Integralen wer- [illegible]tzt weitere hinzugefügt, zu welchen der Verfasser gelangte, [illegible]suchte, die obere Endfläche von der Bedingung zu [illegible] sie eben bleiben müsse.

[illegible]erden ganze rationale Lösungen der Differential-

gleichungen gegeben. Einer dieser Lösungen entspricht der Zustand des schweren elastischen Cylinders, wenn er in einem Rotationsparaboloid steht, das nur von den Elasticitätscoefficienten und der Dichte abhängt, und auf den Cylinder ausser der Schwere keine Kräfte wirken.

Ferner wird eine Schar transcendenter Lösungen hinzugefügt. Der Parameter hat transcendente Form; da es aber für einen Wert des Parameters vier verschiedene Lösungen giebt, kann als eine particuläre Lösung auch eine solche angesehen werden, welche einem bestimmten Werte des transcendent vorkommenden Parameters entspricht und vier willkürliche Constanten linear enthält. Dies führt zu der Untersuchung, welche Oberflächenbedingungen sich durch passende Wahl der Verhältnisse dieser Constanten erfüllen lassen. Rs.

W. Voigt. Gleichgewicht eines verticalen Cylinders aus krystallinischer Substanz unter der Wirkung der Schwerkraft. Gött. N. 598-602.

Der Verfasser giebt die allgemeine Lösung des in der Ueberschrift angegebenen Problems, während de St.-Venant 1856 nur einen speciellen Fall behandelte.

Für die Verschiebungscomponenten werden Ausdrücke gewonnen, welche zeigen, dass man die horizontale Verschiebung einer der Prismenaxe parallelen Faser zerlegen kann in zwei Teile, $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, einer Neigung gegen die Z-Axe, welche die geradlinige Gestalt nicht tangirt und um so grösser ist, je weiter die Faser ursprünglich von der Z-Axe entfernt lag, und zweitens eine allen Fasern gemeinsame Krümmung, die an der Faser, welche die Cylinderaxe bildet, ganz rein hervortritt, und dass man die verticale Verschiebung eines ursprünglich normal zur Z-Axe liegenden ebenen Querschnittes in zwei Teile zerlegen kann, $w = w_1 + w_2$; w_1 giebt eine einfache Translocation (ohne Deformation), die um so grösser ist, je weiter der Querschnitt vom Coordinatenanfang entfernt lag; w_2 dagegen giebt

eine Deformation nach einem (allgemein elliptischen oder hyperbolischen) Paraboloid, bei welcher die Punkte der Z-Axe ihre Lage bewahren. Rs.

W. Voigt. Ueber die Elasticitätsverhältnisse cylindrisch aufgebauter Körper. Gött. N. 505-514.

Stäbe, Drähte und Röhren, wie sie bei Beobachtungen häufig angewandt werden, sind nicht isotrop, was häufig angenommen wird. Der Verfasser betrachtet einen Körper, welcher auf coaxialen Kreiscylindern gleiches elastisches Verhalten zeigt. Ein Volumenelement, welches durch zwei unendlich benachbarte Kreiscylinder dieser Art, durch zwei Meridianebenen und zwei Schnitte normal zur Cylinderaxe begrenzt ist, kann als homogen angesehen werden bei der Voraussetzung, dass das elastische Verhalten sich mit den Coordinaten stetig ändert. Im allgemeinsten Falle verhält sich das Volumenelement wie ein rhombischer Krystall und ist in elastischer Beziehung durch neun Constanten bestimmt. Die Elemente, welche sich parallel der Cylinderaxe an einander reihen, sollen gleichartig und parallel gelegen sein; die auf demselben Radius liegenden sind parallel orientirt, haben aber verschiedene Constanten; die auf demselben Breitenkreis liegenden haben gleiche Constanten, aber wechselnde Axenrichtung. So beschaffene Medien werden „cylindrisch aufgebaute“ genannt, sie werden als homogen bezeichnet, wenn die neun elastischen Constanten vom Radius unabhängig sind.

Die allgemeinen Gleichungen werden für den vorliegenden Fall entwickelt und dann zur Lösung einiger Aufgaben benutzt: Ein Hohlcylinder sei 1) unter der Wirkung von Druckkräften [illegible]uf seine Mantelflächen und von einem Zuge auf seine Basis, [illegible]r der Wirkung eines auf die Grundfläche ausgeübten [illegible]omentes um die Längsaxe, 3) gebogen durch ein [illegible]nent, welches auf seine Grundflächen um Axen [illegible] diesen Flächen liegen. Im ersten Falle werden [illegible] Längsdilatation und Quercontraction Sätze ge-

61*

wonnen, welche Zweifel an der Berechtigung von Folgerungen hervorrufen, die aus Beobachtungen gezogen sind. Rs.

P. JAERISCH. Ueber das Gleichgewicht einer elastischen Kugel. Hamb. Mitt. No. 6, 155-167.

P. JAERISCH. Ueber das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders. Hamb. Mitt. No. 6. 167-186.

1) Die Aufgabe wird mit Benutzung von Polarcoordinaten gelöst, wie Lamé es bereits gethan hat. Der Verfasser integrirt die Differentialgleichungen nach der Methode, welche er in seiner Arbeit „Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel“ angewandt hat, weil diese Methode sich sowohl auf das Schwingungsproblem als auch auf das Gleichgewichtsproblem anwenden lässt, während die Lamé'sche Methode nur für das letztere gilt.

2) Dieselbe Integrationsmethode wird in der zweiten Arbeit auf den elastischen Kreiscylinder angewandt. Der Cylinder wird isotrop vorausgesetzt, und ausser den auf die Oberfläche wirkenden Kräften sollen keine vorhanden sein. Rs.

V. CERRUTI. Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 461-470, 586-592.

Auf dem Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences in Grenoble 1885 hatte der Verfasser die Rechnung für die Bestimmung der Deformationen einer homogenen isotropen Kugel, bei welcher die Verschiebungen in den Punkten der Oberfläche willkürlich sind, gegeben; jetzt nimmt er an, dass gegebene äussere Kräfte auf die Oberfläche wirken. Er bedient sich der schon in früheren Publicationen benutzten Integrationsmethode, welche er in seiner Abhandlung Ricerche intorno all' equilibrio de'corpi elastici isotropi, Roma Acc. L. Mem. (3) XIII. 81-122 mitgeteilt hat. Diese Methode besteht in einer Vereinfachung der von Betti in der Elasticitätstheorie

(Cim. (2) VII-X) gegebenen Integrationsmethode. Während nach Betti die kubischen Dilatations- und die Rotationscomponenten eines Körperelementes von einem isotropen elastischen Körper durch vier Gruppen von je drei Hülfsfunctionen zu berechnen sind, hatte der Verfasser gezeigt, wie die Zahl der zu bestimmenden Hülfsfunctionen sich verringern kann, was von besonderem Vorteil ist, weil die Bestimmung der Hülfsfunctionen oft Schwierigkeiten bereitet.

Am Schluss der Arbeit ist erwähnt, dass der Verfasser eine neue Lösung des zuerst von Lamé (Liouv. J. XIX. 51-87) und dann u. a. von W. Thomson und Borchardt gelösten Problems gegeben hat. Rs.

C. Chree. Solid sphere or spherical shell of varying elasticity under purely normal surface forces. Quart. J. XXI. 193-208.

Das Gleichgewicht einer elastischen festen Kugel, deren Oberfläche nur gleichmässiger normaler Spannung oder gleichmässigem normalem Druck unterworfen ist, wird betrachtet. Es wird angenommen, dass die Kugel aus Schalen besteht, deren jede homogen und isotrop ist, und zwar wird zunächst vorausgesetzt, dass diese Schalen endliche Dicke haben, dann, dass sie unendlich dünn sind, das Material sich also continuirlich so ändert, dass die elastischen Eigenschaften Functionen der Entfernung von einem festen Punkte sind.

Die erhaltenen Lösungen werden auf einige besondere Fälle angewandt: Eine Voll- oder Hohlkugel sei der Wirkung eines Gases oder einer Flüssigkeit oder atmosphärischen Wirkungen ausgesetzt. Die Oberflächen einer Kugelschale unterliegen Gas- oder Flüssigkeitsdrucken, die Temperaturen der innern und der äussern Flüssigkeit werden constant erhalten. Eine feste Kugel von ursprünglich isotropem Material werde bis zu einer gleichmässigen Temperatur erwärmt und kühle dann durch Strahlung in ein umgebendes Gas, dessen Temperatur constant bleibt, ab.

Rs.

P. LAURENT. Théorie de l'équilibre élastique des surfaces coniques. Rev. d'Art. XXVI. 147-163, 359-382, 562-583. (1885).

P. LAURENT. De la déformation de l'âme des canons dans le voisinage de l'obturateur et du déculassement. Rev. d'Art. XXVII. 530-550, XXVIII. 31-47.

Der erste Aufsatz über die Theorie des elastischen Gleichgewichtes kegelförmiger Oberflächen bezweckt die Erforschung des Widerstandes der Geschützrohre.

Während die Theorie des Widerstandes einfacher oder mit Ringen versehener Cylinder schon länger gegeben war, hat man denjenigen kegelförmiger Oberflächen in ungenauer Weise auf die Untersuchung von Cylindern mit unendlich kleiner Höhe zurückgeführt. Der Verfasser sucht dagegen in den allgemeinen Gleichungen der Elasticitätslehre die Grundlagen seiner Theorie. Von den drei Teilen der Arbeit dient der erste zu einer übersichtlichen Zusammenstellung der Lamé'schen Formeln für das elastische Gleichgewicht; der zweite behandelt das elastische Gleichgewicht des Kegels (Kegelstumpf, cylindrisch-kegelförmige Enveloppe, Relationen zwischen den elastischen Kräften im Geschützrohre); der dritte ist der Untersuchung des zusammengesetzten Kegels gewidmet, d. h. der über einander geschobenen Kegelflächen.

Der zweite Aufsatz handelt von der Deformation des Geschützrohres in der Nähe der Verschlussstücke, eine Frage, welche in neuerer Zeit unter den Artilleristen oft aufgeworfen ist. Die durch die Methoden der Analysis bisher erzielten Resultate sind geringfügig gewesen, weil die Anwendung der Lamé'schen Formeln, besonders die Integration der von ihm gegebenen Differentialgleichungen, erhebliche Schwierigkeiten verursacht. In der ersten, eben besprochenen Abhandlung sind zwei particuläre Integrale für den Fall eines Umdrehungskörpers gegeben. Die Ergebnisse der weiteren Forschungen des Verfassers sind in der neuen Arbeit vereinigt. Bei einer genaueren Prüfung der erwähnten particulären Integrale erkennt man, dass gewisse Seitenkräfte, wie z. B. die des Gleitens in der Längsrichtung,

blosse Functionen des Radius sind. Das rührt davon her, dass die Integrale der Verrückungen willkürliche Constanten enthalten. Es ist daher möglich, allgemeinere Integrale zu finden, welche besser die Bedingungen erfüllen, unter welchen sich der betrachtete Körper befindet. Diese haben dem Verfasser die Behandlung der von ihm aufgeworfenen Fragen ermöglicht. Die Abhandlung zerfällt in drei Teile. Der erste Teil ist der Aufstellung der neuen Formeln gewidmet; der zweite behandelt die Aufgabe der Deformation der Seele in der Nähe der Verschlussplatte; der dritte den Widerstand an der Schwanzschraube. Lp.

P. Laurent. Équilibre élastique des surfaces coniques. Application à la volée des bouches à feu. Nancy. 64 S. 8°.

U. Masoni. Delle sollecitazioni dinamiche nei sistemi elastici articolati. Atti del R. Ist. d'incoraggiamento alle scienze naturali etc. 13 S. 4°.

Die genaue Ermittelung der Wirkungen dynamischer Angriffskräfte auf elastische Körper erheischt die Erforschung der schwingenden Bewegungen und damit die Ausführung von Rechnungen, welche für die praktischen Fälle zu verwickelt und mühsam sind. Aus diesem Grunde hat schon Hr. Ceradini in seiner Meccanica applicata alle costruzioni nur einige besondere Fälle betrachtet und die Rechnungen auf die erste Annäherung beschränkt, welche für die praktischen Aufgaben ausreicht. Unter demselben Gesichtspunkte behandelt Hr. Masoni in der vorliegenden Arbeit solche elastischen Systeme, welche aus Stäben bestehen, die an ihren Enden durch Gelenke verbunden sind, also die sogenannten gegliederten Systeme. Ein solches System wird in einem gegebenen Augenblicke unter dem Einflusse von ckkräften im Gleichgewicht vorausgesetzt; ferner wird ange- n, dass nun in diesem Augenblicke neue Kräfte hinzu- lche gleichzeitig in den Knotenpunkten mit gegebenen igkeiten angreifen (also Stosskräfte). Es wird das

allgemeine Verfahren angegeben, das man anzuwenden hat, um in den von der Praxis gestatteten Grenzen der Annäherung die grössten Verlängerungen und die entsprechenden Spannungen in den das System bildenden verschiedenen Elementen zu berechnen. Dadurch gewinnt man ein Mittel, in jedem Falle die Grenze der dynamischen Einwirkung festzustellen, durch welche die Sicherheit des Systems nicht gestört wird. Als praktisches Beispiel wird zuletzt das gegliederte System der Hängebrücken behandelt, insbesondere unter der Einwirkung eines von oben nach unten senkrecht geführten Stosses. . Lp.

C. Chree. Longitudinal vibrations of a circular bar. Quart. J. XXI. 287-298.

Auf einen elastischen isotropen Kreiscylinder sollen keine Körperkräfte wirken. Es werden Cylindercoordinaten (z, r, ϑ) eingeführt, die Cylinderaxe wird als z-Axe gewählt; die Componenten der Verschiebung u und w in der Richtung von r beziehungsweise von z sollen von ϑ unabhängig sein. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für u und w werden integrirt, ohne dass zunächst über den Zustand im Innern des Cylinders und über die Grösse des Durchmessers ($2a$) eine Annahme gemacht wird. Man kann dann den Oberflächenbedingungen genügen, wenn beide Enden fest sind. Ist dies aber nicht der Fall, alsdann kann den Oberflächenbedingungen erst angenähert genügt werden, wenn a eine kleine Grösse ist. Rs.

J. Loschmidt. Schwingungszahlen einer elastischen Hohlkugel. Wien. Ber. (2) XCIII. 434-446.

Der Verfasser meint, bei dem Bestreben, eine theoretische Grundlage für die Erforschung des Verteilungsgesetzes der Spectrallinien aufzufinden, scheine nicht das Gesetz der Obertöne oder das Studium schwingender Stäbe und schwingender Platten, sondern das Studium der Schwingungen elastischer Kugelschalen am ehesten einen Fingerzeig zu geben. Daher hat

der Verfasser die Vibrationen einer homogenen Kugelschale mathematisch weiter ausgearbeitet (am vollständigsten war es bisher von Järisch [F. d. M. XI. 1879. 723] geschehen).

Es giebt 1) rein longitudinale Schwingungen, 2) rein transversale, 3) coexistirende Longitudinal- und Transversal-Schwingungen. Für jedes dieser drei Systeme sind zwei Aufgaben zu lösen, von welchen der Verfasser aber nur eine in der vorliegenden Schrift untersucht, nämlich die Aufstellung einer Formel, welche die sämtlichen in dem betreffenden System möglichen Schwingungszeiten giebt. Dabei handelt es sich wesentlich um die Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 R_n}{dx^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] R_n = 0.$$

Lamé hat für das erste particuläre Integral $R_n^{(1)}$ einen geschlossenen Ausdruck gegeben. Der Verfasser zeigt, dass man eine homologe Form für das zweite Integral erhalten und sämtliche Schwingungszeiten bestimmen kann. Rs.

A. G. Greenhill. The period equation for lateral vibrations. Mess. XVI. 115-125.

Bei der Erörterung der transversalen Schwingungen eines homogenen elastischen Stabes, dessen Enden entweder eingeklemmt oder frei sind, ist die Lösung der transcendenten Gleichungen $\cos m \,.\, \cosh m = 1$ und $\cos m \,.\, \cosh m = -1$ erforderlich. Diese Gleichungen können auch auf die Form $\text{tangh}\,\frac{1}{2}m = \pm \text{tang}\,\frac{1}{2}m$ und $\text{tangh}\,\frac{1}{2}m = \mp \cot g\,\frac{1}{2}m$ gebracht werden, worin das obere Zeichen die gerade, das untere die ungerade Reihe der Schwingungen liefert. In dem vorliegenden Artikel betrachtet der Verfasser die Wurzeln dieser Gleichungen und fügt geometrische Erläuterungen hinzu. Andere physikalische Aufgaben, deren Lösung auf denselben Gleichungen beruht, werden auch noch bemerkt. Glr. (Lp.)

H. Lolling. Berechnung und Construction der wichtigsten Maschinenelemente auf Grund der neueren Festigkeitsversuche und Festigkeitslehre an praktischen Beispielen erörtert u. s. w. I. Teil. Wien. Spielhagen & Schurich. IV + 79 S. 4° nebst autogr. Skizzenbl. und einem Atlas photolith. Constructionsblätter.

Das als Hüfsbuch für den ausführenden Constructeur sowie für den Unterricht an technischen Lehranstalten elementar bearbeitete Werk soll in möglichst einfacher Entwickelung die zur Construction der wichtigsten Maschinenelemente notwendigsten Formeln und Gesetze vorführen unter Heranziehung der dabei zum Verständnisse erforderlichen Capitel aus der Festigkeitslehre und unter Demonstrirung an neueren praktisch bewährten Constructionen. Es soll aber auch den vorbereitenden technischen Lehranstalten einen systematisch geordneten, geeigneten Lehrstoff und ein kurzes Lehrbuch auf elementarer Grundlage geben. Der vorliegende erste Teil, dem noch zwei weitere folgen sollen, behandelt im ersten Abschnitte die Hooke'schen Gesetze der Elasticitätslehre, die Tragkraft der Körper, die specifische Arbeitsfestigkeit und die Wöhler'schen Gesetze, Querschnitte von gleicher Zug- und Druckfestigkeit nebst Anwendungsbeispielen. Der zweite Abschnitt bespricht nach Erörterung der Schub- oder Scheerfestigkeit die Vernietungen und die Schraubenverbindungen. Im dritten Abschnitte wird nach Definition der Begriffe Biegungsfestigkeit, Trägheitsmoment und Widerstandsmoment für Biegung und Torsion die Theorie der Träger, Zapfen und Axen entwickelt. Der vierte Abschnitt endlich handelt von der Torsionsfestigkeit und der Anwendung auf Wellen, sowohl wenn sie auf Torsion, als wenn sie auf Biegung beansprucht werden. Die Kuppelungen bilden den Beschluss.

Der zweite Teil des Werkes, welcher auch noch 1886 erschien, ist der Redaction nicht zugegangen. Lp.

M. Lévy. Formules directes pour le calcul des moments de flexion dans les poutres continues de section constante ou variable. C. R. CII. 470-476.

Sowohl der Querschnitt als auch die Elasticität des Balkens können constant oder variabel sein; der Balken liegt auf Stützen, welche gleich oder verschieden hoch sein können, jede der äussersten Stützen kann eingelassen sein oder nicht; auf den Balken wirken beliebige senkrechte Drucke. Der Verfasser giebt directe Formeln für die Berechnung der Biegungsmomente, so dass man nicht in jedem Fall eine grössere oder kleinere Anzahl simultaner Gleichungen zu lösen hat. Es seien $A_0, \ldots, A_n$ die Stützen, $l_i = A_{i-1}A_i$ die Länge des Faches i, M_i das Biegungsmoment bei der Stütze A_i, y_i ihre Ordinate, M das Biegungsmoment in irgend einem Punkte des Balkens, E der Elasticitätscoefficient, J das Trägheitsmoment in irgend einem Querschnitt, $EJ = kE_0J_0$ (k eine rein numerische Function von x, die gleich 1 wird, wenn der Balken constanten Querschnitt und constante Elasticität hat, E_0 und J_0 willkürlich aber homogen mit E und J gewählte Grössen).

Die Ordinate y der deformirten Mittellinie im Fache i ist

$$y = \frac{y_{i-1}(l_i - x) + y_i x}{l_i} + \frac{1}{E_0J_0}\left[\left(1 - \frac{x}{l_i}\right)\int_0^x \frac{Mx\,dx}{k} + \frac{x}{l_i}\int_x^{l_i} \frac{M(l_i - x)}{k}\,dx\right],$$

daher die Neigung der Tangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \frac{1}{l_iE_0J_0}\left[\int_x^{l_i} \frac{M(l_i - x)}{k}\,dx - \frac{1}{l_i}\int_0^x \frac{Mx\,dx}{k}\right].$$

Für $x = l_i$ hat man die Neigung bei der Stütze A_i. Wenn man in der letzten Gleichung i in $i+1$ ändert und $x = 0$ macht, erhält man einen zweiten Ausdruck für die Neigung bei der Stütze A_i. Indem man die beiden Ausdrücke einander gleich setzt, erhält man „die Formel, welche die ganze Theorie der continuirlichen Balken enthält“:

$$\frac{1}{l_i}\int_0^{l_i} \frac{Mx}{k}\,dx + \frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}} \frac{M(l_{i+1} - x)}{k}\,dx = E_0J_0\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \frac{y_i - y_{i+1}}{l_{i+1}}\right).$$

Bezüglich des weiteren specielleren Inhaltes sei auf die Mitteilung selbst verwiesen; eine Verallgemeinerung eines in den C. R. LXXX, F. d. M. VII. 1875. 623 gegebenen Satzes wird erhalten. Rs.

C. Zaleski. Berechnung der Durchbiegung von Trägern mit wechselnden Querschnitten. Z. Oestr. Arch. u. Ing. XXXVIII. 165-175.

Die Träger, um welche es sich handelt, sind gerade Balkenträger, deren Querschnitt an gewissen Stellen sprungweise Aenderungen erleidet. Die Belastung ist eine derartige, dass das Biegungsmoment eine ganze quadratische Function des Abstandes x von einer festen Stelle ist. Damit ist die Differentialgleichung für die neutrale Faser des Balkens unmittelbar gegeben. Für die Integration ist zu bemerken, dass y, d. h. die Senkung des Balkens an der Stelle x, ebenso wie $\frac{dy}{dx}$ stetige Functionen von x sind, und dass an den Endpunkten eines Trägerfeldes $y = 0$ ist. Schwierigkeiten irgend welcher Art sind, wie man sofort übersieht, bei der Lösung der Aufgabe nicht zu überwinden. Der Lösung der allgemeinen Aufgabe folgt in der vorliegenden Abhandlung die vollständige Durchführung zweier Zahlenbeispiele. Das erste Mal wird die Theorie auf einen Träger angewandt, der aus einem unbelasteten Mittelfeld und zwei gleichmässig belasteten Seitenfeldern besteht, das zweite Mal ruht die Belastung auf dem Mittelfelde, und die beiden Seitenfelder sind unbelastet. Der theoretische Teil füllt $2\frac{1}{2}$ Seiten, die Zahlenbeispiele 7 Seiten. F. K.



G. RICHERT. Tabellen zur Berechnung der Tragfähigkeit schmiedeeiserner Stäbe bei Beanspruchung auf Zerknicken. Göteborg 1886. Wettergren und Kerber.

Herr Müller-Breslau bespricht diese Tabellen in der Hannöv. Zeitschrift XXXII. 681-682; auch im Cbl. der Bauverw. VI. 196 werden dieselben angezeigt. F. K.

E. WINKLER. Vorträge über Brückenbau. Theorie der Brücken. 1. Heft. Aeussere Kräfte der Balkenträger. Dritte Auflage. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Das Werk wird von Herrn Keck allen Fachgenossen (d. h. Bauingenieuren) in der Hannöverschen Zeitschrift XXXII. 686-689 empfohlen; auch in Ztsch. Deutsch. Ing. XXX. und im Ctrbl. der Bauverw. VI. finden sich anerkennende Besprechungen des genannten Werkes. F. K.

R. BREDT. Zerknickungsfestigkeit und excentrischer Druck. Z. dtsch. Ing. XXX. 621-625.

Wenn die auf einer Säule ruhende Last nicht genau in der Schwerpunktslinie (neutralen Axe) wirkt, so liegt die Gefahr der Verbiegung vor und bei zu grosser Last diejenige, dass der Träger zerknickt. Das Problem, die Grenze dieser Belastung zu finden, bei welcher ein Zerknicken eintritt, ist seit Euler's Zeiten vielfach behandelt, ohne dass man sagen könnte, die Frage sei zu einem allgemein anerkannten Abschluss gekommen. Die in vorliegender Arbeit entwickelte Lösung scheint dem Ref. in mancher Hinsicht mangelhaft. Der Verfasser nimmt an, dass das Biegungsmoment für die einzelnen Querschnitte der Stütze constant ist. Das ist erlaubt, wenn gleichzeitig angenommen werden darf, dass [illegible]erschiebungen so klein sind, dass sie als unendlich klein [illegible] werden dürfen gegen den Abstand der Wirkungslinie [illegible] von der neutralen Axe. Der Verfasser verlässt [illegible]ne wieder, nachdem er aus derselben gefolgert, [illegible] Axe nach der Verbiegung einen Kreisbogen

bildet; und er bestimmt das Biegungsmoment für das untere Ende der Säule so, als ob der Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Axe unendlich klein gegen die eingetretene Abweichung des oberen Stabendes von seiner ursprünglichen Lage wäre. Durch dieses ungenaue Verfahren gewinnt der Herr Verfasser einen Ausdruck für P als Function des Centriwinkels w, welcher zu der verbogenen Mittellinie gehört. Schon die Thatsache, dass für Werte, welche unterhalb $P = \frac{2JE}{l^2}$ liegen, sich kein reelles w ergiebt, hätte den Herrn Verfasser dahin führen müssen, dass seine Theorie nicht einwurfsfrei ist, da es wohl als ausgemachte Sache betrachtet werden darf, dass die Verbiegung bei excentrischer Belastung nicht erst bei einem bestimmten Wert P plötzlich beginnt, sondern bei gleicher Excentricität von Anfang an mit wachsendem P stetig wächst. Im Folgenden wird dann untersucht, welchen Einfluss Momente, wie sie durch unvermeidliche Fehler jeder Construction hervorgerufen werden, auf die Spannung am Fusse des Trägers ausüben. F. K.

H. Zimmermann. Ueber den Sicherheitsgrad der Bauconstructionen, insbesondere der auf Knicken beanspruchten Körper. Cbl. d. Bauverw. VI. 217-219, 225-227, 243-245.

Was sich nicht direct auf die Knickfestigkeit bezieht, ist die an vielen Beispielen durchgeführte Erläuterung der Thatsache, dass eine kleine Variation der Belastung, für welche eine Construction im Gleichgewicht ist, unter Umständen eine dauernde und weitgehende Störung des Gleichgewichts bewirken kann.

Für die Grenze der Belastung, damit kein Zerknicken des Stabes eintrete, wird nach Grashof der Euler'sche Wert

$$P = \frac{EJ}{l^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

abgeleitet. (Hier wie in den folgenden Referaten über Knickfestigkeit bedeutet J das Trägheitsmoment des Trägerquerschnittes, l die Länge des Trägers, E den Elasticitätsmodul.) Es ist bekannt, dass, wenn die durch den angegebenen Ausdruck bestimmte

Last gerade im Mittelpunkt angreift, die Ausweichung des oberen Endes sich nicht bestimmen lässt, insofern bei jedem Wert der letzteren Gleichgewicht möglich ist. Greift aber die Kraft nicht im Mittelpunkt an, so führt die Rechnung zu einer unendlich grossen Abweichung; daraus folgt dann unmittelbar, dass, wenn das Zerknicken vermieden werden soll, diese Belastung nicht überschritten werden darf. Jede Formel für die zulässige Belastung, welche einen grösseren Wert als P liefert, ist also auf jeden Fall zu verwerfen. F. K.

F. Frielinghaus. Einfache Ableitung der Formeln für Knickfestigkeit. Wochenbl. für Bauk. VIII. 381.

Herr Frielinghaus leitet auf einem zwar kurzen, aber, wie dem Referenten scheint, nicht völlig einwurfsfreien Wege für die Grenzbelastung Formeln ab, welche sich von den Euler'schen Werten nur in den Zahlencoefficienten und zwar um weniger als 3 Procent des Betrages unterscheiden. F. K.

M. Möller. Zur Ableitung von Formeln für Knickfestigkeit. Wochenbl. für Bauk. VIII. 409-410, 460-461.

H. Zimmermann. Zur Ableitung von Formeln für Knickfestigkeit. Wochenbl. für Bauk. VIII. 451-452.

Anknüpfend an den soeben besprochenen Artikel von Herrn Frielinghaus, begründet Herr Möller zunächst in äusserst klarer Weise die beiden Forderungen

$$(1)\qquad P \leqq \frac{\pi^2}{m}\frac{EJ}{l^2}, \qquad\qquad (2)\qquad P \leqq SF,$$

wo m einen von der Befestigungsart abhängenden Zahlencoefficienten, S das Mass der zulässigen Beanspruchung bezeichnet, und geht dann zu der Darlegung der Gründe über, welche ihn [illegible]gen, die Schwarz'sche Formel

$$(3)\qquad P \leqq \frac{SF}{1+K\dfrac{Fl^2}{J}}$$

[illegible]in Coefficient).

Herr Zimmermann verweist bezüglich dieses Punktes auf seine oben besprochene Abhandlung und zieht die Versuchsergebnisse des Herrn Bauschinger heran, um darzulegen, dass der rechtsstehende Ausdruck nicht denjenigen Druck darstelle, bei welchem Säulen zerknickten.

Dem gegenüber hebt Herr Möller an der Hand einiger Zahlenbeispiele hervor, welche Unzuträglichkeiten die einseitige Benutzung der beiden ersten Formeln in sich schliesst.

F. K.

M. Möller. Zur Frage des Verhaltens gusseiserner und schmiedeeiserner Stützen. Dtsche. Bauztg. XX. 314-316, 326-329.

Untersuchung über den Wert, welcher der Constante K in der Schwarz'schen Knickfestigkeit beizulegen ist, damit bei einer ungleichmässigen Erwärmung hinreichende Sicherheit besteht. Beträgt der Temperatur-Unterschied zweier entgegengesetzten Seiten der Stütze 600°, so ist $K = 0{,}00038$ für Schmiedeeisen, 0,00034 für Gusseisen zu setzen. F. K.

Wiechel. Genauigkeitsgrad des geometrischen Näherungsverfahrens für Durchbiegungsberechnungen. Civiling. (2) XXXII. 529-536.

Die kurze Abhandlung, deren Ziel durch den Titel hinreichend bezeichnet ist, bietet nur ein technisches, kein mathematisches Interesse dar. F. K.

W. Ritter. Der elastische Bogen berechnet mit Hülfe der graphischen Statik. Zürich. Meyer & Zeller.

Die in erster Linie für Brückenbauer bestimmte Schrift hat den Zweck, die graphische Berechnung des elastischen Bogens, deren Grundzüge von Culmann in der „graphischen Statik“ gegeben sind, mit den Vervollkommnungen darzustellen, welche

sie seitdem erfahren hat; und zwar in ähnlicher Weise, wie der Verfasser die „elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken“ F. d. M. XV. 1883. 885 behandelt hat. Als bekannt werden vorausgesetzt die Elemente der Festigkeitslehre, die Eigenschaften der Kräfte- und Seilpolygone, die graphische Berechnung der Fachwerke und die Theorie der Trägheitsellipse. Sbt.

CURIONI. Relazione „Sulle curve delle pressioni negli archi e nelle volte“ del sig. Ing. Prof. Camillo Guidi. Torino Atti XXI. 146-148.

Nach dem Berichte des Herrn Curioni über die Arbeit des Herrn Guidi soll dieselbe in den Memorie der Turiner Akademie erscheinen. Sie ist eine Fortsetzung der in derselben Sammlung Bd. XXXVI erschienenen Abhandlung „Sugli archi elastici“.

Lp.

H. HAASE. Die Theorie der parabolischen und elliptischen Bögen in ihrer Anwendung auf Eisenconstructionen. Wien. W. v. Waldheim.

Ein äusserst absprechendes, durch mitgeteilte Proben begründetes Urteil fällt der nun verstorbene E. Winkler über das Buch auf S. 268 des Centralbl. der Bauverw. VI. F. K.

M. WESTPHAL. Festigkeit und elastische Durchbiegung eines Ringes. Z. dtsch. Ing. XXX. 91.

Ein ringförmiger elastischer Körper, dessen Mittellinie eine ebene Curve mit zwei resp. einer Symmetrieaxe ist, wird zwei gleichen aber entgegengesetzten Kräften unterworfen, welche in den Endpunkten der einen Symmetrieaxe angreifen und die Richtung der letzteren haben. Mit den üblichen Hülfsmitteln werden die betreffenden Spannungs- und Deformationsverhältnisse bestimmt.

F. K.

H. MÜLLER-BRESLAU. Elasticitätstheorie der nach der Stützlinie geformten Gewölbe. Z. f. Bauwesen. XXXVI. 273-304.

Bekanntlich reichen rein statische Beziehungen nicht aus, den Fugendruck in einem Tonnengewölbe nach Grösse, Richtung und Angriffspunkt vollständig zu bestimmen; dieselben führen dazu, die Componenten und Angriffspunkte für eine beliebige Fuge durch die entsprechenden Elemente für eine bestimmte Fuge, z. B. für die im Scheitel oder für eins der Auflager, auszudrücken. Die Verbindungslinie der Druckangriffspunkte nennt man bekanntlich eine Stützlinie des Gewölbes, und man erkennt aus dem Gesagten sofort, dass bei gegebener Belastung die statischen Beziehungen eine dreifach unendliche Schar von Stützlinien liefern. Fällt eine der Stützlinien mit der Mittellinie des Gewölbes zusammen, so heisst das Gewölbe nach der Stützlinie geformt. Mit derartigen Gebilden beschäftigt sich der vorliegende Artikel. Dieselben werden als elastische Körper behandelt; dadurch gewinnt der Herr Verfasser den Vorteil, den bekannten Satz von Castigliano über die Deformationsarbeit anwenden zu können. Derselbe liefert entsprechend den drei Parametern, von welchen der Druck in den einzelnen Fugen noch abhängt, drei Gleichungen zur Bestimmung derselben.

Bezüglich der Durchführung dieses Gedankens muss in Anbetracht der damit verbundenen beträchtlichen Rechnung auf die Arbeit selbst verwiesen werden. F. K.

L. v. WILLMANN. Beitrag zur Berechnung der Rollvorrichtungen für Brückenverschiebungen. Z. dtsch. Ing. XXX. 914-917.

Die im Titel genannte Aufgabe fordert die Bestimmung der Deformationen und Spannungen, welche bei Berührung von Kugeln und Cylindern einerseits und Ebenen andererseits entstehen. Die Behandlung dieser wohl schon wiederholt untersuchten Probleme bildet den für Mathematiker interessanteren Teil der Abhandlung. F. K.

K. Haeseler. Berechnung des Tangentialgelenkes und der Rollen eines Kipplagers. Wochenbl. für Bauk. VIII. 248-251.

Es ist dieselbe Aufgabe der Elasticitätstheorie wie in der Abhandlung des Herrn v. Willmann, welche hier unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen gelöst und auf die im Titel bezeichnete Frage der Technik angewandt wird. F. K.

F. Steiner. Theorie statisch unbestimmter Systeme unter Berücksichtigung der Anfangsspannungen. Z. Oestr. Arch. u. Ing. XXXVIII. 179-182.

Obgleich in einem elastischen Systeme durch schon vorhandene Belastungen Formänderungen auftreten, berechnet man gewöhnlich die Spannungen, welche eine neue hinzutretende Belastung hervorruft, so, als ob keine Formänderungen vorhanden wären. Der Verfasser sucht an einem Beispiele zu zeigen, dass dieses Verfahren unter Umständen zu Resultaten führen könne, welches von richtigen Ergebnissen zu weit differire. Referent muss gestehen, dass er sich mit den Ausführungen des Herrn Verfassers nicht in Uebereinstimmung befindet. Man erlaubt sich jenes Verfahren in der Voraussetzung, dass die mit demselben verbundenen Fehler nicht grösser sind, als die mit den elastischen Grundgesetzen verbundenen, welche die Spannungen als lineare Functionen der Dilatationen der elastischen Körper erklären. Will Herr Steiner den Einfluss der Deformationen auf die statischen Beziehungen nicht vernachlässigen, so darf er consequenter Weise die Spannungen nicht mehr als lineare Functionen der Deformationen ansehen. Ausserdem scheint uns, dass Herr Steiner bei Durchführung seines Beispiels Vernachlässigungen begeht, die einer Rechtfertigung bedurft hätten. F. K.

H. Müller-Breslau. Zur Theorie der Biegungsspannungen in Fachwerkträgern. Hannöv. Zeitschr. XXXII. 399-404.

Es handelt sich um Fachwerke mit festen Knotenpunktsverbindungen und zwar speciell um die Biegungsmomente, welche durch die letzteren in den Enden der einzelnen Stäbe hervorgerufen werden. Wird ein Fachwerk der eben beschriebenen Art in irgend einer Art belastet, so verbiegen sich die einzelnen Stäbe derartig, dass die Tangenten in einem Knotenpunkte an zwei verbogenen Stäben nach der Deformation gerade den Winkel einschliessen, welchen die Stäbe vor der Deformation mit einander bildeten; dagegen erfahren die Winkel eines durch drei Knotenpunkte als Ecken bestimmten Dreiecks Aenderungen. Zunächst werden diese Winkeländerungen in bekannter Weise als Functionen der in den Seiten herrschenden und als bekannt vorausgesetzten Spannungen dargestellt, dann aber auch als Functionen der sechs zu dem Dreieck gehörenden Biegungsmomente in den Stabenden bestimmt. Man erhält also für jedes Dreieck drei Relationen zwischen den fraglichen Momenten. Im § 2 wird gezeigt, wie man durch wiederholte Anwendung dieser Relationen und des Satzes, dass die Summe der zu einem Knotenpunkte gehörenden Momente gleich Null ist, die Biegungsspannungen für ein einfaches Fachwerk von gegebener Belastung bestimmen kann. Die Rechnung wird an einem Zahlenbeispiel vollständig durchgeführt. Wie die Aufgabe für bewegte Lasten zunächst angenähert zu lösen sei, wird angedeutet und dann im § 3 die Bestimmung der Biegungsmomente für bewegte Lasten genau durchgeführt. Der § 4 giebt die Anweisung zu einer graphischen Lösung der besagten Aufgabe, welche der Verfasser selbst übrigens für weniger vorteilhaft hält, als die in den ersten §§ auseinandergesetzte rechnerische Lösung der Aufgabe.

F. K.

L. Dyrssen. Ermittlung von Futtermauerquerschnitten mit gebogener oder gebrochener vorderer Begrenzungslinie. Z. f. Bauwesen. XXXVI. 127-130, 389-392.

Es wird ein Näherungsverfahren für die Bestimmung von Futtermauern angegeben, bei welchen die Stützlinie nahezu mit

der Linie zusammenfällt, welche die horizontalen Fugen nach dem Verhältnis 1 : 2 teilt. F. K.

G. Moch. Des canons à fils d'acier. Rev. d'Art. XXVIII. 48-76, 147-161, 256-276, 369-388, 553-579.

Die Festigkeit und Dauerhaftigkeit des Geschützrohres wird bekanntlich dadurch erhöht, dass es mit aufgepressten Ringen umgeben wird. Der Gedanke, diese Ringe durch eine Umwickelung aus Stahldrähten zu ersetzen und dadurch eine noch grössere Widerstandsfähigkeit der Kanonen zu erzielen, ist an verschiedenen Stellen, wie es scheint, unabhängig von einander entstanden. Woodbridge übergab dem Ordnance Department der Vereinigten Staaten von Nordamerika 1850 eine eiserne Kanone, die mit Reifen aus Eisendraht versehen war. Kurz nachher stellte der englische Ingenieur J. A. Longridge, in den Rechnungen von Ch. Brooks unterstützt, seit 1855 eine Reihe von Untersuchungen über die Wirksamkeit von Drahtumwickelungen an (Vgl. die „Minutes of Proceedings of the Institution of civil Engineers" von London XIX (1860), LVI (1879), LXXVI (1884)). Um die von ihm ohne Erfolg empfohlene Construction in weiteren Kreisen bekannt zu machen, hat er dann 1884 bei Spon in London das umfangreiche Werk veröffentlicht: „A Treatise on the application of wire to the Construction of Ordnance", welches mit der mathematischen Theorie der Drahtspannung beginnt. Armstrong in Woolwich hat sich gegen die Arbeiten seines Landsmannes ablehnend verhalten, wie Hr. Moch glaubt, aus principieller Abneigung gegen die Theoretiker. In Frankreich endlich hat der Artillerie-Hauptmann Schultz, ohne die Arbeiten von Longridge zu kennen, seit 1871 Kanonen verfertigt, welche mit Stahldraht unter hoher Spannung umwickelt sind und welche wiederholt zu mannigfachen Versuchen gedient haben. Vor der Veröffentlichung des Werkes von Longridge ist jedoch Schultz gestorben, und Herr Moch übernimmt es jetzt, nach mündlichen Mitteilungen und handschriftlichen Notizen seines ihm vorgesetzt gewesenen Kameraden die Principien be-

kannt zu geben, welche diesen letzteren bei der Construction der Kanonen im allgemeinen und der „Drahtkanonen“ im besonderen geleitet haben. Die im Bd. XXVIII der Rev. d'Art. erschienene Reihe von Artikeln ist noch nicht abgeschlossen. Sowohl aus diesem Grunde als auch wegen des grossen Umfanges der Arbeit begnügen wir uns mit der Wiedergabe der Titel für die einzelnen Abschnitte.

Erster Teil. Theorie der Drähte.

I. Grund für die Verwendung von Drähten. II. Hinzutretende Vorteile bei der Verwendung von Drähten. III. Gesetz der Spannungen nach dem Major Clavarino. Druck, den man einer Röhre auferlegen kann. IV. Ueber die Anwendung der Formeln des Generals Virgile auf die Drähte und über die bei den Rechnungen zu befolgende Methode. V. Formeln für den Widerstand homogener Röhren. VI. Bezeichnungen, die im Verfolge der Rechnungen benutzt sind. VII. Berechnung der Spannungen in einer theoretischen Röhre. VIII. Berechnung der Spannungen in einer Kanone mit theoretischer Umwickelung, wenn die Röhre und die Drähte denselben Elasticitätsmodul haben. IX. Berechnung der Spannungen in einer Kanone mit theoretischer Umwickelung, wenn die Röhre und die Drähte verschiedene Elasticitätsmoduln haben. X. Berechnung des Zustandes der umwickelten Kanonen während der Ruheperioden. XI. Formeln betreffs der Umwickelungen bei gleichförmiger Anfangsspannung. XII. Von den Umwickelungen, bei denen die Verlängerung der Drähte während des Schusses gleichförmig ist. XIII. Annahme des Reissens eines Drahtes. Die der Spannung zu gebenden Aenderungen im Verlaufe des Auflegens eines und desselben Drahtes. XIV. Rechnungsmässige Bestimmung für die Dicke der Röhre und der Umwickelung. XV. Besprechung der vorangehenden Formeln. Lp.

—

C. Capillarität.

B. Weinstein. Untersuchungen über Capillarität. (Habilitationsschrift.) Wiedemann Ann. XXVII. 544-584.

Die Theorie der Capillarität ist nicht abgeschlossen. Wenn man auch weiss, welche Annahmen zur Erklärung der hervorragendsten Erscheinungen genügen, so reichen dieselben doch nicht für alle Fälle aus, sie erklären namentlich nicht die bei steigender Temperatur eintretenden Veränderungen. Die Resultate der verschiedenen Bearbeitungen der Capillaritätstheorie scheinen ferner nicht identisch zu sein. Eine Entscheidung in dieser Hinsicht zu treffen, ist der Zweck der zunächst vorliegenden Abhandlung des Verfassers. Weitere experimentelle und analytische Untersuchungen werden in Aussicht gestellt.

Die angedeuteten Verschiedenheiten zeigen sich in den Ausdrücken für die Laplace'schen Constanten K und H, die nach den Untersuchungen von Laplace, Poisson, Gauss und Stahl immer andere werden. Stahl's Entwickelungen werden nicht in Betracht gezogen, weil sie nicht genügend bekannt gegeben sind. Poisson's Ausdrücke, die im Sinne der Laplace'schen Theorie hergeleitet sind, erscheinen nach den hier vorliegenden Untersuchungen des Verfassers nicht als haltbar; vielmehr führt auch seine Methode, correct angewandt, auf die Ausdrücke von Laplace, die hier übrigens auf andere Weise abgeleitet sind als in dessen eigenen Untersuchungen. Dieselben Ausdrücke erhält man, wie die Abhandlung weiter zeigt, wenn man die Laplace'schen Constanten ermittelt mit Hülfe des Gauss'schen Potentials einer Flüssigkeit auf eins ihrer Elemente. Andererseits sind diese Constanten nicht identisch mit denen von Gauss; sie ergeben sich aus den letzteren erst, wenn man besondere Annahmen über die Molecularkräfte macht. Es erhellt daraus, dass die Constanten von Gauss, welche auch die physikalisch klare Bedeutung von Arbeiten haben, den Vorzug verdienen. Die Laplace'schen Ausdrücke, denen van der Waals neuerdings die Bedeutung der Gauss'schen beizulegen versucht hat, gelten nur unter beschränkenden Voraussetzungen;

und die geniale Theorie von Gauss ist es, welche man für weitere Untersuchungen über Capillarität zu Grunde zu legen hat.

Sbt.

R. Eötvös. Ueber den Zusammenhang der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten mit ihrem Molecularvolumen. Wiedemann Ann. XXVII. 448-459.

Der Verfasser beschreibt zunächst eine schon früher in den „Müegyetemi Lapok“ (Budapest 1875) von ihm mitgeteilte Reflexionsmethode, nach welcher er die Capillaritätsconstanten bestimmt, und die besondere Vorteile gewährt: Dadurch, dass Messungen an Flüssigkeiten in zugeschmolzenen Glasgefässen vorgenommen werden können, wird namentlich eine ausgezeichnete Constanz der Oberflächenspannung erreicht; die Veränderung der Capillaritätsconstante konnte bis weit über die Siedetemperatur hinaus verfolgt werden (z. B. bei Alkohol bis 236°), auch für condensirte Gase liess sich der Wert derselben bestimmen; u. s. w.

Um nun einen Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung und dem Molecularvolumen der Flüssigkeiten zu begründen, vergleicht der Verfasser die Körper wie van der Waals in übereinstimmenden Zuständen, definirt letztere jedoch anders als jener. Wenn bei „einfach zusammengesetzten“ Flüssigkeiten, d. h. bei solchen, deren Molecüle mit denen ihres Dampfes gleiche Masse haben, der Quotient $\frac{v}{u}$ aus dem Molecularvolumen der Flüssigkeit und dem des gesättigten Dampfes für zwei verschiedene Körper bei den entsprechenden Temperaturen T_1 und T_2 denselben Wert hat, so sind dieselben ähnlich zusammengesetzt. Dieselben befinden sich dann auch im Sinne von van der Waals in übereinstimmenden Zuständen, wie die Gleichungen

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1 p_1}{T_1} = \frac{v_2 p_2}{T_2}$$

zeigen. Aus der Annahme, dass solche Körper auch im mechanischen Sinne ähnlich seien, nämlich bezüglich der zwischen

ihren entsprechenden Teilen wirkenden Kräfte und deren Energien, werden dann Folgerungen gezogen, von denen die wichtigste diese ist: Für alle einfach zusammengesetzten Flüssigkeiten hat der Quotient $\frac{d}{dt}(\alpha v^{\frac{2}{3}})$, wo α die Oberflächenspannung bedeutet, denselben von der Temperatur unabhängigen Wert (wenigstens innerhalb gewisser Temperaturgrenzen). Zur experimentellen Prüfung wurden des Verfassers eigene Beobachtungen und die von Schiff an 160 verschiedenen Flüssigkeiten benutzt. Es ergab sich eine befriedigende Uebereinstimmung mit Ausnahme des Wassers, der Alkohole und der Fettsäuren, woraus zu folgen scheint, dass diese Flüssigkeiten innerhalb der untersuchten Temperaturgrenzen nicht einfach zusammengesetzt, sondern dass ihre Molecüle Vielfache der dampfbildenden Molecüle sind und bei höheren Temperaturen eine Zerlegung erfahren.

Sbt.

K. Fuchs. Ueber den Randwinkel einander berührender Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. XXIX. 140-152.

Der Verfasser geht aus von dem Gedanken, dass bei der Bildung von freier Oberfläche einer Flüssigkeit Arbeit geleistet wird, indem Binnenmolecüle in Grenzhautmolecüle, also gesättigte in ungesättigte, verwandelt werden. Diese Arbeit lässt sich auf doppelte Weise ausdrücken: sie ist für die Flächeneinheit gleich c, wenn man sich die Oberfläche durch Zerreissen einer Flüssigkeitsmenge gebildet denkt, und andererseits gleich $p \cdot 1$, wo p die Oberflächenspannung ist, wenn man sich die Längeneinheit des Randes um die Längeneinheit hinausgeschoben denkt. Die Entsättigungsarbeit für die Flächeneinheit (c) ist also gleich der Spannung der Oberflächeneinheit (p). Auf Grund entsprechender Betrachtungen für zwei Flüssigkeiten werden nun Formeln entwickelt, welche die bei der Berührung mehrerer Flüssigkeiten auftretenden Erscheinungen zum Ausdrucke bringen.

Sbt.

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Sur l'instabilité de l'équilibre de la couche superficielle d'un liquide. (Première partie.) Belg. Bull. (3) XI. 341-355. (2e partie.) Belg. Bull. (3) XII. 623-643.

Eine freie Flüssigkeitsmasse mit frisch entwickelter Oberfläche ist als eine Vereinigung von Molekeln anzusehen, welche vibrirende Bewegungen ausführen und deren mittlere Abstände von der äusseren Oberfläche bis zu einer Tiefe hin abnehmen, die dem Radius der Wirkungssphäre der Molecularattraction gleichkommt. Die Temperatur nimmt von der Oberfläche bis zu dieser Tiefe zu.

Der zweite Teil der Arbeit zerfällt in drei Abschnitte. A. Das Vorhandensein einer für eine innere gegebene Temperatur jeder Flüssigkeit eigentümlichen Oberflächenspannung. B. Das Vorhandensein einer zusammenziehenden oder ausdehnenden Kraft an der Berührungsfläche einer Flüssigkeit und eines festen Körpers. C. Oberflächenspannung an der gemeinsamen Oberfläche zweier nicht sich mischenden Flüssigkeiten.

Mn. (Lp.)

J. DELSAUX. Sur la tension superficielle dans la théorie de la capillarité. Brux. S. sc. X B. 43-74.

PH. GILBERT. Analyse. Brux. S. sc. X A. 53.

Die Theorie von Laplace und Gauss, welche nur mechanische Fernewirkungen in Betracht zieht, genügt zur Erklärung aller Capillar-Erscheinungen. Ferner führt diese Theorie zur Betrachtung von Kräften, welche den fictiven, bei der Hypothese der Oberflächenspannung gebrauchten Kräften äquivalent sind. In der Praxis kann, besonders bei Aufgaben über das Gleichgewicht, die Anwendung dieser fictiven Kräfte nichts desto weniger sehr nützlich sein.

Mn. (Lp.)

A. W. REINOLD and A. W. RÜCKER. On the relation between the thickness and the surface tension of liquid films. Lond. R. S. Proc. XL. 441-445, Lond. Phil. Trans. CLXXVII. 627-684.

Cly.

A. W. Rücker. On the critical curvature of liquid surfaces of revolution. Nature. XXXIV. 510.

Bericht über einen Vortrag vor der British Association.

Lp.

Capitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

P. Starke. Die Messung von Schallstärken. Diss. Leipzig. 41 S.

G. A. Hirn. Lettre à M. Liagre. Belg. Bull. (3) XI. 131-135.

Berichtigung zu S. 182 einer von Hrn. Hirn in Bd. XLVI der Belg. Mém. veröffentlichten Abhandlung. Die Schallgeschwindigkeit kann nicht eine Function der Schallstärke sein; denn sonst wäre ein Zusammenspiel in der Musik unmöglich.

Mn. (Lp.)

W. Elsässer. Ueber Transversalschwingungen von Röhren. Diss. Marburg. 34 S. 4°.

Referat in Wiedemann Beibl. XI. 14-15. Lp.

R. Gerhardt. Ueber die Rohrflöte, ein Pfeifenregister der Orgel. Wiedemann Ann. (2) XXVIII. 281-305.

An eine experimentelle Untersuchung der Töne der sogenannten Rohrflöten, d. h. derjenigen gedeckten Pfeifen, in deren Deckel ein engeres Ansatzröhrchen eingefügt ist, knüpft der Verfasser eine Theorie der Schwingungen derartiger Pfeifen. Diese Theorie ist im wesentlichen eine Reproduction einer von Bourget angestellten, in den F. d. M. VII. 1875. 632

chenen Untersuchung und unterscheidet sich von letzterer dadurch, dass eine der Grenzbedingungen hier eine andere wird. Die zu behandelnde Aufgabe ist folgende: Es sollen die Geschwindigkeitspotentiale φ, φ' für beide Röhren so bestimmt werden, dass sie der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

genügen, dass für die beiden Enden der Doppelröhren keine Dichtigkeitsänderungen eintreten, dass ferner an der Stelle, wo beide zusammenstossen, die Dichtigkeitsänderungen beider einander gleich sind, dass endlich an der Ansatzstelle durch den Querschnitt beider Röhren in jedem Zeitteilchen dieselbe Luftmenge hindurchgeht. Diesen Bedingungen genügen die particulären Lösungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi = A\sin(px)\cos(pat)\,[1-\operatorname{cotg}(pl)\operatorname{tg}p(l+l')], \\ \varphi' = A\sin(px)\cos(pat)\,[1-\operatorname{cotg}(px)\operatorname{tg}p(l+l')], \end{cases}$$

wobei p eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$(2)\qquad \frac{q'}{q}\operatorname{tg}(pl) = -\operatorname{tg}(pl')$$

ist. l, l' sind die Längen, q, q' die Querschnitte beider Röhren. Die allgemeine Lösung erhält man, wenn man in (1) die verschiedenen Wurzeln von (2) einsetzt und dann summirt. Der Verfasser hat nun die Wurzeln von (2) für gegebene Zahlenwerte von q, q' l, l' durch ein graphisches Verfahren berechnet und dadurch für verschiedene Doppelröhren sowohl die Höhe des Grundtons ermittelt, als die Höhe der ersten mitklingenden Töne und mit letzteren die Klangfarbe der Pfeife; übrigens sieht man leicht, dass die Obertöne zum Grundton nicht harmonisch sind. Weiter wird noch der Fall besprochen, wo die Ansatzröhre geschlossen statt offen ist. Dagegen ist der Verfasser auf die Bestimmung der Constanten der allgemeinen Lösung aus dem Anfangszustande nicht eingegangen, hat also in mathematischer Hinsicht das Problem nicht so weit durchgeführt wie Bourget. Wn.

J. Lahr. Die Grassmann'sche Vocaltheorie im Lichte des Experiments. Wiedemann Ann. (2) XXVIII. 94-119.

Um festzustellen, durch welche Obertöne die einzelnen Vocale charakterisirt sind, werden die Eindrücke, welche man für die Vocale auf dem Stanniol des Phonographen erhält, durch einen geeigneten Apparat in vergrössertem Massstabe als Curven auf Papier übertragen. Es werden dann diejenigen Ordinaten einer solchen Curve gemessen, deren Fusspunkte die Abscisse einer Periode in *n* gleiche Teile teilen; und daraus werden dann die Coefficienten der den betreffenden Ton darstellenden Fourier'schen Reihe berechnet. Die Besprechung der experimentellen Resultate der Arbeit ist nicht Aufgabe des Jahrbuchs.

Wn.

B. Theoretische Optik.

H. A. Lorentz. Over den invloed, dien de beweging der aarde op de lichtverschijnselen iutoefent. Amst. Versl. en Meded. II. (3) 297-372.

H. A. Lorentz. De l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes lumineux. Néerl. Arch. XXI. 103-176.

Wie der Titel angiebt, bespricht diese Abhandlung den Einfluss, welchen die Bewegung der Erde auf die Lichterscheinungen ausübt. Vor allem wird die Frage behandelt, ob die Abberration des Lichtes mit der Undulationstheorie in Uebereinstimmung zu bringen sei. Eingeleitet wird sie durch eine Erörterung der Untersuchungen, die über den Gegenstand bereits angestellt sind und sich auf Fresnel's Theorie stützen; so werden die Resultate, welche Stokes, Hoek, Veltman und Ketteler erhalten haben, beleuchtet und mit einander verglichen. Diese Untersuchung benutzt der Verfasser, um eine Theorie der Aberration und der damit zusammenhängenden Erscheinungen aufzustellen, welche, aus der modificirten Theorie von Stokes entstanden, jene von
einen besonderen Fall enthält.

Dabei wird angenommen, dass der Aether, der die Erde umgiebt, in Bewegung ist in einer Weise, die bis auf die Annahme, dass ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist, unbestimmt gelassen werden kann.

Besteht irgendwo eine relative Bewegung des Aethers gegen die Erde, so wird angenommen, dass in durchsichtigen ponderablen Stoffen der freie zwischen ihren Molecülen vorhandene Aether an der relativen Bewegung Teil nimmt, so dass innerhalb und ausserhalb eines solchen Stoffes die Geschwindigkeitscomponenten des Aethers durch dieselbe continuirliche Function der Coordinaten dargestellt werden kann, und dass auch das Geschwindigkeitspotential eine continuirliche Function ist. In betreff der undurchsichtigen Körper wird die Annahme gemacht, dass der Aether sich in denselben ebenso wie in den durchsichtigen Stoffen verhält, ausserdem aber auch, dass er hinsichtlich der Molecüle der undurchsichtigen Körper in Ruhe ist. Endlich wird noch eine Voraussetzung gemacht in betreff der Art, auf welche sich in einem ponderablen Stoff, durch welchen der Aether sich bewegt, das Licht fortpflanzt. Sie ist allgemeiner als die von Fresnel, die sie als einen besonderen Fall enthält. Aus diesen Annahmen werden dann die Aberration und andere damit zusammenhängende Erscheinungen erklärt. Die Bearbeitung ist sehr eingehend, aber stets klar und durchsichtig. Die Resultate werden mit denen anderer Forscher wie Klinkerfues, Airy, Ketteler, Hoek, Respighi verglichen. Auch die Versuche von Arago, Fizeau, Babinet und Michelson werden einer theoretischen Untersuchung unterworfen und mit der Hypothese des Verfassers in Verbindung gebracht, wodurch sie auf die einfachste Weise erklärt werden. G.

---

de Colnet d'Huart. Nouvelle théorie servant à calculer le mouvement de la lumière dans les cristaux biréfringents symétriques. Luxemburg. V. Bück. 48 S. 8°.

Referat in Wiedemann Beibl. XI. 46. Lp.

Ed. Salles. Théorie de la double réfraction. Toulouse Mém. (8) VIII. 130-154.

Ein Versuch, die Theorie der Doppelbrechung möglichst elementar darzustellen, insbesondere schwierigere mathematische Entwickelungen zu vermeiden. An die Stelle der Rechnung treten teils der Erfahrung entnommene Hülfsannahmen, teils Betrachtungen weniger strenger Art. Es werden zunächst die Gleichungen für das Gleichgewicht der elastischen Kräfte aufgestellt und die Eigenschaften des Elasticitätsellipsoides abgeleitet. Auf die elastischen Bewegungsgleichungen aber geht der Verfasser gar nicht ein, nimmt vielmehr an, dass die bei der Bewegung des Aethers erregten elastischen Kräfte der Verrückung proportional sind, und wendet auf diese Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen an, wodurch er auf das Fresnel'sche Ellipsoid geführt wird. Dann werden die weiteren Annahmen hinzugefügt, dass in dem elastischen Medium sich transversale Wellen fortpflanzen, deren Geschwindigkeit $W=\sqrt{\frac{E}{K}}$ ist, und dass die Elasticitätsconstante E sich mit der Richtung ändert, für jede Richtung aber einen constanten Wert hat. Mit Hülfe dieser Annahmen ergeben sich dann die Hauptthatsachen der Doppelbrechung aus der Betrachtung des Fresnel'schen Ellipsoids. Die Ermittelung der Wellengeschwindigkeitsfläche erfordert wiederum Hülfsbetrachtungen, die mathematisch nicht völlig streng sind. Wn.

E. Beltrami. Sulla teoria delle onde. Lomb. Ist. Rend. (2) XIX. 424-435.

Bei der Ableitung der Gesetze der Doppelbrechung aus den Gleichungen der Elasticitätstheorie verfährt Herr F. Neumann (Vorlesungen über die Theorie der Elasticität, herausgegeben von O. E. Meyer, Leipzig 1885) folgendermassen. Die Gleichung dritten Grades, welche sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer das Medium durchziehenden ebenen Welle ergiebt, zerfällt für den Fall, dass die Wellennormale in einem Hauptschnitt des

Krystalls liegt, in eine lineare und eine quadratische Gleichung. Damit die letztere, aus welcher die Geschwindigkeit der longitudinalen und einer der transversalen Wellen folgt, wiederum in zwei lineare Factoren zerfalle, müssen zwischen den sechs Constanten der elastischen Gleichungen drei Relationen bestehen [die Relationen (9) p. 234]. Diese Relationen wendet nun Herr Neumann nicht direct an, sondern verbindet mit ihnen die weitere Annahme, dass die Differenzen der Quadrate der übrig bleibenden Constanten vernachlässigt werden können; eine Annahme, die darauf hinauskommt, dass das Medium nahezu isotrop ist. Daraus ergiebt sich dann, dass auch für eine beliebige Lage der Wellennormale aus der Gleichung dritten Grades sich ein linearer Factor, und zwar der auf die longitudinale Welle bezügliche, absondert, während der übrigbleibende quadratische Factor die Fresnel'schen Gesetze ergiebt. Man erkennt aus der eben skizzirten Darstellung nicht, welchen Effect die oben erwähnten Relationen zwischen den Constanten für sich allein haben, und wozu die weitere Annahme über die Grösse dieser Constanten dient. Das zu untersuchen ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.

Herr Beltrami geht in demselben von dem folgenden Ausdruck des elastischen Potentials für ein Medium, das drei orthogonale Symmetrieaxen besitzt, aus:

$$\tfrac{1}{2}[A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2A'\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2C'\alpha\beta+A''\lambda^2+B''\mu^2+C''\nu^2],$$

wobei α, β, γ die Dilatationen, λ, μ, ν die Gleitungen bezeichnen. Von den hieraus folgenden Formeln gelangt man zu den Neumann'schen, wenn man $A' = A'' = a$, $B' = B'' = b$, $C' = C'' = c$ setzt. Damit nun für eine in einem Hauptschnitt liegende Wellennormale die longitudinale Welle sich absondert, müssen zwischen den obigen neun Constanten drei Gleichungen bestehen, deren erste

$$(1) \qquad (B-A'')(C-A'') = (A'+A'')^2$$

ist. Doch genügen diese Relationen für sich allein noch nicht, um die Absonderung der longitudinalen Welle auch bei allgemeiner Lage der Wellennormale zu bewirken. Dazu ist vielmehr

noch die weitere Beziehung

$$(2) \qquad (A-C'')(B-C'')(C-B'') = (A-B'')(B-C'')(C-A'')$$

nötig. Durch Umformung derselben ergiebt sich, falls man noch $A' = A''$, $B' = B''$, $C' = C''$ setzt, dass zwei der Constanten A'', B'', C'' gleich sein müssen. Um diese Einschränkung zu vermeiden, muss man mit Neumann das Mittel als nahezu homogen, d. h. die Differenzen

$$B-C,\quad C-A,\quad A-B,\quad B''-C'',\quad C''-A'',\quad A''-B''$$

als so klein annehmen, dass ihre Quadrate vernachlässigt werden können. Bei dieser Vernachlässigung ist die Gleichung (2) von selbst erfüllt.

Weiter werden nun die Fresnel'schen Gesetze für die Geschwindigkeiten der transversalen Wellen abgeleitet. Die mathematisch sehr elegante Darstellung unterscheidet sich von der Neumann'schen einmal durch Beibehaltung aller neun obigen Constanten [natürlich mit Berücksichtigung der Relationen (1)], sodann aber dadurch, dass Herr Beltrami sich lediglich auf die Umformung der Gleichung des Fortpflanzungsellipsoids stützt, d. h. desjenigen, dessen Axen durch dieselbe Gleichung dritten Grades bestimmt werden, wie die Geschwindigkeiten der zu einer gegebenen Normale gehörigen Wellen. Jenes Ellipsoid wird durch Einführung neuer Constanten an Stelle der ursprünglichen auf die Form gebracht:

$$H(x^2+y^2+z^2)-\alpha(mz-ny)^2-\beta(nx-lz)^2-\gamma(ly-mx)^2 = 1.$$

Wenn durch den Beltrami'schen Aufsatz auch nicht gerade eine Lücke in der Neumann'schen Darstellung ausgefüllt wird, so erfährt die letztere doch eine schätzenswerte Ergänzung, die zugleich auf das Wesen der Sache ein neues Licht [illegible] um Schluss weist Herr Beltrami noch auf einige Incorr[illegible] der Redaction der Neumann'schen Vorlesungen hin. [illegible]

E. Jablonski. Sur une loi de Fresnel. Jordan [illegible] 441-466.

Der Verfasser vervollständigt [illegible]ersuchungen [illegible] den Einfluss der ponderablen Teilche[illegible]tschwin[illegible]

[cf. F. d. M. XVI. 1884. 893-898] durch Aufstellung einer Reflexionstheorie. Zur Durchführung gelangt nur der Fall des Uebergangs des Lichtes aus einem isotropen Medium in ein anderes längs einer ebenen Trennungsfläche. Die Grenzbedingungen werden aus dem vollständigen Princip der Continuität hergeleitet (Gleichheit der Verrückungen und ihrer Ableitungen nach der Normale der Grenzfläche), und ausserdem wird noch das Princip der lebendigen Kraft herbeigezogen. Um zu zeigen, in welcher Weise das geschieht, führen wir die Resultate für ebene Wellen, deren Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene ist, hier an. Es seien B, B', B_1 die Amplituden der einfallenden, reflectirten und gebrochenen transversalen Welle [longitudinale Schwingungen entstehen bei der angenommenen Schwingungsrichtung nicht], α der Einfalls-, α_1 der Brechungswinkel, λ und λ_1 die Wellenlängen, δ und δ' die Aetherdichtigkeiten in beiden Medien, so ergeben die Continuitätsbedingungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} B - B' = B_1, \\ B + B' = B_1 \dfrac{\lambda}{\lambda_1} \dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha}; \end{cases}$$

und zwar gelten diese Gleichungen unabhängig von jeder Annahme über die Abhängigkeit zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Aetherdichtigkeit, sowie über das Gesetz der Kraftwirkung zwischen den Teilchen. Aus den Gleichungen (1) folgt

$$(2) \qquad B^2\lambda\delta\cos\alpha = B'^2\lambda\delta\cos\alpha + B_1^2 \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\cdot\frac{\delta}{\delta'}\cdot\lambda_1\delta'\cos\alpha_1,$$

eine Gleichung, die, wenn

$$B_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = b_1$$

gesetzt wird, aussagt, dass die lebendige Kraft der einfallenden Welle gleich der Summe der lebendigen Kräfte der reflectirten und der gebrochenen Welle sein würde, falls die Amplitude der letzteren gleich b_1 wäre. Verlangt man nun, dass die Amplitude, welche die gebrochene Welle an der Trennungsfläche besitzt, auch beim weiteren Eindringen dieser Welle in das zweite Medium erhalten bleibt, so müsste

$$b_1 = B_1, \text{ d. h. } \frac{\lambda}{\lambda_1}\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} = 1$$

sein. Die Brechungsindices beider Medien müssten also, wie es das Fresnel'sche Gesetz verlangt, den Quadratwurzeln aus den betreffenden Aetherdichtigkeiten proportional sein. Die Gültigkeit dieses Gesetzes würde aber, auf die Theorie des Verfassers angewandt, zu der unzulässigen Folgerung führen, dass die Wirkung zwischen zwei Aetherteilchen dem Quadrat ihres Abstandes direct proportional wäre. Die hier hervortretende Unvereinbarkeit des Fresnel'schen Gesetzes mit seinen eigenen Grundanschauungen führt den Verfasser nicht zu einer Modification der letzteren, sondern zur Verwerfung des Fresnel'schen Gesetzes, das, wenn in aller Strenge gültig, ja auch mit der Dispersion unvereinbar wäre. Er schliesst daher aus den obigen Formeln Folgendes. Die Continuitätsbedingungen ergeben zwar die Amplitude B_1 der gebrochenen Welle an der Trennungsfläche, aber nicht die Amplitude, mit der sich letztere weiter im Innern des zweiten Mediums ausbreitet. Um letztere zu erhalten, muss man vielmehr neben dem Princip der Continuität noch das der lebendigen Kraft anwenden. Ueber die Art und Weise, wie der Uebergang von der Amplitude B_1 zu b_1 vor sich gehen soll, spricht sich der Verfasser nicht aus, so dass hier eine Unklarheit bleibt. Abgesehen von dieser, giebt aber auch die Benutzung des Satzes der lebendigen Kraft, der ja nur eine Folge der übrigen Bedingungen sein sollte, als selbständige Bedingung neben jener zu Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der ganzen Argumentation Anlass.

Zu analogen Resultaten, wie sie hier für die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene besprochen sind, führt auch der Fall, wo die einfallende transversale Welle in der Einfallsebene schwingt. Hier entstehen neben der transversalen noch eine reflectirte und eine gebrochene longitudinale Welle; und die Amplituden der beiden gebrochenen Wellen sind an der Grenzfläche andere, als weiter im Innern; letztere ergeben sich erst aus dem Satze der lebendigen Kraft.

In mathematischer Hinsicht geben die Entwickelungen, die

in bekannter Art durchgeführt werden, zu keinen Bemerkungen Anlass. Wn.

K. VonderMühll. Ueber Green's Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes. Klein Ann. XXVII. 506-514.

Der Verfasser bespricht, ohne irgend welche mathematischen Entwickelungen zu geben, die wesentlichsten Punkte der von Green in den Jahren 1837 und 1838 aufgestellten Lichttheorie und der daran anknüpfenden Arbeiten andrer Autoren. Jene Theorie geht von den Fresnel'schen Grundanschauungen aus, wonach der Aether in den verschiedenen unkrystallinischen Medien gleiche Elasticität, aber verschiedene Dichtigkeit besitzt, und führt daher auf dieselben Grenzbedingungen, die nach Cauchy die Continuität der Bewegung bedingen. Danach müssten bei der Reflexion longitudinale Wellen entstehen. Um diese fortzuschaffen, hatte Cauchy diejenige Elasticitätsconstante A, von der die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen abhängt, als negativ, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen damit als imaginär angenommen. Bei einer solchen Annahme aber würde, wie Green zeigt, stabiles Gleichgewicht des Aethers unmöglich sein. Green ersetzt daher die Cauchy'sche Annahme durch die andre, dass A einen unendlich grossen positiven Wert habe. Dadurch gelangt er zu wesentlich anderen Endformeln, wie Cauchy; und zwar stimmen die Green'schen Formeln mit dem Fresnel'schen, also auch mit der Erfahrung nur dann angenähert überein, wenn das Brechungsverhältnis von 1 wenig verschieden, d. h. die Brechung sehr schwach ist. Ein späterer Versuch Green's, eine grössere Annäherung seiner Formeln an die Fresnel'schen durch Annahme einer Uebergangsschicht zwischen den Medien herzustellen, ist misslungen; die betreffende Rechnung ist fehlerhaft. Dasselbe gilt von der Modification der Green'schen Formeln, die Haughton gegeben; übrigens stimmen die modificirten Formeln auch bei Vermeidung des von Haughton gemachten Fehlers gar nicht mit der Erfahrung überein.

Weiter wird eine Arbeit von Strutt besprochen, der ebenfalls durch Berücksichtigung einer Uebergangsschicht die Green'schen Formeln mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen sucht. Dazu muss er aber über die Wirkung der Uebergangsschicht eine Annahme machen, die eine strengere Betrachtung, wie sie der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes früher angestellt hat [cf. F. d. M. IV. 1872. 521], nicht gerechtfertigt erscheinen lässt. Strutt und vorher Lorenz haben ferner den Umstand, dass die Green'schen Formeln nur mit der Fresnel'schen, nicht mit der Neumann'schen Definition der Polarisationsebene verträglich sind, als gegen die letztere sprechend hingestellt. Der Verfasser verwirft diesen Schluss, weil die Green'schen Formeln nur für schwache Brechung, nicht aber allgemein mit der Erfahrung auch nur angenähert übereinstimmen.

Zum Schluss wird erörtert, wie man vielleicht eine Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung erreichen könne. Der Verfasser meint, man könne zum Ziele gelangen, wenn man zunächst die Rechnung ganz allgemein, ohne jede Annahme über die Elasticitätsconstanten durchführe und hinterher eine passende Annahme über das Verhältnis jener Constanten mache. Die Durchführung dieser Idee wird einer späteren Arbeit vorbehalten. Wn.

P. Volkmann. Ueber Mac Cullagh's Theorie der Totalreflexion für isotrope und anisotrope Medien. Götting. Nachr. 341-358, Wiedemann Ann. (2) XXIX. 263-300.

Der Aufsatz in den Göttinger Nachrichten bildet die Fortsetzung einer im vorigen Jahre besprochenen Arbeit (cf. F. d. M. XVII. 1885. 987). In dieser Fortsetzung geht der Verfasser zunächst nochmals auf die Bestimmung der Schwingungsellipse in der gebrochenen Welle ein, insbesondere für den Fall einaxiger Krystalle, der sich als Grenzfall aus den allgemeinen Formeln ergiebt. Sodann geht er zur Aufstellung der analytischen Ausdrücke über, aus denen die vollständige Lösung des Problems der totalen Reflexion hervorgeht, und zwar gesondert für die

beiden Fälle, dass Licht in einem isotropen stärker brechenden Medium auf ein anisotropes Medium auffällt und totale Reflexion erleidet, oder dass die totale Reflexion innerhalb eines Krystalls erfolgt. Die Grundlagen, auf denen die Aufstellung jener Ausdrücke beruht, sind in dem Referat über den ersten Teil der Arbeit besprochen; wir kommen daher auf dieselben hier nicht zurück. Auch die sich ergebenden Endformeln müssen wir hier übergehen, da sie sich nicht in Kürze wiedergeben lassen. Dagegen mag in Bezug auf die Durchführung der Rechnung noch Folgendes bemerkt werden. Im ersten der beiden oben erwähnten Fälle werden zunächst für einen gegebenen Einfallswinkel die uniradial einfallenden und reflectirten Schwingungen bestimmt, d. h. diejenigen, für welche nur eine gebrochene Welle existirt. Die Rechnung wird zuerst für eine beliebige Lage der Grenzfläche angesetzt, bald aber durch die Annahme vereinfacht, dass Grenz- und Einfallsebene mit je zwei Hauptschnitten des Elasticitätsellipsoids des betreffenden Krystalls zusammenfallen. Die für die reflectirte Welle sich ergebenden Amplituden, die für zweiaxige und einaxige Krystalle gesondert berechnet werden, rechtfertigen die Bezeichnung „totale Reflexion“. Von den besprochenen uniradialen Schwingungen gelangt man sofort zu dem allgemeinen Resultat durch Zerlegung einer beliebigen einfallenden Schwingung in zwei uniradiale. Auch der Fall der Reflexion an der Grenze zweier isotropen Medien ergiebt sich aus den abgeleiteten Formeln.

Die zweite der oben angeführten Abhandlungen in Wiedemann's Annalen ist nur ein redactionell etwas veränderter Abdruck der beiden Teile der oben besprochenen Arbeit.

Wn.

G. Basso. Sulla legge di ripartizione dell' intensità luminosa fra i raggi birifratti da lamine cristalline. Torino Atti XXI. 586-602.

Nach den Messungen von Wild ist das Intensitätsverhältnis der beiden Lichtbündel, welche aus einer planparallelen Platte eines einaxigen Krystalls austreten, wenn auf dieselben ein

Bündel polarisirter Strahlen senkrecht fällt, ein etwas anderes, als es nach dem Malus'schen Gesetze sein sollte; während die von Herrn F. Neumann in seiner Reflexionstheorie aufgestellten Formeln mit jenen Messungen gut übereinstimmen. Trotz dieses Ergebnisses vermag sich Herr Basso mit den Grundanschauungen der Neumann'schen Lichttheorie nicht zu befreunden, sucht vielmehr die Abweichungen vom Malus'schen Gesetz mit Hülfe der elektromagnetischen Lichttheorie zu erklären. Anknüpfend an eine frühere Arbeit (cf. F. d. M. XVII. 1885. 1003) wendet er die Formeln jener Theorie auf den Fall an, dass das Licht aus einem isotropen Medium senkrecht auf eine beliebig orientirte Fläche eines einaxigen Krystalls trifft und durch eine parallele Fläche wieder austritt. Jeder eintretende Strahl teilt sich im Innern der Platte und erzeugt daher auch zwei austretende Strahlen. Für die Intensitäten derselben ergeben sich, falls der eintretende Strahl die Intensität 1 hat, die Werte

$$\frac{16a^2}{(1+a)^4}\cos^2\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{16c^2}{(1+c)^4}\sin^2\vartheta.$$

Dabei ist $\frac{1}{a}$ der Brechungsindex des ordentlichen gebrochenen Strahls, also a seine Geschwindigkeit, bezogen auf die Geschwindigkeit in dem isotropen Medium als Einheit. c ist die Geschwindigkeit, welche der ausserordentliche Strahl im Krystall hat, multiplicirt mit dem Quadrat des Cosinus des Winkels zwischen beiden Strahlen. ϑ endlich ist der Winkel, den die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit den Hauptschnitten des Krystalls bildet. Berücksichtigt man auch die wiederholten Reflexionen im Innern des Krystalls, so ergeben sich statt der obigen Werte der Intensitäten die folgenden

$$\frac{2a}{1+a^2}\cos^2\vartheta, \quad \frac{2c}{1+c^2}\sin^2\vartheta,$$

und für natürliches Licht $\frac{a}{1+a^2}$ und $\frac{c}{1+c^2}$. Hiernach berechnete Zahlenwerte kommen den Wild'schen Messungen noch etwas näher, als die nach der Neumann'schen Theorie berechneten.

Wn.

bei LEIGH. On the intensity of light reflected from certain surfaces at nearly perpendicular incidence. Lond. R. S. Proc. XLI. 275-294.

Cly.

C. SPURGE. On the effect of polish on the reflexion of light from the surface of Iceland spar. Lond. R. S. Proc. XLI. 463-465.

Ein Auszug aus einer grösseren Arbeit, welche über Versuche berichtet, die zur Bestimmung der Wirkung der Politur der Oberfläche bei einem Krystalle von isländischem Spat angestellt wurden, und ebenso der im reflectirten Lichte bewirkten genauen Veränderung. Cly. (Lp.)

J. CONROY. On the polarisation of light by reflexion from the surface of a chrystal of Iceland spar. Lond. R. S. Proc. XL. 173-190.

G. G. STOKES. Note on this object. Lond. R. S. Proc. XL. 190-191.

Der Aufsatz greift auf Versuche von Sir David Brewster zurück (Lond. Phil. Trans. 1819, p. 145), welche zeigten, dass eine Behauptung von Malus inbetreff des isländischen Spats ungenau wäre, und auf Versuche von Seebeck und Neumann aus den Jahren 1830-37 über die Reflexion von Licht an isländischem Spate. Die Versuche von Brewster wurden nie in ihren Einzelheiten veröffentlicht, und der Verf. unternahm auf Veranlassung des Herrn Stokes weitere Beobachtungen über den Gegenstand. Das von Brewster gewonnene Ergebnis bestand darin, dass der polarisirende Winkel vom Azimut nicht unabhängig wäre, sondern in Wahrheit durch eine Formel von der Gestalt $A+B\cos 2\theta$ gegeben würde. Des Verfassers Versuche wurden mit Reflexionen an einer Spaltungsfläche angestellt in Luft, Wasser, Carbontetrachlorid und an einer künstlichen Oberfläche in Wasser. Der Verf. lässt in seinen Resultaten Glieder fort, welche die Cosinus ungerader Vielfacher von θ enthalten,

weil sie wahrscheinlich von Beobachtungsfehlern herrühren, und welche sicherlich klein sind, und er stellt die für die polarisirenden Winkel erhaltenen Werte in der Form $A+B\cos 2\theta+C\cos 4\theta$ dar; auch für die Azimute der Polarisationsebene erhält er Ausdrücke in der Form $D\sin\theta+E\sin 2\theta+F\sin 3\theta+G\sin 4\theta$.

Cly. (Lp.)

E. Ketteler. Ein bemerkenswerter Grenzfall der Krystallreflexion; seine Untersuchung mittels des vervollständigten Kohlrausch'schen Totalreflectometers. Wiedemann Ann. (2) XXVIII. 230-244.

E. Ketteler. Nachtrag zur Totalreflexion von Krystallen. Wiedemann Ann. (2) XXVIII. 520-524.

Der Verfasser wendet die in seiner theoretischen Optik (cf. F. d. M. XVII. 1885. 985) aufgestellten Formeln auf den Fall an, dass an einer Krystallfläche Licht total reflectirt wird, während der Hauptschnitt des Krystalls zur Einfallsebene senkrecht steht. In der zweiten Arbeit werden die analogen Formeln für eine beliebig orientirte spiegelnde Fläche entwickelt, jedoch unter Beschränkung auf einaxige Krystalle. Wn.

K. Schmidt. Ueber die Reflexion an der Grenze krystallinischer elliptisch polarisirender Medien. Wiedemann Ann. (2) XXIX. 451-471. Auch als Separatschrift. Berlin. 38 S. 8°.

Der Verfasser hat die Reflexion des Lichtes am Quarz experimentell untersucht und die gewonnenen Resultate mit den Ergebnissen der theoretischen Arbeiten von Voigt und Ketteler verglichen. Er zeigt zu dem Zwecke, dass, wenn man die kleinen Differenzen in den optischen Constanten des Quarzes als Grössen höherer Ordnung betrachtet, die Anwendung der Voigt'schen Formeln für circularpolarisirende Medien auf den Quarz gestattet ist. Die aus diesen Formeln folgenden Zahlenwerte stehen jedoch mit der Erfahrung nicht in Einklang. Ebenso führt auch die Ketteler'sche Theorie der Reflexion an isotropen Medien zu Widersprüchen mit der Erfahrung. Wn.

W. Voigt. Allgemeine Formeln für die Reflexion des Lichtes an dünnen Schichten isotroper absorbirender Medien. Götting. Nachr. 552-562.

Herr Voigt dehnt hier eine frühere Untersuchung (cf. F. d. M. XVII. 1885. 1001), in der er die Gesetze für die Reflexion des Lichtes an einer dünnen Metallschicht sowie für den Durchgang durch eine solche, beiderseitig von durchsichtigen Medien begrenzte Schicht abgeleitet hatte, auf den Fall aus, dass die dünne absorbirende Schicht einerseits von einem andern absorbirenden, andererseits von einem durchsichtigen Medium begrenzt wird. Die Aufgabe besteht darin, wenn in dem durchsichtigen Medium auf die dünne Schicht eine ebene Welle fällt, die reflectirte Bewegung zu bestimmen. Die Aufgabe wird in ganz analoger Art wie in der früher besprochenen Arbeit durchgeführt. Die allgemeinen Resultate lassen sich unmittelbar auf die Fälle, wo alle drei Medien durchsichtig, oder wo zwei durchsichtig und nur das eine absorbirend ist, endlich sowohl auf totale, als auf partielle Reflexion anwenden. Die neuen Formeln enthalten daher die früheren als specielle Fälle in sich. Wn.

A. Righi. Sulla velocità dei raggi polarizzati circolarmente nell' interno d'un corpo dotato di potere rotatorio. Bologna Mem. (4) VI. 159-163.

Von den zwei circularen Strahlen, in welche sich ein in ein circularpolarisirendes Medium eintretender, vorher linear polarisirter Strahl zerlegt, hat derjenige die grössere Wellenlänge, dessen Schwingungen in demselben Sinne erfolgen wie die resultirende Drehung der Polarisationsebene. Herr Righi erörtert diesen bekannten und leicht zu beweisenden Satz hier noch einmal, weil in Maxwell's „Electricity and Magnetism" (Bd. II, § 812, 813) irrtümlich das entgegengesetzte Resultat angegeben ist. Wn.

L. Sohncke. Elektromagnetische Drehung des natürlichen Lichts. Wiedemann Ann. (2) XXVII. 203-219.

In der wesentlich experimentellen Arbeit wird gezeigt, dass elektromagnetische Kräfte auf natürliches Licht in entsprechender Weise wie auf polarisirtes drehend wirken. Hierdurch erhält die bisherige Anschauung vom Wesen des natürlichen Lichtes im Vergleich zum polarisirten eine neue Stütze. Daneben wird eine neue Interferenzerscheinung (Interferenz zweier Strahlen, die durch entgegengesetzt drehende Quarzplatten gegangen sind) beschrieben und die sehr einfache Theorie dieser Erscheinung entwickelt. Wn.

W. C. L. van Schaik. Sur la formule de Maxwell pour la dispersion électromagnétique des plans de polarisation. Néerl Arch. XXI. 406-431.

Behandelt die verschiedenen Theorien und Formeln, welche durch Becquerel, Lommel, Rowland und Maxwell für die elektromagnetische Dispersion aufgestellt sind, die aus der Drehung der Polarisationsebene entspringt. Die theoretische Behandlung des Gegenstandes schliesst sich an die von Maxwell an, während die Resultate der Rechnung mit den Beobachtungen von Verdet und Becquerel verglichen werden. G.

M. Sternberg. Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. Wien. Ber. XCIV. 95-114, Exner Rep. XXII. 746-763.

Die vorliegende Arbeit behandelt folgende, bereits von Fleischl und Cornu (cf. F. d. M. XVI. 1884. 923) untersuchte Frage: Welches ist die Lichtwellenfläche in einem Medium, das unter Einfluss magnetischer Kräfte die Polarisationsebene des Lichtes dreht? Es wird zunächst gezeigt, dass eine Drehung der Polarisationsebene eine harmonische Relation involvirt. Trägt man nämlich von einem Punkte O auf einer beliebigen Linie nach entgegengesetzten Seiten die Wellenlängen $\lambda' = OL'$, $\lambda'' = OL''$ derjenigen beiden circularen Schwingungen auf, die sich längs jener Linie fortpflanzen, trägt man ferner auf derselben Linie, und zwar auf der Seite der kleineren der obigen beiden Strecken,

die Strecke $\varrho = OR$ ab, die ein Strahl durchlaufen müsste, um die Polarisationsebene um 2π zu drehen, so sind L', L'' durch O und R harmonisch getrennt. Die Länge $\varrho = OR$ ist für die verschiedenen Richtungen verschieden; die Erfahrung lehrt, dass der Ort für die Punkte R aus zwei zur Richtung der magnetischen Kraftlinie senkrechten, von O gleich weit abstehenden Ebenen besteht. Daraus folgt weiter, dass die Wellengeschwindigkeitsfläche der von einem Punkte O des Mediums ausgehenden circularen Wellen eine Rotationsfläche ist, deren Axe mit der magnetischen Kraftlinie zusammenfällt, und deren Meridiancurve in Polarcoordinaten r, φ eine Gleichung von der Form

$$r^2 \pm r \frac{2Q}{a} \cos\varphi - Q = 0$$

hat, wobei Q noch eine unbekannte Function von φ ist. Unter den in dieser Gleichung enthaltenen Curven, von denen mehrere besprochen werden, befinden sich auch zwei in der Richtung der Kraftlinien gegen einander verschobene Ellipsen. Um unter den hiernach noch verbleibenden Möglichkeiten zu entscheiden, muss man mindestens noch eine Erfahrungsthatsache über das optische Verhalten des magnetischen Feldes heranziehen. Das Cornu'sche Gesetz, nach welchem das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten der circular polarisirten Wellen gleich der Geschwindigkeit im Medium ohne die Einwirkung des Magneten ist, erweist sich zu dem angegebenen Zweck als unbrauchbar, weil dasselbe nicht auf geschlossene Curven führt. Nimmt man aber an, das Cornu'sche Gesetz sei eine Näherung, so genügen ein Paar gewisse Flächen vierter Ordnung, sowie auch ein Paar von Rotationsellipsoiden von sehr kleiner Excentricität den an die Wellengeschwindigkeitsfläche [illegible]llenden Anforderungen.

Wn.

J. C. M[illegible] An exp[illegible] [illegible]vestigation into the fo[illegible]ve-m[illegible] Lond. Phil. Trans. C[illegible]

Der Vo[illegible] vor [illegible] Philosophical

Society eine Schrift, welche einige Messungen der „dunklen Ringe“ im Quarz beschrieb. Die gegenwärtige Abhandlung enthält einen Bericht über ähnliche Messungen, welche mit einem bedeutend verbesserten Apparate angestellt sind und sich über ein viel grösseres Feld erstrecken. Die dunklen Ringe gewähren eine empfindliche Methode zur Bestimmung der Verzögerung der ausserordentlichen Welle gegen die ordentliche in dem Krystalle und folglich der Trennung zwischen den beiden Schalen in verschiedenen Punkten der Wellenoberfläche. Er vergleicht seine Resultate mit den Theorien von MacCullagh, Cauchy, Jamin, Clebsch, Sarrau, Boussinesq, Lang, Lommel, Ketteler, Voigt. Und was frühere Messungen der Verzögerung in Quarz anbetrifft, so bezieht er sich auf diejenigen von Jamin und Hecht, und auf seine eigenen Messungen in den Cambr. Phil. Soc. Proc. V. 1883. Cly. (Lp.)

P. Langer. Ueber die Absorption des Lichtes in elektrisch leitenden Medien. Pr. Realsch. Ohrdruf.

Es werden zunächst verschiedene Lichttheorien kurz besprochen, welche zur Erklärung der Dispersion und Absorption eine Wechselwirkung zwischen Körper- und Aetherteilchen postuliren. Dann werden die Grundgleichungen der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie angeführt und aus denselben unter Einführung vereinfachender Annahmen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen berechnet. Dieselbe ergiebt sich als abhängig von der Leitungsfähigkeit des Mediums derart, dass mit einer Erhöhung der letzteren eine Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verbunden ist. Eine experimentelle Prüfung dieses Resultats hat dasselbe nicht bestätigt. Wn.

Schrauf. Ueber das Dispersionsäquivalent von [illegible]wefel. Wiedemann Ann. XXVII. 300-314.

[illegible] Dispersionsäquivalent versteht der Verfasser den Aus- [illegible], wobei P das Moleculargewicht, d die Dichte der

betreffenden Substanz und B das zweite Glied der Cauchy'schen Dispersionsformel bezeichnet. An einigen Beispielen wird geprüft, ob der obige rein empirische Begriff wirklich die geforderten Eigenschaften hat, d. h. ob das Dispersionsäquivalent einer Verbindung gleich der Summe jener der Bestandteile ist. Die in der Arbeit angestellten Ueberlegungen, um a priori die Richtigkeit des obigen Ausdrucks plausibel zu machen, sind weder streng, noch beruhen sie auf klaren theoretischen Vorstellungen.

Wn.

Rayleigh. On the colours of thin plates. Edinb. Trans. XXXIII. 157-170.

Fast seit der Zeit des ersten Lesens von Maxwell's Abhandlung über die Farbenbeziehungen des Spectrums hatte der Verfasser den Wunsch, die Arbeit zu unternehmen, aus seinen Angaben die ganze Reihe der Farben dünner Blättchen zu berechnen und sie auf Newton's Diagramm darzustellen. Dies hat er nun durch seine Tafel III S. 163 geleistet, deren Ergebnisse im Diagramm Tafel X dargestellt sind; wir haben hier nämlich ein gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken bestimmte Farben: Violett, Rot, Grün darstellen. Das Argument der Tafel ist $V = 2D \cos\beta$ und die sich folgenden Werte von V werden durch Punkte auf dem Diagramm dargestellt, indem jeder Punkt nach der Newton'schen Methode eine bestimmte Farbe vorstellt. Das Diagramm erklärt, wie der Verfasser bemerkt, viele durch die Beobachtung bereits bekannte Umstände, wie die Mattigkeit des Blaus erster Ordnung und des Grüns zweiter Ordnung; gutes Blau entdecken wir in der zweiten und dritten Ordnung, gutes Grün in der dritten und vierten. Der Punkt, in welchem das Diagramm am meisten von den Beschreibungen früherer Gewährsmänner abweicht (z. B. Herschel), ist das Hervortreten des Rots in der ersten und zweiten Ordnung. Das erste Rot ist gewöhnlich als zurücktretend angesehen worden; aber der Grund scheint in seiner schwachen Leuchtkraft und somit in der Fähigkeit seiner Vermengung mit weissem Lichte zu liegen. Cly. (Lp.)

E. LOMMEL. Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. München. 135 S. 4° u 8 Taf.

E. LOMMEL. Ueber die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Münch. Ber. 84-87.

STRUVE. Ueber die allgemeine Beugungsfigur in Fernröhren. St. Petersburg, Leipzig. Voss.

O. CHWOLSON. Photometrische Untersuchungen über die innere Diffusion des Lichtes. Péterab. Bull. XXXI. 213-261.

C. Geometrische Optik.

MEISEL. Geometrische Optik, eine mathematische Behandlung der einfachsten Erscheinungen auf dem Gebiete der Lehre vom Licht. Dazu ein Atlas von 5 Figurentafeln. Halle. Schmidt. 171 S. 8°.

H. v. HELMHOLTZ. Handbuch der physiologischen Optik. Zweite umgearbeitete Auflage. Lieferung 1-3. Hamburg u. Leipzig. L. Voss.

Das wohlbekannte Werk, dessen Anfang hier in umgearbeiteter Auflage vorliegt, gehört insofern in den Kreis der im Jahrbuch zu besprechenden Arbeiten, als darin auch die für die physiologische Optik wichtigsten Teile der physikalischen Optik einen Platz gefunden haben. Besondere Beachtung seitens der Mathematiker und Physiker verdient die Darstellung der Lehre den Cardinalpunkten eines Linsensystems und die Anwendieser Lehre auf das Auge. Aber auch abgesehen von

der Linsentheorie, stützt sich Herr v. Helmholtz vielfach auf mathematische Betrachtungen. Wir erwähnen in dieser Hinsicht aus den ersten drei Lieferungen, die neben einer einleitenden anatomischen Beschreibung des Auges die Dioptrik des Auges enthalten, die Theorie des Ophthalmometers, die Besprechung der Farbenzerstreuung im Auge (hier wird die Helligkeit in einem durch Dispersion erzeugten Zerstreuungskreise eines einzelnen leuchtenden Punktes, sowie die Helligkeit am Rande einer gleichmässig erleuchteten Fläche berechnet), endlich die allgemeinen Sätze zur Begründung der Theorie des Augenleuchtens und der Augenspiegel.

Gegenüber der ersten Auflage weist die Neubearbeitung zahlreiche Zusätze und Aenderungen auf, in denen die neueren den Gegenstand betreffenden Arbeiten vollständige Berücksichtigung gefunden haben. Damit ist dem Handbuch in der neuen Gestalt derselbe hervorragende Platz in der wissenschaftlichen Literatur gesichert, den sich die erste Auflage schon seit lange errungen. Wn.

LANGGUTH. Beitrag zur Behandlung der Optik in der Prima des Realgymnasiums. Pr. Realgymn. Iserlohn (No. 344). 52 S. 8°.

Der Stoff ist in elf Capiteln behandelt: 1) Geradlinige Ausbreitung des Lichts. 2) Von der Zurückwerfung des Lichts. 3) Von der Brechung des Lichts. 4) Von der Zerstreuung des Lichts. 5) Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts. 6) Elemente der Undulationstheorie. 7) Das Reflexions- und Brechungsgesetz als Folgerungen der Undulationstheorie. 8) Ableitung der die Lichtstärke betreffenden Gesetze aus der Undulationstheorie. 9) Theorie von Fresnel's Spiegelversuch. 10) Farben dünner Blättchen. 11) Die durch Spaltöffnungen erzeugten Beugungserscheinungen. Anhang: Mathematische Hülfssätze.

Lp.

G. KIRCHHOFF. Sur la théorie des rayons lumineux. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 303-342.

Uebersetzung aus dem Deutschen durch Herrn Duhem, s. F. d. M. XIV. 1882. 829. Red.

A. MANNHEIM. Mémoire d'optique géométrique etc. Jordan J. (4) II. 5-48.

Bericht, dieser Band S. 615.

S. FINSTERWALDER. Ueber Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit etc. Diss. Tübingen. 33 S. 8°.

Bericht S. 733 dieses Bandes.

E. OEKINGHAUS. Ueber Refractionscurven. Hoppe Arch. (2) IV. 429-434.

Die Trennungsfläche zweier brechenden Medien sei eine Ebene; eine Normalebene derselben enthalte im ersten Medium das beobachtende Auge, im zweiten Medium eine gegebene Curve als beobachtetes Object; der Verfasser bestimmt die Gleichung der Bildcurve. Wenn mit a der senkrechte Abstand des Auges von der brechenden Ebene, mit n der Brechungsindex bezeichnet wird, und $n^2-1=m^2$ gesetzt wird, so bestehen zwischen den Coordinaten (x, y) eines Objectpunktes und denjenigen (X, Y) des zugehörigen Bildpunktes die Gleichungen:

$$x = nX\left(1+\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{Y^2}{(X+a)^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = Y\left(1+\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{XY^2}{(X+a)^3}\right).$$

Diese Formeln werden verwendet einerseits für den Fall, dass $a=0$, andrerseits für die Fälle, dass entweder die Objectcurve oder die Bildcurve eine Gerade ist. Fällt man vom Auge auf die Trennungsebene das Lot und lässt die Figur um dieses Lot [illegible]ren, so kann man die erhaltenen Resultate auf Rotations-[illegible] übertragen. R. M.

F. A. Forel. Illusion de grossissement des corps submergés dans l'eau. Bull. Soc. Vaud. (3) XXII. 81-86.

Der Verfasser bespricht die bekannte Erscheinung, dass Körper im Wasser für ein Auge ausserhalb desselben vergrössert erscheinen, wenn die Trennungsfläche beider Medien eine Ebene ist. Der Versuch zur mathematisch-physikalischen Erklärung ist verfehlt, da der Verfasser zufolge seiner Unbekanntschaft mit der Theorie der optischen Strahlensysteme über den Ort und die Eigenschaften des gesehenen Bildes im Unklaren ist. Wertvoller sind die Mitteilungen über subjective Schätzung der Entfernung eines Gegenstandes bei Trübung des zwischen letzteren und dem Auge liegenden Mittels. Lp.

B. Hasselberg. Ueber die Anwendung von Schwefelkohlenstoffprismen zu spectroskopischen Beobachtungen von hoher Präcision. Wiedemann Ann. (2) XXVII. 415-435.

Die Vorzüge der Schwefelkohlenstoffprismen, grössere Lichtstärke und grössere Durchsichtigkeit für die brechbareren Strahlen, können noch weiter gesteigert werden, wenn man statt einfacher, mit planparallelen Deckplatten geschlossener Prismen solche anwendet, bei denen die Deckplatten selbst aus umgekehrt gestellten spitzen Glasprismen gebildet sind. Der Verfasser verfolgt in bekannter Art den Gang der Lichtstrahlen durch eine derartige Prismencombination und ermittelt daraus die günstigsten Verhältnisse. Wn.

Deubel. Beitrag zur Prüfung des Winkelprismas. Jordan Z. f. V. 138-140, 176.

Es ist der von Herrn Jordan geführte Beweis wiedergegeben, dass nur das nicht genau rechtwinkelige Prisma bei der gewöhnlichen Prüfungsmethode, wie sie bei der Kreuzscheibe und dem Spiegelsextanten vorgenommen wird, nicht gestattet, die Bilder nach rechts und nach links mit dem Object zur Deckung zu bringen, während beim rechtwinkeligen, aber nicht genau gleich-

schenkeligen Prisma diese Deckung dann eintritt, wenn der Winkel zwischen dem auffallenden Lichtstrahle und dem Einfallslote in beiden Fällen derselbe ist. Es giebt dann eben keinen ganz festen Strahl. P.

HÄBLER. Geometrische Construction der Linsenformel. Hoffmann Z. XVII. 424-425.

Trägt man auf der Halbirungslinie eines Winkels von 120° vom Scheitel aus die Brennweite f ab und legt durch den Endpunkt derselben eine Gerade, so schneidet diese auf den Schenkeln zwei Stücke a und b ab, welche der Gleichung genügen
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$
Lg.

K. EXNER. Zur Linsenformel. Linsenwirkung nicht homogener Körper. Wiedemann Ann. (2) XXVIII. 111-116.

K. EXNER. Gültigkeit der Linsenformel für nicht homogene Linsen. Wiedemann Ann. (2) XXIX. 484-487.

Es wird zunächst erörtert, welches die eigentlichen Voraussetzungen bei der Ableitung der bekannten Formel für unendlich dünne Linsen sind, nämlich das Vorhandensein einer Ebene, an der die Lichtstrahlen eine Ablenkung nach einem bestimmten Gesetz erfahren. Sodann wird gezeigt, dass ein durchsichtiger Körper von der Gestalt eines geraden Kreiscylinders, dessen Brechungsexponent eine Function des Abstandes von der Cylinder-[illegible]e und in der Axe selbst ein Maximum oder Minimum ist, [illegible]ezug auf einen in der Verlängerung der Axe oder in deren [illegible] befindlichen leuchtenden Punkt wie eine Linse wirkt. Die [illegible]n des Brechungsexponenten kann in der Nähe der Axe [illegible] gesetzt werden, falls x der Abstand von der Axe [illegible]st die Brennweite p des betrachteten, als Linse [illegible]rs

$$p=-\frac{1}{2cl},$$

wenn l die Länge der Cylinderaxe ist. Uebrigens gilt die Linsenformel, wie bei gewöhnlichen Linsen, so auch für alle Arten nicht homogener Linsen. Wn.

S. Exner. Ueber Cylinder, welche optische Bilder entwerfen. Exner Rep. XXII. 299-314.

S. Exner. Nachtrag zur Abhandlung über Cylinder, welche optische Bilder entwerfen. Pflüger Arch. XXXIX. 244-245.

L. Matthiessen. Ueber den Strahlendurchgang durch coaxial continuirlich geschichtete Cylinder mit Beziehung auf den physikalisch optischen Bau der Augen verschiedener Insecten. Exner Rep. XXII. 333-354.

W. Pscheidl. Bestimmung der Brennweite einer Concavlinse mittels des zusammengesetzten Mikroskops. Wien. Ber. XCIV. 66-70.

Das vom Verfasser angegebene Verfahren stützt sich auf den durch die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{p}$ leicht zu verificirenden Satz: Befindet sich ein Gegenstand in der Entfernung der Brennweite vor einer C[illegible]linse, so erscheint ein halb so grosses Bild davon in [illegible] Br[illegible] auf derselben Seite der Linse. R. M.

N. Jadanza. Nuovo [illegible] cannocchiali [illegible] Torin[illegible]

In j[illegible] Axe senk[illegible] einen befind[illegible] Grösse aber [illegible] liegen diese E[illegible]

vor resp. hinter der Linse, ihr Abstand ist also viermal so gross als die Brennweite (bei Vernachlässigung der Linsendicke). Der Verfasser lehrt zuerst zwei Sammellinsen so zusammensetzen, dass der Abstand jener beiden Ebenen Null wird. Ein solches System kann im terrestrischen Fernrohr mit Vorteil zur Aufrichtung des verkehrten Objectivbildes benutzt werden; bringt man es an geeigneter Stelle zwischen Objectivlinse und Objectivbild, so erzeugt es statt des letzteren an derselben Stelle ein gleich grosses aber aufrechtes Bild des Gegenstandes, welches dann durch das Ocular beobachtet wird. Die Länge eines solchen Fernrohres ist also gleich der des astronomischen Fernrohrs, welches dasselbe Objectiv hat. Man kann sogar eine noch grössere Verkürzung erzielen, da der Abstand jener beiden Ebenen auch negativ gemacht werden kann. Der Verfasser bespricht sodann die Construction eines Plesioteleskops, d. h. eines Instruments, bei dem dasselbe Objectiv (nämlich die obige Linsencombination) die Beobachtung entfernter und naher Gegenstände gestattet. Auch zur Verkürzung des zusammengesetzten Mikroskops kann eine ähnliche Combination Verwendung finden.

R. M.

A. Kurz. Ueber Gesichtsfeld und Vergrösserung eines Fernrohrs. Exner Rep. XXII. 106-108.

R. Féret. Essai d'application du calcul à l'étude des sensations colorées. C. R. CII. 44-47, 256-259.

Der Verfasser denkt sich die verschiedenen Farben durch [illegible]nkte des Raums repräsentirt, und zwar sind für diese Dar[illegible], auf deren Einzelheiten hier nicht eingegangen werden [illegible]lich die physiologischen Wirkungen massgebend, [illegible] oder kleinere Sectoren jeder Farbe an der roti[illegible]ibe hervorbringen. Dann ergiebt sich der [illegible]rbe, welche durch Combination mehrerer [illegible] einen Punkt repräsentirt wird, der mit

dem Schwerpunkt der die Einzelfarben repräsentirenden Punkte zusammenfällt, falls man in letzteren Punkten Gewichte anbringt proportional dem Centriwinkel, der zu der betreffenden Farbe an der Farbenscheibe gehört. Wn.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

E. G. Gallop. The distribution of electricity on the circular disc and spherical bowl. Quart. J. XXI. 229-256.

Bekanntlich hat W. Thomson (Reprint of Papers p. 190) und nach ihm Maxwell (2te Aufl., I, p. 292) den Ausdruck für die durch einen beliebigen Punkt inducirte Belegung einer abgeleiteten Kalotte aufgestellt. Das Potential einer solchen Belegung in einem beliebigen Punkt ist von Ferrers (Quart. J. 1882) und Basset (Lond. M. S. Proc. XVI, vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1052) berechnet worden; während aber bei diesen Entwickelungen Kugelfunctionen benutzt werden, berechnet der Verfasser zunächst das Potential einer durch einen Punkt ihrer Axe inducirten Kreisscheibe mittels der Bessel'schen Function $J_0(z)$ (nach der Definition von Lommel), und leitet daraus durch Inversion das Potential einer Kalotte ab.

1) Der Verfasser geht von folgenden Integralformeln aus, von denen die drei ersten schon von H. Weber (Journ. für Math. LXXV. 77 ff.) aufgestellt sind.

$$(1)\qquad \int_0^\infty \cos ax J_0(bx)dx = 0(b<a) = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}(b>a),$$

$$(2)\qquad \int_0^\infty \sin ax J_0(bx)dx = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}(b<a) = 0(b>a),$$

$$(3)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} J_0(bx)dx = \frac{\pi}{2}(b<a) = \arcsin\frac{a}{b}(b>a),$$

$$(4)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{\sin a(\gamma+c)}{\gamma+c}+\frac{\sin a(\gamma-c)}{\gamma-c}\right]J_0(r\gamma)d\gamma=\pi J_0(cr)\,(r<a)$$

$$=2\int_0^a \frac{\cos c\alpha}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\,d\alpha\,(r>a).$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$(5)\qquad V=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\gamma z}\left[\frac{\sin a(\gamma+c)}{\gamma+c}+\frac{\sin a(\gamma-c)}{\gamma-c}\right]J_0(r\gamma)\,d\gamma$$

das Potential einer Kreisscheibe vom Radius a im Punkt $(z>0, r)$ darstellt, welche durch das Potential

$$U=e^{cz}J_0(cr)$$

inducirt ist; denn V genügt der Gleichung $\Delta V=0$ und reducirt sich für $z=0$, $r<a$ auf $-J_0(cr)=-U$; ferner ist, wenn V' den Wert von V auf der negativen Seite der Ebene der Kreisscheibe bezeichnet, für $z=0$

$$\frac{dV'}{dz}=-\frac{dV}{dz}\text{ für } r<a,\qquad \frac{dV'}{dz}=\frac{dV}{dz}=0\text{ für } r>a.$$

Rührt nun U von einer Masse 1 her, welche sich in einem Punkt O der Axe in der Entfernung h von der Scheibe auf der positiven Seite befindet, so ist, wenn $h-z>0$,

$$U=\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}=\int_0^\infty e^{-(h-z)c}J_0(cr)dc,$$

folglich

$$(6)\qquad -\pi V=\int_0^\infty e^{-hc}dc\int_0^\infty e^{-\gamma z}\left[\frac{\sin a(\gamma+c)}{\gamma+c}+\frac{\sin a(\gamma-c)}{\gamma-c}\right]J_0(r\gamma)d\gamma.$$

Die Berechnung dieses Integrals giebt für das Potential in einem Punkt P, wenn Q den symmetrischen Punkt zu O in Bezug auf die Ebene der Scheibe, A und B die Schnittpunkte des Randes mit der durch P und die Axe der Scheibe gelegten Ebene bezeichnen,

$$-\pi V=\frac{1}{PO}\arcsin\left(\frac{PO}{AO}\,\frac{AB}{PA+PB}\right)$$

$$+\frac{1}{PQ}\arcsin\left(\frac{PQ}{AQ}\,\frac{AB}{PA+PB}\right).$$

Für die Dichtigkeit der Belegung der Scheibe auf der positiven und negativen Seite:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dz}+\frac{dU}{dz}\right), \quad \sigma' = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dz}-\frac{dU}{dz}\right),$$

ergeben sich aus (6) die Thomson'schen Ausdrücke.

2) Um das Potential der Belegung einer Kalotte S, welche durch eine in einem beliebigen Punkt O befindliche Elektricitätseinheit inducirt ist, in einem Punkt P zu berechnen, wird S und O durch Inversion in eine Kreisscheibe S' und einen Punkt O' ihrer Axe α' verwandelt; zu diesem Zweck ist als Inversionscentrum C der Schnittpunkt des Restes der Kalottenkugel mit dem Kreis K zu nehmen, welcher durch O geht und in der durch die Axe der Kalotte gehenden Ebene E liegt, und in Bezug auf welchen die Schnittpunkte von E mit dem Rande von S conjugirte Pole sind; der Axe α' entspricht dann der Kreis K, also den Schnittpunkten A', B' des Randes von S' mit der durch α' und P' gehenden Ebene die Schnittpunkte A, B des Randes von S mit der durch K und P gehenden Kugel; den in Bezug auf S' symmetrischen Punkten O' und Q' entsprechen zwei in Bezug auf die Kalottenkugel conjugirte Pole O und Q. Ist k der Inversionsradius, so ist bekanntlich die in O' anzunehmende Elektricitätsmenge $e' = \frac{k}{CO}$, und $V_P = V'_{P'} \frac{k}{CP}$, also nach (6_a)

$$-\pi V = \frac{k^2}{CO\,.\,CP}\left[\frac{1}{P'O'}\arcsin\left(\frac{P'O'}{A'O'}\,\frac{A'B'}{P'A'+P'B'}\right) + \frac{1}{P'Q'}\arcsin\left(\frac{P'Q'}{A'Q'}\,\frac{A'B'}{P'A'+P'B'}\right)\right].$$

Nach den aus der Theorie der Inversion bekannten Formeln geht dieser Ausdruck, wenn M den Mittelpunkt und ϱ den Radius der Kalottenkugel bezeichnet, über in

$$(7) \qquad -\pi V = \frac{1}{PO}\arcsin\frac{AB\,.\,PO}{OB\,.\,PA+OA\,.\,PB} + \frac{\varrho}{MO\,.\,PQ}\arcsin\frac{AB\,.\,PQ}{QB\,.\,PA+QA\,.\,PB}.$$

Nimmt man für O den Mittelpunkt M und die inducirende

Elektricitätsmenge $= -\varrho$, so wird V das Potential einer Gleichgewichtsbelegung der Kalotte mit dem auf derselben herrschenden Potential 1; da dann Q im Unendlichen liegt, so wird

$$(7_a)\qquad \pi V = \arcsin\frac{AB}{PA+PB}+\frac{\varrho}{PM}\arcsin\left(\frac{PM}{\varrho}\frac{AB}{PA+PB}\right),$$

wo A und B die Schnittpunkte des Randes von S mit der durch P und die Axe gehenden Ebene bezeichnen. Lbg.

J. Nieuwenhuyzen Kruseman. Over de potentiaalfunctie van het elektrische veld in de nabijheid van een geladen bolvormige kom. Amst. Versl. en Meded. (3) II. 265-296.

Die Untersuchung von W. Thomson über die Verteilung der Elektricität auf Kugelschalen durch Influenz wird hier durch die Berechnung des Potentials vervollständigt.

Erstens wird das Potential eines geladenen kugelförmigen Leiters berechnet; durch Entwickelung nach Kugelfunctionen wird der Ausdruck einfacher als der, welcher von Thomson für die Dichte auf der Kugel angegeben worden ist. Das erhaltene Resultat benutzt der Verfasser, um die Capacität der Schale zu bestimmen und die ganze Ladung zu berechnen, welche eine abgeleitete Schale durch Influenz einer elektrischen Ladung in einem beliebigen Punkte annimmt.

Im zweiten Teile der Abhandlung wendet er sich zu dem Potential einer abgeleiteten Schale, welche unter dem Einfluss einer Ladung in einem Punkt P steht. Er leitet diese aus dem gefundenen Potential des isolirten schalenförmigen Leiters ab mit Hülfe der Inversion in Bezug auf den Punkt P und des Satzes, dass zwei Functionen, welche hinsichtlich einer Kugel die Bilder von einander sind, dies hinsichtlich des Bildes dieser Kugel bei einer neuen Inversion bleiben. Auf diesem Wege wird der gewünschte Ausdruck für das Potential erhalten.

Schliesslich entwickelt der Verfasser das Potential in der Nähe einer geladenen Schale nach Kugelfunctionen. Er beweist, dass die Entwickelung den Bedingungen der Potentialfunction

in diesem elektrischen Feld genügt, und berechnet daraus die Dichte auf der Kugel, ohne elektrische Bilder zu verwenden.

G.

J. J. Herold. Elektricitätsverteilung auf einer Kugel- und Hohlkugeloberfläche. Pr. Gymn. Gladbach.

In dem Hohlraum eines von zwei concentrischen Kugeln (r_1, r_2) begrenzten Leiters sei an einer beliebigen Stelle eine leitende Kugel (ϱ) isolirt aufgestellt und derselben freie Elektricität mitgeteilt; es soll die Verteilung derselben sowie die Verteilung der auf der Hohlkugel durch Influenz erregten Elektricität bestimmt werden. Diese Aufgabe wird mittels der Methode der „successiven Elektrisirung“ behandelt; d. h. es wird zunächst die Dichtigkeit auf ϱ als constant angesehen und die hierbei durch Influenz auf r_1 erregte Elektricität berechnet. Die Elektricität auf r_1 erregt durch Influenz wieder eine neue Verteilung auf ϱ, die so berechnet wird, als wäre r_1 ein Isolator. Die neue Verteilung auf ϱ ändert den Zustand auf r_1 etc. So ergiebt sich die schliessliche Dichtigkeit auf ϱ und r_1 als unendliche Reihe, von der die ersten Glieder nach bekannter Methode berechnet werden. Die Dichtigkeit auf der äusseren Kugelfläche r_2 bleibt, wie bekannt, constant. Der Hauptaufgabe vorangeschickt ist die Lösung der elementaren Aufgabe, die Verteilung der Elektricität auf einem von zwei concentrischen Kugeln begrenzten Leiter zu ermitteln, wenn derselbe unter Einfluss eines inducirenden, im hohlen Raume gelegenen Punktes liegt; und zwar wird die Lösung durch verschiedene Methoden gefunden.

Wn.

C. H. C. Grinwis. De l'influence des conducteurs sur la distribution de l'énergie électrique. Néerl. Arch. XXI. 251-282.

Siehe F. d. M. XVII. 1885. 1054. G.

F. GAUGER. Ueber die Influenz eines elektrischen Massenpunktes auf einen Conductor, der die Gestalt einer Fresnel'schen Elasticitätsoberfläche hat. Diss. Jena. 27 S. 4°.

J. BUCHANAN. A general theorem in electrostatic induction, with application of it to the origin of electrification by friction. Lond. R. S. Proc. XL. 416-430.

Cly.

J. J. THOMSON. Electrical oscillations on cylindrical conductors. Lond. M. S. Proc. XVII. 310-328.

Ein langer leitender Kreiscylinder vom Radius a, dessen Axe zur z-Axe genommen sei, befinde sich in einem Dielektricum (z. B. Luft); es seien σ und μ der specifische Widerstand und die magnetische Permeabilität des Cylinders, μ' und K die magnetische Permeabilität und die specifische inductive Capacität des Dielektricums (alles in elektrostatischem Mass), also $\frac{1}{\mu' K} = V^2$, wo V die Lichtgeschwindigkeit im Dielektricum bezeichnet; sind σ_m und $\mu_m = 1+4\pi k$ die Werte von σ und μ in elektromagnetischem Mass, so ist $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sigma_m}{\mu_m} = \gamma$. (Z. B. für Kupfer ist $\sigma_m = 1500$, $\mu_m = 1$, also $\gamma = 1500$; für Eisen $\sigma_m = 6 \cdot 1500$, $\mu_m = 400$, also $\gamma = 22$). Mit den bekannten Maxwell'schen Bezeichnungen, wobei φ das elektrostatische Potential bedeutet, gelten für den Cylinder, wenn nur auf seiner Oberfläche freie Elektricität vorhanden ist, die Gleichungen

$$\sigma u = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}, \quad 4\pi\mu u = -\Delta F,$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \quad \Delta\varphi = 0,$$

woraus, wenn alle Functionen den Factor $e^{i(mz+pt)}$ enthalten,

$$(1) \qquad \Delta\left(F - \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{4\pi i p}{\gamma}\left(F - \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx}\right)$$

$$(2) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0, \qquad (3) \qquad \Delta\varphi = 0.$$

Hiernach ist $H = \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx} + H_1$, wo $\Delta H_1 = \frac{4\pi i p}{\gamma} H_1$, oder wenn man Cylindercoordinaten (ϱ, z) einführt und

$$(4) \qquad n^2 = m^2 + \frac{4\pi i p}{\gamma} \text{ setzt,}$$

$$(a) \qquad \frac{d^2 H_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dH_1}{d\varrho} - n^2 H_1 = 0, \quad \text{also } H_1 = BJ_0(in\varrho)e^{i(mz+pt)},$$

wo $J_0(x)$ die Bessel'sche Function 0ter Ordnung (nach der Definition von Hankel und Lommel) bezeichnet, welche bekanntlich der Gleichung

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$$

genügt. Ferner ist

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} - m^2\varphi = 0, \quad \text{also } \varphi = AJ_0(im\varrho)e^{i(mz+pt)},$$

mithin

$$(b) \qquad H = \left[BJ_0(in\varrho) - \frac{m}{p} AJ_0(im\varrho)\right] e^{i(mz+pt)}.$$

Ferner $F_1 = \frac{d\chi}{dx}$, $G_1 = \frac{d\chi}{dy}$, wo χ der Gleichung (a) genügt, also $\chi = CJ_0(in\varrho)e^{i(mz+pt)}$, mithin

$$(c) \qquad F = -\frac{d\varrho}{dx}\left[inCJ_1(in\varrho) - \frac{m}{p} AJ_1(im\varrho)\right] e^{i(mz+pt)},$$

$$G = -\frac{d\varrho}{dy}\left[inCJ_1(in\varrho) - \frac{m}{p} AJ_1(im\varrho)\right] e^{i(mz+pt)}.$$

Aus Gleichung (2) folgt

$$(d) \qquad C = -\frac{im}{n^2} B.$$

Für das Dielektricum gelten die Gleichungen

$$\frac{4\pi}{K} f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\varphi}{dx}, \quad u = \frac{df}{dt}, \quad 4\pi\mu' u = -\Delta F,$$

$$\frac{df}{dz} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \quad \Delta\varphi = 0,$$

woraus, wenn wieder alle Functionen den Factor $e^{i(mz+pt)}$ enthalten,

$$(1^a) \qquad \Delta\left(F - \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx}\right) = -\frac{p^2}{V^2}\left(F - \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

$$(2^a) \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0, \qquad (3^a) \qquad \Delta\varphi = 0.$$

Setzt man also

$$(4^a) \qquad k^2 = m^2 - \frac{p^2}{V^2}, \quad H = \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dz} + H_1,$$

so wird

$$(a') \qquad \frac{d^2 H_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dH_1}{d\varrho} - k^2 H_1 = 0,$$

also

$$H_1 = B' Y_0(ik\varrho)e^{i(mz+pt)},$$

wo $Y_0(x)$ die zweite Bessel'sche Function 0ter Ordnung (nach der Definition von Hankel) bezeichnet, welche der Gleichung $\frac{dY_0(x)}{dx} = -Y_1(x)$ genügt. (Der Verf. setzt $-\frac{1}{2}Y_0(x) = I_0(x)$).
Ferner $\varphi = A' Y_0(im\varrho)e^{i(mz+pt)}$. Folglich

$$(b') \qquad H = \left[B' Y_0(ik\varrho) - \frac{m}{p}A' Y^0(im\varrho)\right]e^{i(mz+pt)}.$$

Ferner wie oben $\chi = C' Y^0(ik\varrho)e^{i(mz+pt)}$, also

$$(c') \qquad F = \frac{d\chi}{dx} + \frac{i}{p}\frac{d\varphi}{dx}$$

$$= -\frac{d\varrho}{dx}\left[ikC' Y_1(ik\varrho) - \frac{m}{p}A' Y_1(im\varrho)\right]e^{i(mz+pt)},$$

$$(d') \qquad C' = -\frac{im}{k^2}B'.$$

Die Bedingung der Continuität von F, G, H und ihrer ersten Differentialquotienten, sowie von φ für $\varrho = a$ liefert ein System von Gleichungen, aus denen folgt

$$(5) \qquad \frac{inaJ_0(ina)}{J_1(ina)} = -\frac{4\pi i V^2}{\gamma p}\frac{ikaY_0(ika)}{Y_1(ika)}.$$

Nun ist, wenn die Schwingungszahl $\frac{p}{2\pi}$ nicht sehr gross ist, $\frac{V^2}{\gamma p}$ sehr gross (z. B. für den obigen Wert $\gamma = 1500$ und für

$\frac{p}{2\pi} = 300$, $\frac{V^2}{\gamma p} = 4 \cdot 10^{14}$), also ist $\frac{ika Y_0(ika)}{Y_1(ika)}$ sehr klein, mithin ka sehr klein; dann ist aber nach Hankel, wenn man

$$\log\delta = 0{,}577 - \log 2, \quad (\delta ika)^2 = \xi \text{ setzt,}$$

$$\frac{ika Y_0(ika)}{Y_1(ika)} = -\frac{1}{2\delta^2}\xi\log\xi,$$

wodurch die Gleichung (5) übergeht in

$$(5^a) \qquad \xi\log\xi = -i\frac{\delta^2\gamma p}{2\pi V^2}\frac{inaJ_0(ina)}{J_1(ina)}.$$

(a) Es sei na so klein, dass man $\frac{inaJ_0(ina)}{J_1(ina)} = 2$ setzen kann; dann geht (5ᵃ) über in

$$(5^b) \qquad \xi\log\xi = -i\frac{\delta^2\gamma p}{\pi V^2} = -iN,$$

wo N sehr klein ist. Setzt man

$$\xi = N\eta e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)}, \quad \chi = \eta\psi,$$

wo η so klein ist, dass man $\cos\chi = 1$, $\sin\chi = \chi$ setzen kann, so zerfällt die Gleichung in

$$(e) \qquad \eta\log\frac{1}{N\eta} = 1, \quad \chi = \frac{\pi}{2}\frac{\eta}{1-\eta},$$

und man erhält

$$k^2 = -\frac{\xi}{\delta^2 a^2} = \frac{\gamma p}{\pi a^2 V^2}\eta\left(\frac{\pi}{2}\eta - i\right),$$

$$(6) \qquad m^2 = \frac{p^2}{V^2} + k^2 = \frac{p^2}{V^2}\left(1 + \frac{\gamma\eta^2}{2a^2p} - i\frac{\gamma\eta}{\pi a^2 p}\right),$$

$$n^2a^2 = m^2a^2 + i\frac{4\pi a^2 p}{\gamma} = \frac{p^2}{V^2}\left(a^2 + \frac{\gamma\eta^2}{2p}\right) + ip\left(\frac{4\pi a^2}{\gamma} - \frac{\gamma\eta}{\pi V^2}\right).$$

Setzt man den aus Gl. (6) folgenden Wert $m = -m_0 + im_1$, also $e^{i(mz+pt)} = e^{-m_1 z}e^{-i(m_0 z - pt)}$, so erhält man eine Schwingung mit dem Exstinctionscoefficienten m_1, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V_0 = \frac{p}{m_0}$ von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit ist; mit den obigen Werten $\gamma = 1500$, $\frac{p}{2\pi} = 300$ ergiebt sich aus

(e) $\eta = 0{,}026$, $\frac{4\pi p}{\gamma} = 16$, mithin ist na für hinreichend kleine Werte von a in der That klein.

b) Es sei na so gross, dass man $\frac{ina\,J_0(ina)}{J_1(ina)} = na$ setzen kann; dann geht (5^a) über in

$$\xi \log \xi = -i\frac{\delta^2 \gamma p\, na}{2\pi V^2},$$

demnach wenn man wieder m als sehr klein annimmt, also $n = (1+i)\sqrt{\frac{2\pi p}{\gamma}}$ setzt,

$$(5^c) \qquad \xi \log \xi = (1-i)\delta^2 a \frac{p^2}{V^2}\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi p}} = (1-i)M,$$

welche Gleichung sich in derselben Weise wie Gl. (5^b) auflösen lässt. Man erhält so, wenn man $\xi = M\zeta e^{i\varphi}$ setzt und ζ durch die Gleichung

$$\zeta \log \frac{1}{M\zeta} = \sqrt{2}$$

bestimmt,

$$(6^a) \qquad m^2 = \frac{p^2}{V^2} + k^2 = \frac{p^2}{V^2}\left(1 + \frac{\zeta}{2a}\sqrt{\frac{\gamma}{\pi p}} - i\frac{\zeta}{2a}\sqrt{\frac{\gamma}{\pi p}}\right),$$

also eine Schwingung, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit wieder von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit ist. Die obige Bedingung für na ist z. B. für Eisen mit den obigen Werten, $\gamma = 22$, $\frac{p}{2\pi} = 300$, wobei $n = (1+i)\frac{33}{\sqrt{2}}$ ist, für nicht zu kleine Werte von a erfüllt.

In analoger Weise behandelt der Verfasser noch den Fall eines submarinen Kabels, d. h. eines leitenden Cylinders, welcher von einer isolirenden Hülle umgeben ist und sich in einem Leiter von grossem specifischen Widerstand (Wasser) befindet.

Lbg.

H. Niebour. Ueber Verteilung und Strömung der Elektricität auf dem Parallelepipedon. Hoppe Arch. (2) IV. 337-357, Diss. Leipzig. 22 S. 8°.

1) Der Verfasser bestimmt zunächst die einem inneren Centrum $p \equiv (x_p, y_p, z_p)$ mit der Masse $+1$ entsprechende Green'sche Function und Green'sche Belegung für eine unendliche planparallele Platte von der Dicke α. Nimmt man als Coordinatenanfang einen beliebigen Punkt in der Mitte zwischen den zwei Flächen, die x-Axe senkrecht auf den Flächen, und bezeichnet mit p_1^1 und p_1^2 die Bilder des Punktes p in den zwei Flächen, allgemein mit p_k^1 das Bild des Punktes p_{k-1}^2 in der ersten Fläche $x = \frac{\alpha}{2}$, mit p_k^2 das Bild von p_{k-1}^1 in der zweiten Fläche, wobei p_k^1 und p_k^2 mit der Masse $(-1)^{k+1}$ zu versehen sind, so sind die x-Coordinaten dieser Punkte

$$x_k^1 = k\alpha + (-1)^k x_p, \quad x_k^2 = -k\alpha + (-1)^k x_p.$$

Die Green'sche Function in dem innern Punkt $\pi \equiv (x, y, z)$ ist nun gleich dem Potential dieser sämtlichen Bildpunkte, also, wenn man $(y_p - y)^2 + (z_p - z)^2 = \varrho^2$ setzt,

$$G_\pi^p = \Sigma \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{(k\alpha + (-1)^k x_p - x)^2 + \varrho^2}},$$

wo für k alle Werte von 1 bis ∞ und von -1 bis $-\infty$ zu nehmen sind; also, wenn r_π^p die Entfernung der Punkte p und π bezeichnet,

$$(1) \qquad G_\pi^p = \frac{1}{r_\pi^p} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(k\alpha + (-1)^k x_p - x)^2 + \varrho^2}},$$

während in einem äusseren Punkt π_a

$$G_{\pi_a}^p = \frac{1}{r_{\pi_a}^p} \text{ ist.}$$

Hiernach ist die Green'sche Belegung in einem Punkt π der Oberfläche

$$\varepsilon_\pi^p = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dG_\pi^p}{dn} - \frac{dG_{\pi_a}^p}{dn}\right),$$

d. h. [illegible] der ersten, [illegible] [illegible]ten Fläche

$$[illegible] \frac{[illegible] + (-1)^k x_p - x}{[[illegible] - x)^2 + \varrho^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Der Verfasser drückt diese Reihen durch ϑ-Functionen aus mittels der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-Nt} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

und der Definition der ϑ-Function (für $g < 0$)

$$\vartheta(z, g) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}^{k} e^{gk^2+2zk}.$$

2) Für ein Parallelepipedum mit den Kanten α, β, γ, dessen Mittelpunkt zum Coordinatenanfang genommen wird, ergiebt sich hieraus unmittelbar für einen inneren Punkt $\pi \equiv (x, y, z)$, wenn die Summation nach $\varkappa$, λ, μ von $-\infty$ bis ∞ erstreckt wird,

$$G^p_\pi = \frac{1}{r^p_\pi}$$

$$-\sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \frac{(-1)^{\varkappa+\lambda+\mu}}{\sqrt{(\varkappa\alpha+(-1)^\varkappa x_p-x)^2+(\lambda\beta+(-1)^\lambda y_p-y)^2+(\mu\gamma+(-1)^\mu z_p-z)^2}},$$

woraus sich ε^p_π wie vorher bestimmt.

Die von dem Verfasser für die Strömung in einer unendlichen Platte und in einem Parallelepipedum aufgestellten Reihen übergehe ich, da — abgesehen von der durchgängigen Verwechselung des Punktes, für welchen das Potential zu bestimmen ist, mit dem Ein- resp. Ausströmungspunkt — dieselben, soviel ich sehe, entgegen der Behauptung des Verfassers, divergent sind. Lbg.

F. Bennecke. Untersuchung der stationären elektrischen Strömung in einer unendlichen Ebene für den Fall, dass die Zuleitung der beiden verschiedenen Elektricitäten in zwei parallelen geradlinigen Strecken erfolgt. (Aus: Nova Acta d. Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. d. Naturf. LI. No. 4.) Diss. Göttingen. 48 S. 4°.

J. Haubner. Ueber die Linien gleicher Stromdichte auf flächenförmigen Leitern. Exner Rep. XXII. 283-290.

G. Robin. Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts. Ann de l'Éc. Norm. (3) III. Supplément. 3-58.

Es sei e_1 und e_2 die Dichtigkeit auf der Aussen- und Innenseite einer nicht geschlossenen Fläche im Punkt p, welche durch ein äusseres Potential W inducirt wird. Man denke sich S als die Grenze zweier unendlich nahen Flächen S_1 und S_2; C_1 und C_2 seien die auf S_1 und S_2 gemachten Projectionen einer um p in der tangirenden Ebene beschriebenen Kreisfläche von sehr kleinem, aber gegen die Entfernung von S_1 und S_2 sehr grossem Radius. Ist p' ein anderer Punkt von S, $pp' = r$, n die innere Normale in p, (rn) der Winkel der Richtungen pp' und n, so ist die nach n gerichtete Kraft von C_1 und C_2 auf eine Elektricitätseinheit in p $2\pi e_1$ und $-2\pi e_2$, die von dem Rest von S herrührende Kraft

$$= -\int (e'_1 + e'_2) \frac{\cos(rn)}{r^2} dS',$$

wo das Integral über die ganze Fläche S erstreckt werden kann; die Gleichgewichts-Bedingung für den Punkt p ist also

$$(1) \qquad 2\pi(e_1 - e_2) = \int (e'_1 + e'_2) \frac{\cos(rn)}{r^2} dS' + \frac{dW}{dn}.$$

Hat man also nach den gewöhnlichen Methoden $e_1 + e_2 = e$ bestimmt, so giebt die vorstehende Gleichung die Verteilung von e auf die beiden Seiten der Fläche. Für eine geschlossene Fläche wird $e_2 = 0$, und die Gleichung geht über in

$$(2) \qquad 2\pi e = \int e' \frac{\cos(rn)}{r^2} dS' + \frac{dW}{dn},$$

welche Gleichung sich bei manchen Problemen mit Vorteil statt der gewöhnlichen Bedingungsgleichungen verwenden lässt.

a) Zunächst benutzt der Verfasser die Gl. (2) zur Bestimmung der Gleichgewichts-Belegung eines kugelähnlichen Körpers; in Polarcoordinaten $(\varrho, \vartheta, \psi)$ wird die Gleichung des Körpers $\varrho = R(1+\alpha\nu)$ gesetzt, wo R eine Constante, α ein zwischen 0 und 1 liegender Parameter, ν eine Function von ϑ und ψ ist; indem $e = \sum_0^\infty e_s \alpha^s$ gesetzt und dieser Wert in die Gl. (2) ein-

geführt wird, ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von α^s eine Recursionsgleichung zur Bestimmung von e_s.

b) Ist die Fläche S ein beliebiges Stück einer Kugelfläche vom Radius ϱ, sind keine inducirenden Massen vorhanden, und ist V das Potential von S, so giebt die Gl. (1)

$$e_1 - e_2 = \frac{V}{4\pi\varrho}.$$

Der Verfasser zeigt weiter, dass allgemein die Gesamtladung eines offenen Conductors auf der Aussenseite grösser als auf der Innenseite ist.

c) Es sei S eine offene Fläche, $S+S' = \Sigma$ eine geschlossene Fläche. Die Aufgabe, die elektrische Verteilung auf S unter Einwirkung äusserer Massen zu bestimmen, lässt sich zurückführen auf die Aufgabe, die Verteilung auf Σ zu bestimmen, wobei die Dichtigkeit ε sein möge, und auf die Aufgabe, die durch einen beliebigen Punkt von S' auf dem abgeleiteten Conductor S inducirte Dichtigkeit zu bestimmen. Denken wir uns nämlich auf Σ die Dichtigkeit ε, und ausserdem auf S' die Dichtigkeit $-\varepsilon$, und ist e die (nach der Annahme bestimmbare) durch letztere auf S inducirte Dichtigkeit, so ist die gesuchte Dichtigkeit auf S gleich $e+\varepsilon$, da ε mit der Dichtigkeit $+\varepsilon$ von S' und mit den äusseren Massen, e mit der Dichtigkeit $-\varepsilon$ von S' im Gleichgewicht ist, und S' sich im neutralen Zustand befindet.

d) Schliesslich reducirt der Verfasser noch die Aufgabe, die Gleichgewichts-Verteilung auf einer von mehreren Randcurven begrenzten Fläche B bei Abwesenheit äusserer Massen zu bestimmen, auf einfachere Aufgaben. Es sei z. B. B von zwei Randcurven begrenzt (etwa eine Kugelzone), und werde durch wei andere Flächen C und C' („Kalotten"), deren jede durch ne Randcurve von S begrenzt ist, zu einer geschlossenen Σ ergänzt. Es sei bekannt: 1) die Gleichgewichts-Ver- Σ bei Abwesenheit äusserer Massen und beim Po- Induction eines beliebigen Punktes von C auf onductor $B+C'$; 3) die Induction eines belie- C' auf den abgeleiteten Conductor $B+C$. ächst über Σ die Dichtigkeit e ausgebreitet,

ferner über C und C' die Dichtigkeit $-e$. Die Dichtigkeit $-e$ von C' möge auf B eine (nach der Annahme bestimmbare) Dichtigkeit β_1, auf C eine Dichtigkeit γ_1 induciren; ebenso inducire die Dichtigkeit $-e$ von C auf B die Dichtigkeit β'_1, auf C' die Dichtigkeit γ'_1; wir haben dann auf B die Dichtigkeit $e+\beta_1+\beta'_1$ und das Potential V, unter Einwirkung einer Dichtigkeit γ_1 auf C und γ'_1 auf C'. Dazu fügen wir auf C' eine Dichtigkeit $-\gamma'_1$, welche auf B eine Dichtigkeit β_2, auf C eine Dichtigkeit γ_2 induciren möge, und auf C eine Dichtigkeit $-\gamma_1$, welche auf B, resp. C' eine Dichtigkeit β'_2, resp. γ'_2 induciren möge; wir haben dann auf B die Dichtigkeit $e+\beta_1+\beta'_1+\beta_2+\beta'_2$ und das Potential V, unter Einwirkung einer Dichtigkeit γ_2 auf C und γ'_2 auf C'. Fahren wir so fort, so erhalten wir schliesslich auf B eine Dichtigkeit $e+{}^s\sum_1^n(\beta_s+\beta'_s)$ und das Potential V, im Gleichgewicht mit einer Dichtigkeit γ_n auf C und γ'_n auf C'. Bezeichnen nun B_s, B'_s, C_s, C'_s die entsprechenden Gesamtladungen, so folgt aus dem bekannten Satze, dass die auf einem abgeleiteten Conductor inducirte Ladung immer kleiner als die inducirende ist, leicht, dass ${}^s\sum_1^n(B_s+B'_s)<C_0+C'_0$, also die Reihe ${}^s\sum_1^\infty(B_s+B'_s)$ convergent ist, mithin auch die Reihen ΣB_s und $\Sigma B'_s$, folglich, da die inducirte Dichtigkeit überall dasselbe Zeichen hat, auch die Reihe $\Sigma\beta_s$ und $\Sigma\beta'_s$. Ferner ist $\lim C_n=\lim C'_n=0$, da sonst die durch $-C'_n$ auf $B+C$ inducirte Ladung auf B den Wert $B_{n+1}=0$, auf C einen von 0 verschiedenen Wert C_{n+1} haben würde, was bekanntlich nicht möglich ist; mithin auch $\lim\gamma_n=\lim\gamma'_n=0$. Die gesuchte Dichtigkeit auf B ist also

$$e+{}^s\sum_1^\infty(\beta_s+\beta'_s).$$

Der Verfasser wendet diese Formel zur Berechnung der Gleichgewichts-Verteilung auf einer Kugelzone an. Lbg.

A. Righi. Studi sulla polarizzazione rotatoria magnetica. Bologna Mem. (4) VII. 443-546.

1) Der Verfasser zeigt zunächst, dass die bisher versuchten experimentellen Nachweise des wirklichen Zerfallens eines geradlinig polarisirten Lichtstrahls in einem drehenden Mittel in zwei entgegengesetzt-circulare mit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Doppelbrechung) illusorisch sind, da sich die Erscheinungen auch erklären lassen, wenn man von der Thatsache der Drehung der Polarisationsebene ausgeht. Lässt man z. B. zwei (etwa rechts gedrehte) circulare Strahlen durch zwei Röhren mit CS_2 gehen, von denen sich die eine in einem Magnetfelde befindet, und lässt sie interferiren, so verschieben sich bekanntlich die Fransen bei Erregung des Magnetfeldes. Diese Phasenänderung lässt sich aber, statt durch eine Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, auch auf die obige Weise erklären; denn sind die Componenten eines jeden der zwei circularen Strahlen $x = a \sin V$, $y = a \cos V$, und erfährt jede Componente des einen Strahls eine Rechtsdrehung ϱ, so werden die Componenten

$$x' = a \sin V \cos\varrho + a \cos V \sin\varrho = a \sin(V+\varrho),$$
$$y' = -a \sin V \sin\varrho + a \cos V \cos\varrho = a \cos(V+\varrho),$$

d. h. dieser Strahl erleidet gegen den andern eine Phasenänderung ϱ. Ebenso wird gezeigt, dass der bekannte Versuch, bei welchem ein durch ein Quarz-Doppelprisma längs der Axe gehender linearer Strahl sich durch Brechung in zwei Strahlen spaltet, sich auch nach der obigen Annahme erklären lässt, wenn man den Vorgang als ein Beugungsphänomen auffasst; beide Hypothesen geben denselben Ausdruck für die Ablenkung der zwei Strahlen von der Axe, und zwar auch dann, wenn die Breite des Prismas so klein ist, dass man auch bei der Hypothese der Doppelbrechung die Erscheinung als ein Beugungsphänomen berechnen muss.

2) Um eine Entscheidung zwischen beiden Hypothesen zu gewinnen, lässt der Verfasser einen geradlinig polarisirten Strahl $x = \sin V$ normal durch eine dünne drehende Platte gehen; dann hängt die Amplitude des zweimal gebrochenen Strahls nach den Fresnel'schen Formeln von seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Platte ab; denkt man sich also den eintretenden Strahl

in einen rechts- und einen linksgedrehten circularen Strahl

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\sin V \\ y_1 = \frac{1}{2}\cos V \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\sin V \\ y_2 = -\frac{1}{2}\cos V \end{cases}$$

zerlegt, und haben diese wirklich in der Platte verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, so erhalten die zwei austretenden circularen Strahlen verschiedene Amplituden, sodass ihre Gleichungen werden

$$\begin{cases} x_1 = \frac{h}{2}\sin V \\ y_1 = \frac{h}{2}\cos V \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{k}{2}\sin V \\ y_2 = -\frac{k}{2}\cos V, \end{cases}$$

woraus ein elliptischer Strahl mit den Componenten

$$x = \frac{h+k}{2}\sin V, \quad y = \frac{h-k}{2}\cos V$$

hervorgeht. (Ein etwa beim Durchgang entstehender Phasenunterschied der zwei circularen Componenten bewirkt nur eine Drehung der Ellipse ohne Formänderung). Eine solche Ellipticität hat der Verfasser beim Durchgang des Lichts durch dünne Eisenschichten im Magnetfelde in der That beobachtet, und er schliesst daraus auf das wirkliche Vorhandensein der Doppelbrechung.

3) Der Verfasser leitet weiter die Gleichung der Wellenfläche im Magnetfelde ab. Sind v_1 und v_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer ebenen Welle, deren Normale mit der Kraftrichtung den Winkel α bildet, so ist nach dem Verdet'schen Gesetz die Drehung für die Längeneinheit, wenn c eine Constante bezeichnet,

$$\frac{\pi}{T}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = c\cos\alpha,$$

oder, wenn K eine andere Constante bezeichnet,

$$(1) \qquad \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = K\cos\alpha.$$

Mit dieser Gleichung verbindet bekanntlich Cornu die Gleichung $v_1 + v_2 = 2v_0$, wo v_0 die Geschwindigkeit ausserhalb des Magnetfeldes bezeichnet; der Verfasser hält diese Gleichung nicht für bewiesen, und ersetzt sie durch die Annahme, dass die Wellen-

fläche um einen Punkt O aus zwei identischen Flächen F_1 und F_2 besteht, welche aus einer Fläche F durch eine Verschiebung δ in der Kraftrichtung nach der einen und andern Seite, wodurch O nach O_1 und O_2 kommt, entstanden sind. Dann ist offenbar $v_1 - v_2 = 2\delta \cos\alpha$, woraus mittelst Gleichung (1) folgt

$$(2) \qquad v_1 v_2 = \text{Const.} = b^2.$$

Diese Gleichung aber sagt aus, dass F ein Sphäroid um die Kraftrichtung als Axe mit den Brennpunkten O_1 und O_2 ist, d. h. dass die Wellenfläche $(F_1\, F_2)$ mit der Fleischl'schen Wellenfläche identisch ist. Der Verfasser untersucht dann weiter diese Wellenfläche näher und zeigt, dass, wenn eine geradlinig polarisirte ebene Welle normal auf das Medium fällt und sich also in zwei die Fläche $(F_1\, F_2)$ berührende, circular schwingende ebene Wellen zerlegt, die zwei zugehörigen Strahlen mit der Wellennormale gleiche Winkel bilden.

4) Weiter berechnet der Verfasser die Drehung, welche entsteht, wenn ein geradlinig polarisirter Lichtstrahl schief durch ein im Magnetfelde befindliches Medium geht und die Magnetkraft entweder senkrecht auf der Platte, oder ihr parallel und in der Einfallsebene liegt, sowie wenn der Strahl nach schiefem Eintritt an der Hinterfläche reflectirt wird und wieder austritt, welcher letztere Fall schon von Kundt experimentell und theoretisch untersucht worden ist. Er berechnet dabei, ebenso wie Kundt, die durch die Brechung und Reflexion eintretende Drehung nach den Fresnel'schen Formeln, indem er von der Thatsache der Drehung der Schwingungsebene im Innern des Mediums ausgeht, und addirt dazu die beim Durchlaufen des Mediums eintretende Drehung. Dabei ergiebt sich folgender Satz: „Hat man den Polarisator und Analysator anfänglich zu einander senkrecht gestellt, so ist bei ursprünglich in der Einfallsebene liegenden Schwingungen die zur Wiederherstellung der Extinction nötige Drehung des Analysators dieselbe, wie die Drehung des Polarisators bei ursprünglich auf der Einfallsebene senkrechten Schwingungen, und umgekehrt“. Die Versuche des Verfassers bestätigten die aufgestellten Formeln sehr annähernd, sodass er aus der nicht vollkommenen Uebereinstimmung keinen Schluss

zu Gunsten der Hypothese der Doppelbrechung, welche bei der Herleitung der Formeln nicht benutzt wurde, ziehen zu können glaubt. Lbg.

P. Duhem. Application de la Thermodynamique aux phénomènes thermo - électriques et pyro - électriques. Ann. de l'Éc. Norm. (3) III. 263-302.

Ueber den ersten Teil vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1043. Der vorliegende zweite Teil behandelt die Theorie der Pyro- und Piëzo - Elektricität, welche letztere nach dem Verfasser nichts weiter als Pyro-Elektricität ist; nach einer brieflichen Mitteilung des Verfassers enthält indessen die Theorie der Pyro-Elektricität einen Irrtum, in Folge dessen das abgeleitete Resultat der Erfahrung widerspricht. Der Verfasser beabsichtigt binnen kurzem eine neue Theorie der Pyro-Elektricität zu veröffentlichen.

Lbg.

F. Salzmann. Ueber thermoelektrische Massbestimmungen. Diss. Berlin. 30 S. 8⁰.

A. Wassmuth und G. A. Schilling. Ueber eine experimentelle Bestimmung der Magnetisirungsarbeit. Wien. Ber. XCIV. 280-301.

Wird ein Eisenstück einem inducirenden Magneten aus unendlicher Entfernung langsam genähert, so wird dabei von der Magnetkraft eine Arbeit L geleistet; wird es dann aus seiner Endlage so schnell wieder in unendliche Entfernung gerückt, dass dabei sein Magnetismus ungeändert bleibt, so wird eine grössere Arbeit W gegen die Magnetkraft verbraucht; die Differenz

$$(1) \qquad A = W - L$$

nennen die Verfasser nach W. Thomson die „Magnetisirungsarbeit", eine Definition, welche sich auch aus dem üblichen Begriff der potentiellen Energie eines Magneten ergiebt. (Vgl. z. B. Adler, Wien. Ber. XCII, F. d. M. XVII. 1885. 1082). Das

Eisen besitze die Form eines verlängerten Sphäroids, dessen Axe beständig in die Richtung der Magnetkraft x fällt; diese sei für alle Punkte des Eisens constant, in der Endlage $= x_1$, und das erzeugte Moment der Masseneinheit sei μ, in der Endlage μ_1; dann ist W (bezogen auf die Masseneinheit) gleich dem Potential des Magneten auf das Eisen in der Endlage, $= \mu_1 x_1$; ferner ergiebt sich leicht

$$(2) \qquad L = \int_0^{x_1} \mu dx,$$

also

$$(3) \qquad A = \mu_1 x_1 - \int_0^{x_1} \mu dx = \int_0^{\mu_1} x d\mu.$$

Zur experimentellen Prüfung der Gl. (2) wurde einmal L direct nach dieser Gl. berechnet, indem für eine Reihe von Werten von x die zugehörigen Werte von μ teils beobachtet, teils nach der Neumann'schen Formel berechnet wurden; andererseits wurde $L = \int p dz$ gesetzt, wo p die an der Wage gemessene Anziehungskraft des Magneten auf das Eisen bei veränderlicher Entfernung z bedeutet. Es ergab sich genügende Uebereinstimmung; da μ nahezu proportional mit x war, so ergab sich nahezu $\int \mu dx = \int x d\mu$. Lbg.

L. Boltzmann. Zur Theorie des von Hall entdeckten elektromagnetischen Phänomens. Wien. Ber. XCIV. 644-669.

a) In einer vor Wirkung der Magnetkraft isotropen Platte, auf welcher die (nach der z-Axe gerichteten) Kraftlinien senkrecht stehen, lassen sich bekanntlich die Maxwell'schen Strömungsgleichungen schreiben:

$$(1) \qquad u + hv = -\varkappa \frac{dP}{dx}, \qquad v - hu = -\varkappa \frac{dP}{dy},$$

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich einmal, wie Maxwell thut, durch eine Veränderung des Körpers in Folge der Magnetkraft erklären,

indem dadurch die Molecüle eine spiralige Anordnung erhalten. Sie lassen sich aber auch durch eine directe Wirkung der Magnetkraft auf die Elektricität erklären. Schreibt man nämlich $v = -\varkappa \frac{dP}{dy} + hu$, so erscheint hu als eine elektromotorische Kraft nach der y-Axe in Folge der Wirkung der Magnetkraft M auf den nach der x-Axe gehenden Strom, welche Wirkung nach dem Biot-Savart'schen Gesetz erfolgt, wobei man aber die Geschwindigkeit der positiven und negativen Elektricität als verschieden annehmen muss, weil sonst beide gleich bewegt werden würden. Es sei e die Menge der positiven Elektricität in der Längeneinheit, ihre Geschwindigkeit $a + 2b$, die Menge der negativen Elektricität e_1, ihre Geschwindigkeit a; bezeichnet J_s und J_m die elektrostatische und elektromagnetische Stromintensität, g ihr Verhältnis, so muss $e(a + 2b) = e_1 a = \frac{1}{2} J_s = \frac{1}{2} g J_m$ sein. Die ponderomotorische Kraft ist nun $= MJ_m = \frac{1}{g} MJ_s$, wovon nach dem Weber'schen Gesetz die eine Hälfte $\frac{1}{g} Me(a+2b)$ auf die positive Elektricität, die andere $\frac{1}{g} Me_1 a$ auf die negative Elektricität wirkt; auf die Einheit der positiven resp. negativen Elektricität wirkt also die Kraft $\frac{1}{g} M(a + 2b)$ und $\frac{1}{g} Ma$, oder die Kraft $\frac{1}{g} M(a+b)$ auf beide in derselben Richtung, die Kraft $\frac{1}{g} Mb$ auf beide in entgegengesetzter Richtung. Letztere ist die Hall'sche Kraft; sie entspricht einer Potentialdifferenz zwischen zwei um β von einander entfernten Punkten $E_s = \frac{1}{g} Mb\beta$ oder $E_m = Mb\beta$.

b) Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\varkappa}{1+h^2}\left(\dfrac{dP}{dx} - h\dfrac{dP}{dy}\right), \\ v = -\dfrac{\varkappa}{1+h^2}\left(\dfrac{dP}{dy} + h\dfrac{dP}{dx}\right), \quad \dfrac{d^2P}{dx^2} + \dfrac{d^2P}{dy^2} = 0, \end{cases}$$

oder wenn man $h = \operatorname{tg}\gamma$ setzt,

$$(3^a)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+h^2}}\left(\dfrac{dP}{dx}\cos\gamma - \dfrac{dP}{dy}\sin\gamma\right), \\[2ex] v = -\dfrac{\varkappa}{\sqrt{1+h^2}}\left(\dfrac{dP}{dx}\sin\gamma + \dfrac{dP}{dy}\cos\gamma\right). \end{cases}$$

Ist also das Potential an den Elektroden gegeben, und erstreckt sich die Platte nach allen Seiten ins Unendliche, so wird P durch die Wirkung der Magnetkraft nicht geändert, dagegen werden die Stromlinien, welche bei nicht erregtem Magnet auf den Aequipotentiallinien senkrecht stehen, um den Winkel γ gedreht. Hat die Platte einen freien Rand, so ist derselbe vor der Erregung des Magneten eine Stromlinie; wird nun der Magnet plötzlich erregt, so bilden die Stromlinien mit dem Rand einen Winkel γ; durch die hierdurch auf dem Rand erzeugte freie Elektricität werden aber die Aequipotentiallinien in entgegengesetztem Sinne um den Winkel γ gedreht, sodass der Rand wieder eine Stromlinie wird. Z. B. bei einer rechteckigen Platte von der Länge λ, Breite β und Dicke δ, deren Seiten β die beiden Elektroden sind, ist vor Erregung des Magneten, d. h. für $h = 0$,

$$P = -ax + b, \quad u = \varkappa a, \quad v = 0.$$

Ist nun β sehr gross gegen λ, so kann man die Platte als nach der y-Richtung unendlich annehmen, erhält also bei Erregung des Magneten nach Gleichung (3)

$$P = -ax + b, \quad u = \frac{\varkappa a}{1+h^2}, \quad v = \frac{\varkappa a h}{1+h^2}.$$

Ist dagegen β verschwindend klein gegen λ, so verhält sich das Innere der Platte wie der freie Rand, es wird also

$$u = \varkappa a, \quad v = 0, \quad P = -ax + hay + c.$$

In diesem Falle ist der Hauptstrom $J = \varkappa a \beta \delta$, die Hall'sche Potentialdifferenz zwischen zwei gegenüberliegenden Randpunkten

$$E = -\frac{dP}{dy}\beta = -ha\beta,$$

also das von Hall so genannte Rotationsvermögen

$$R = \frac{E\delta}{MJ} = \frac{h}{\varkappa M}.$$

Schliesslich berechnet der Verfasser noch die Strömung in einer kreisförmigen Platte mit beliebigen Einströmungspunkten.

Lbg.

F. Exner. Ueber die Ursachen und die Gesetze der atmosphärischen Elektricität. Wien. Ber. XCIII. 222-285.

Die Abhandlung enthält zunächst eine historische Uebersicht über die bisherigen Beobachtungen und Hypothesen. Der Verfasser schliesst sich der zuerst von Erman ausgesprochenen und später von Peltier weiter ausgeführten Ansicht an, dass die Erde eine elektrische Ladung besitzt (und zwar eine negative, da nach allen Beobachtungen ihr Potential bei normalem Wetter mit zunehmender Höhe wächst), dass dagegen die Luft selbst unelektrisch ist und die scheinbare Ableitung von Elektricität aus der Atmosphäre nur von der Potentialdifferenz an den Enden der Leitung, oder, wenn man das Elektroskop selbst nach vorheriger Ableitung hebt, von Influenz herrührt. (Die frühere Ansicht, dass die Verdampfung Elektricität erzeuge, ist durch Versuche widerlegt worden). Dazu kommt aber nach dem Verfasser die von der Erde aus fortgeführte negative Elektricität des Wasserdampfs, durch welche das Potentialgefälle von oben nach unten vermindert wird und auch 0 oder negativ werden kann. Um zu zeigen, dass der von einer elektrisirten Flüssigkeits-Oberfläche aufsteigende Dampf Elektricität mitführt, hat der Verfasser Beobachtungen angestellt, aus denen sich ergab, dass die Verdampfungsgeschwindigkeit aus einer elektrisirten Flüssigkeit grösser ist als aus einer unelektrischen, und dass ferner ein Metallgefäss von einer darüber aufgestellten elektrisirten Metallschale mit verdampfendem Aether Elektricität aufnimmt. [Uebrigens lassen sich die Versuche nach der ersten Methode auch anders erklären; die Versuche nach der zweiten Methode sind von Sohncke (Wied. Ann. XXXIV) wiederholt worden, wobei sich ergab, dass die Mitteilung der Elektricität durch die niedergehenden kalten Luftströme bewirkt wurde; auch nach einer andern Methode angestellte Versuche führten Sohncke zu der

Ueberzeugung, dass eine Fortführung von Elektricität durch Dampf nicht stattfinde. D. Ref.]. Hiernach stellt der Verfasser für das Potentialgefälle $\frac{dV}{dh}$ in der Höhe h über der Erdoberfläche folgenden Ausdruck auf. In geringer Höhe, wo man die Niveauflächen als horizontale Ebenen betrachten kann, geht die Gleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ über in $\frac{d^2V}{dh^2} = -4\pi\varrho$, wo ϱ negativ und proportional dem Gehalt p an Wasserdampf, also $-4\pi\varrho = kp$ ist; oder, wenn man $p = p_0(1-\alpha h)$ setzt,

$$\frac{d^2V}{dh^2} = kp_0(1-\alpha h), \quad \text{woraus} \quad \frac{dV}{dh} = kp_0 h\left(1-\frac{\alpha}{2}h\right) + B,$$

wo B den Wert von $\frac{dV}{dh}$ an der Erdoberfläche bezeichnet. Also

$$\frac{dV}{dh} = B + \frac{k}{\alpha}(p_0 - p)\left(1 - \frac{p_0 - p}{2p_0}\right),$$

oder wenn man mit A den Wert von $\frac{dV}{dh}$ in einer solchen Höhe, wo man $p = 0$ setzen kann, bezeichnet, und welcher derselbe ist wie der an der Erdoberfläche bei möglichster Abwesenheit von Wasserdampf beobachtete,

$$(1) \qquad \frac{dV}{dh} = B + 2(A-B)\frac{p_0 - p}{p_0}\left(1 - \frac{p_0 - p}{2p_0}\right).$$

Nach dieser Formel hat der Verfasser seine eigenen Beobachtungen berechnet und eine ziemliche Uebereinstimmung gefunden. Bei möglichster Abwesenheit von Wasserdampf ergab sich $\frac{dV}{dh}$ nahezu constant $= A = 600 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$, woraus sich die elektrische Dichtigkeit an der Erdoberfläche $\mu = -\frac{A}{4\pi} = 0{,}0016$ elektrostatischer Einheiten, und das Potential der Erde an ihrer Oberfläche $V = -RA = -4 \cdot 10^9$ Volt ergeben würde.

Lbg.

A. Vaschy. Sur la nature des actions électriques dans un milieu isolant. C. R. CIII. 1186-1189.

Enthält eine einfache Herleitung des Maxwell'schen Ausdrucks für den in einem Dielektricum wirkenden Zug und Druck. Setzt man die Kraft zweier Elektricitätsteilchen $= k\frac{ee'}{r^2}$, so ist die Flächendichtigkeit auf einem Conductor, wenn V das Potential, dn die äussere Normale bezeichnet, $\sigma = -\frac{1}{4\pi k}\frac{dV}{dn}$, die Kraft $K = -\frac{1}{2}\frac{dV}{dn}$, also der auf die Oberfläche wirkende normale Druck

$$p = K\sigma = \frac{1}{8\pi k}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2;$$

nimmt man diesen Druck als einen durch das Dielektricum ausgeübten Zug an, so muss beim Gleichgewicht der Conductor einen gleichen und entgegengesetzten Zug auf die Flächeneinheit des Dielektricums ausüben. Denken wir uns nun eine durch zwei unendlich kleine Conductorflächen s und s' begrenzte Kraftröhre von unendlich kleiner Länge, so ist die Resultirende der auf ihre zwei Endflächen wirkenden Zugkräfte, von s aus nach aussen gerechnet,

$$R = ps - p's' = \frac{1}{8\pi k}\left[s\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 - s'\left(\frac{dV'}{dn'}\right)^2\right],$$

oder, da $s\frac{dV}{dn} - s'\frac{dV'}{dn'} = 4\pi kq$ ist, wo q die ganze in der Kraftröhre enthaltene Elektricitätsmenge bezeichnet,

$$R = \frac{1}{8\pi ks'}\left[ss'\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 - \left(s\frac{dV}{dn} - 4\pi kq\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi k}\frac{s}{s'}(s' - s)\left(\frac{dV}{dn}\right)^2 + \frac{s}{s'}q\frac{dV}{dn} = (s' - s)p + q\frac{dV}{dn},$$

da man $\frac{s}{s'} = 1$, $\frac{q^2}{s'} = 0$ setzen kann. Das erste Glied dieses Ausdrucks ist aber die Resultirende eines auf die zwei Endflächen wirkenden gleichmässigen äussern Druckes p, welcher sich durch einen gleichmässigen äussern Druck p auf die Seitenflächen äquilibriren lässt; das zweite Glied ist die auf die innere Elektricität q wirkende Kraft. Zum Gleichgewicht der Kraft-

röhre ist also erforderlich, dass (abgesehen von einer etwa vorhandenen, der letztern Kraft entsprechenden Zugdifferenz) ausser dem den Kraftlinien parallelen Zug p und p' ein Druck p senkrecht zu den Kraftlinien stattfindet. Lbg.

J. Bertrand. Sur les unités électriques. Acta Math. VIII. 387-392.

Der Verfasser glaubt auf folgende Weise einen Mangel des elektrostatischen Masssystems nachweisen zu können. Man denke sich einen Stromkreis, von welchem ein Teil von der Länge L und der Masse M beweglich ist und von dem festen Teil angezogen wird; die elektrodynamische, resp. elektrostatische Intensität des Batteriestroms (also ohne Berücksichtigung der Induction) sei J_d, resp. J_s, der Widerstand des ganzen Kreises R_d, resp. R_s. Die zu einer bestimmten Lagenänderung nötige Zeit lässt sich ausdrücken durch

$$(1) \qquad T = F(L,\ M,\ J_d,\ R_d),$$

wo F eine Function bedeutet, welche keine weiteren dimensionalen Grössen enthält. (Letztere Behauptung ist nicht ohne weiteres klar; ihre Richtigkeit ergiebt sich aber leicht für den Fall zweier gleichen und parallelen, von demselben Strom durchflossenen Stromkreise. D. Ref.). Nimmt man nun die Fundamentaleinheiten der Länge, Zeit und Masse resp. α-, β-, γ-mal so klein als vorher, und beachtet die bekannten Dimensionsgleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} J_d = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}, & R_d = LT^{-1}, \\ J_s = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}, & R_s = L^{-1}T, \end{cases}$$

so erhält man an Stelle der Gleichung (1)

$$\beta T = F(\alpha L,\ \gamma M,\ \alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}\beta^{-1}J_d,\ \ \alpha\beta^{-1}R_d),$$

woraus durch Vergleichung mit (1) leicht folgt

$$(3) \qquad T = \frac{L}{R_d}\,\varphi\left(\frac{LJ_d^2}{MR_d^2}\right),$$

wo φ eine unbestimmte Function bezeichnet. Ist $R_d = \infty$, so wird die Induction unmerklich, mithin T von R_d unabhängig, was nur möglich ist, wenn $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist; in diesem Falle er-

giebt sich also

$$(4) \qquad T = \frac{K}{J_d}\sqrt{LM},$$

wo K eine reine Zahl ist. Im allgemeinen Falle wird man also setzen können

$$T = \frac{K}{J_d}\sqrt{LM}\left[1+\varphi_1\left(\frac{LJ_d^2}{MR_d^2}\right)\right],$$

wo $\varphi_1(x)$ eine für $x = 0$ verschwindende Function ist.

Nun stellt der Verfasser folgendes Princip auf: „Les unités doivent être tellement choisies qu'il puisse exister des formules exprimant les théorèmes de la science et invariables malgré le changement des unités fondamentales". Nach diesem Princip, meint er, müsse aus der Gleichung (1) die analoge Gleichung folgen

$$(1^a) \qquad T = F_1(L, M, J_s, R_s),$$

wo F_1 ebenso wie F eine von den Fundamentaleinheiten unabhängige Function bezeichnet. Daraus aber würde sich auf demselben Wege wie vorher ergeben

$$(3^a) \qquad T = LR_s\psi\left(\frac{LJ_s^2 R_s^4}{M}\right);$$

für $R_s = \infty$ müsste also $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ sein, mithin

$$(4^a) \qquad T = KL^{\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{4}}J_s^{-\frac{1}{2}},$$

was offenbar falsch ist; hieraus schliesst der Verfasser, dass das elektrostatische Masssystem dem obigen Princip nicht genüge und daher mangelhaft sei.

[Dieser Schluss scheint dem Ref. auf einer unrichtigen Anwendung des obigen Princips zu beruhen; dasselbe kann nämlich unmöglich verlangen, dass, wenn in einer Gleichung auch solche Grössen vorkommen, welche sich auf abgeleitete Einheiten beziehen (Elektricitätsmenge, Stromstärke, Widerstand u. dgl.), die Gleichung auch bei Aenderung dieser willkürlich bestimmten abgeleiteten Einheiten ungeändert bestehen bleiben soll. Nur durch diese missbräuchliche Anwendung schliesst der Verfasser aus der Gleichung (1) die Gleichung (1ᵃ), welche offenbar falsch ist,

wenn man darin, wie der Verfasser bei seinen weiteren Schlüssen thut, unter F_r eine nicht noch anderweitig von den Fundamentaleinheiten abhängige Function versteht. Ich will der Einfachheit halber den Widerstand unendlich gross annehmen, also die Induction vernachlässigen, sodass in Gleichung (1) R_d nicht vorkommt; dann kommt J_d nur in dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft $J_d^2 Q$ vor, wo Q eine nur von Längen abhängige Grösse (oder vielmehr im vorliegenden Falle eine blosse Zahl) bezeichnet. Im elektrostatischen Masssystem aber ist diese Kraft $= \frac{1}{g^2} J_s^2 Q$, wo $g = \frac{J_s}{J_d}$ die Dimension LT^{-1} einer Geschwindigkeit hat; die Gleichung (1ª), in welcher unter der gemachten Annahme R_s wegfällt, muss also lauten

$$T = F\left(L, M, \frac{J_s}{g}\right),$$

und aus dieser ergiebt sich durch die Bertrand'schen Schlüsse $T = \frac{Kg}{J_s} \sqrt{LM}$, d. h. genau derselbe Wert (4) wie im elektrodynamischen System, wie auch ohne weiteres daraus klar ist, dass wegen $\frac{J_s}{g} = J_d$ die vorstehende Gleichung mit der Gleichung (1) identisch ist; setzt man dagegen mit dem Verfasser $T = F_1(L, M, J_s)$, so ist F_1 eine noch von den Fundamentaleinheiten abhängige Function, und die zu der Gleichung (4ª) führenden Schlüsse des Verfassers werden hinfällig. Aus der Anwendung, welche der Verfasser von seinem Princip macht, würde man mit demselben Recht folgern können, dass, weil im elektrodynamischen System die ponderomotorische Kraft zweier Stromkreise $X = J_d J'_d \frac{dP}{dx}$ ist, wo P das Potential der zwei Stromkreise auf einander ist, und $\frac{dP}{dx}$ die Dimension 0 hat, diese Kraft im elektrostatischen System durch $X = J_s J'_s \frac{dP}{dx}$ ausgedrückt werden müsste, woraus $J_d J'_d = J_s J'_s$ folgen würde, was der auch vom Verfasser zu Grunde gelegten Annahme, dass J_d und J_s verschiedene Dimension haben, widerspricht. Der Vor-

wurf des Verfassers reducirt sich sonach im Grunde darauf, dass J_d und J_s verschiedene Dimension haben; daraus folgt allerdings, dass eine Stromstärke in beiden Systemen nicht dieselbe, nur mit einer anderen Einheit gemessene Grösse ist; J_d^2 ist zufolge der Definitionsgleichung $X = J_d J'_d \frac{dP}{dx}$, wo $\frac{dP}{dx}$ eine reine Zahl bezeichnet, eine Kraft, oder eine elektrodynamische Elektricitätsmenge ist die mit einer Zeit multiplicirte Quadratwurzel aus einer Kraft, während eine elektrostatische Elektricitätsmenge die mit einer Länge multiplicirte Quadratwurzel aus einer Kraft ist. Will man den Widerspruch im Ausdruck, welcher in dem gemeinsamen Namen „Stromstärke" liegt, vermeiden, so muss man nicht von einer Stromstärke sprechen, welche im elektrodynamischen System diesen, im elektrostatischen jenen Wert hat, sondern von der mit einer gewissen elektrodynamischen Stromstärke verbundenen elektrostatischen Stromstärke; zweckmässiger noch wären zwei verschiedene Namen für diese beiden verschiedenartigen Grössen. D. Ref.]. Lbg.

A. Vaschy. **Loi du rendement correspondant au maximum du travail utile dans une distribution électrique.** C. R. CII. 1235-1238.

In einem beliebigen System von Drähten, in denen die Stromstärken $i_1, i_2, \ldots$, die elektromotorischen Kräfte $E_1, E_2, \ldots$ mit den gegebenen inneren Widerständen $r_1, r_2, \ldots$ und die zu erhitzenden (äusseren) Widerstände $R_1, R_2, \ldots$ oder die zu überwindenden Potentialdifferenzen $E'_1 = R_1 i_1$, $E'_2 = R_2 i_2, \ldots$ angebracht sind, ist die aufgewandte Energie

$$W = \Sigma E_s i_s$$

und die nutzbare Energie

$$W_u = \Sigma E'_s i_s = \Sigma R_s i_s^2 = \Sigma(E_s i_s - r_s i_s^2).$$

Sind die elektromotorischen Kräfte E_s constant und gegeben, und werden die Stromstärken so bestimmt, dass W_u ein Maximum

ist, so ist $E'_s = \frac{1}{2}E_s$, also der Nutzeffect $\frac{W_u}{W} = \frac{1}{2}$; der Verfasser beweist diesen Satz, welcher für einen einfachen Stromkreis in der Form $Ri = \frac{1}{2}E$ bekannt ist, für den Fall einer beliebigen Drahtcombination. Da nämlich für jeden Knotenpunkt $\Sigma i_s = 0$, also auch $\Sigma di_s = 0$ sein muss, während im übrigen die di_s von einander unabhängig sind, so kann man $di_s = \varepsilon i_s$ setzen, wodurch die Bedingung des Maximums

$$dW_u = \Sigma(E_s - 2r_s i_s)di_s = 0$$

übergeht in $\Sigma(E_s - 2r_s i_s)i_s = 0$ oder $2W_u - W = 0$.

Rühren dagegen die elektromotorischen Kräfte von Dynamomaschinen her, sind sie also von den Stromstärken abhängig, so wird die Bedingung des Maximums

$$dW_u = \Sigma\left(E_s - 2r_s i_s + i_s \frac{dE_s}{di_s}\right)di_s = 0,$$

welche auf dieselbe Weise wie vorher übergeht in

$$\Sigma\left(E_s - 2r_s i_s + i_s \frac{dE_s}{di_s}\right)i_s = 0 \quad \text{oder} \quad 2W_u - W + \Sigma i_s^2 \frac{dE_s}{di_s} = 0;$$

je nach dem Vorzeichen der Grössen $\frac{dE_s}{di_s}$ kann also der Nutzeffect beim Maximum von $W_u <$ oder $>$ oder $= \frac{1}{2}$ sein.

Lbg.

A. Vaschy. Conditions réalisant le maximum du travail utile dans une distribution électrique. C. R. CII. 1457-1461.

Der Verfasser berechnet die Intensitäten i_s, welche dem Maximum von W_u entsprechen (siehe das vorhergehende Referat), für den Fall, dass die elektromotorischen Kräfte E_s constant und gegeben sind. Die Bedingungsgleichung ist in diesem Falle

$$(1) \qquad dW_u = \Sigma(E_s - 2r_s i_s)di_s = 0.$$

Sind nun ν Drähte und n Knotenpunkte vorhanden, so ist für irgend einen Knotenpunkt σ

$$(2) \qquad {}^s\sum_1^\nu \alpha_s^\sigma i_s = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

wo $\alpha_s^\sigma = \pm 1$ oder 0 ist, je nachdem der Draht s dem Knotenpunkt σ angehört oder nicht; die di_s müssen also der Bedingung genügen

$$(3)\qquad \sum_1^{\nu} {}^s \alpha_s^\sigma di_s = 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, n).$$

Multiplicirt man jede dieser Gleichungen mit einem Factor a_σ und addirt sie alle zur Gleichung (1), so geht diese über in

$$\sum_1^{\nu} {}^s \left(E_s - 2r_s i_s + \sum_1^{n} a_\varrho \alpha_s^\sigma\right) di_s = 0.$$

Nun kann man aus den Gleichungen (3) n der di_s durch die $\nu - n$ übrigen, vollkommen willkürlich bleibenden ausdrücken; bestimmt man also die a_σ so, dass die Coefficienten der n ersten di_s in vorstehender Gleichung verschwinden, so müssen auch die übrigen verschwinden; wir erhalten also das Gleichungssystem

$$(4)\qquad E_s - 2r_s i_s + {}^\sigma\sum_1^{n} a_\sigma \alpha_s^\sigma = 0 \qquad (s = 1, \ldots, \nu).$$

Eliminirt man hieraus die a_σ, so erhält man $\nu - n$ Gleichungen, aus denen in Verbindung mit den n Gleichungen (2) sich die ν Unbekannten i_s bestimmen. Die Berechnung eines bestimmten i_s, etwa i_t, macht man am einfachsten so, dass man aus den Gleichungen (4) die i_s berechnet, diese Werte in die Gleichungen (2) einsetzt und aus letzteren und der dem Wert $s = t$ entsprechenden Gleichung (4) die a_σ eliminirt. Lbg.

R. Ferrini. Sulla composizione d'una pila voltaica. Lomb. Rend. (2) XIX. 693-697.

Setzt man $z = xy$ Elemente von der elektromotorischen Kraft E und dem innern Widerstand r zu x Gruppen von je y Elementen zusammen, so ist die Stromstärke bei einem äusseren Widerstand a

$$i = \frac{xE}{\frac{xr}{y} + a}.$$

Der Verfasser untersucht nun, für welchen Wert von y bei gegebener Stromstärke die Anzahl z der Elemente ein Minimum

wird. Schreibt man die obige Gleichung in der Form

$$z = \frac{ay^2}{\frac{E}{i}y - r},$$

so ergiebt sich als Bedingung des Minimums von z

$$y = \frac{2r}{E}i,$$

also der innere Widerstand $\frac{xr}{y} = a =$ dem äussern Widerstand. Lbg.

G. Szarvady. Sur la théorie des machines dynamo-électriques fonctionnant comme réceptrices. C. R. CII. 749-753.

K. Schering. Das Deflectoren - Bifilarmagnetometer. Gött. N. 185-195.

H. F. Weber. Die Selbstinduction bifilar gewickelter Drahtspiralen. Berl. Ber. 511-524.

Um die bisher übliche Annahme der Inductionslosigkeit bifilar gewickelter Spiralen zu prüfen, berechnet der Verfasser das Selbstpotential einer solchen Spirale. Es seien zwei Drähte bifilar zu einer Spirale von einer einfachen Windungslage gewickelt; die n Windungen des ersten Drahtes mögen mit $1, 3, \dots, 2n-1$, die des zweiten mit $2, 4, \dots, 2n$ bezeichnet werden; die Enden der Windungen $2n-1$ und $2n$ seien mit einander verbunden, sodass der Strom den Weg $1, 3, \dots, 2n-1, 2n, 2n-2, \dots, 2$ nimmt; das Selbstpotential der Windung s sei Q_s, das Potential der Windungen s und t auf einander $P_{st} = P_{ts}$. Dann ergiebt sich leicht die elektromotorische Kraft der Selbstinduction, in der Richtung nach dem Anfang der Windung 1 genommen, $= S\frac{di}{dt}$, wo das Selbstpotential S der Spirale den Wert hat

$$(1) \quad S = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{2n} - 2(P_{12} + P_{23} + \cdots + P_{2n-1,2n}) + 2(P_{13} + P_{24} + \cdots + P_{2n-2,2n}) - 2(P_{14} + P_{25} + \cdots + P_{2n-3,2n}) + \cdots + 2(P_{1,2n-1} + P_{2,2n}) -$$

Sind alle Windungen vollkommen gleich und haben je zwei benachbarte gleichen Abstand von einander, so ist

$$Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_{2n} = Q,$$

und die Glieder einer jeden Klammer des vorstehenden Ausdrucks sind einander gleich, es wird also

$$(2) \quad \tfrac{1}{2}S = nQ - (2n-1)P_{12} + (2n-2)P_{13} - (2n-3)P_{14} + \cdots + 2P_{1,2n-1} - P_{1,2n}.$$

(Dieser Ausdruck ist schon von Hertz, Wied. Ann. X, dessen Abhandlung aber dem Verfasser unbekannt war, aufgestellt worden).

Ist dagegen die Spirale unifilar gewickelt, sodass der Strom den Weg 1, 2, 3, ..., $2n$ verfolgt, so ist das Selbstpotential

$$(2^a) \quad \tfrac{1}{2}S' = nQ + (2n-1)P_{12} + (2n-2)P_{13} + (2n-2)P_{14} + \cdots + P_{1,2n}.$$

Bezeichnet r den Radius der Mittellinie einer Windung, ϱ den Radius des Querschnitts des Drahtes, δ den Abstand zweier benachbarten Mittellinien, b die Höhe der Spirale, und kann man $\frac{b^2}{r^2}$ vernachlässigen, so ist (Maxwell, 2te Aufl., p. 432)

$$Q = 4\pi r\left(\log\frac{8r}{\varrho} - 1\tfrac{3}{4}\right),$$

$$P_{12} = 4\pi r\left(\log\frac{8r}{\delta} - 2\right),$$

$$P_{13} = 4\pi r\left(\log\frac{8r}{2\delta} - 2\right), \ldots, P_{1,2n} = 4\pi r\left(\log\frac{8r}{(2n-1)\delta} - 2\right),$$

also

$$(3) \quad \tfrac{1}{2}S = 4\pi rn\left(\log\frac{\delta}{\varrho} + \tfrac{1}{4} - \frac{1}{n}\sigma\right),$$

$$\tfrac{1}{2}S' = 4\pi r\,.\,2n^2\left[\log\frac{8r}{\delta} - 2 + \frac{1}{2n}\left(\log\frac{\delta}{\varrho} + \tfrac{1}{4}\right) - \frac{1}{2n^2}\sigma'\right],$$

wo

$$\sigma = (2n-2)\log 2 - (2n-3)\log 3 + \cdots + 2\log(2n-2) - \log(2n-1),$$

$$\sigma' = (2n-2)\log 2 + (2n-3)\log 3 + \cdots + 2\log(2n-2) + \log(2n-1).$$

So ergiebt sich z. B. für eine Spirale, bei welcher $r = 50{,}08^{cm}$, $\varrho = 0{,}0485^{cm}$, $\delta = 0{,}1485^{cm}$, $2n = 12$ war, $S = 8045^{cm}$, während

sich mittelst des Telephons noch ein Wert $S = 10^{cm}$ beobachten lässt. Die Beobachtung in der Wheatstone'schen Brücke mit Telephon ergab für diese Spirale $S = 8082^{cm}$. Lbg.

I. KLEMENČIČ. Untersuchungen über das Verhältnis zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Masssystem. II. Wien. Ber. XCIII. 470-492, Exner Rep. XXII. 568-587.

Die vorliegenden Untersuchungen über das Verhältnis v der elektrostatischen zur elektromagnetischen Stromstärke wurden mit demselben Apparat ausgeführt wie die früheren (siehe F. d. M. XVI. 1884. 1055); der Unterschied der Beobachtungsmethode von der früheren bestand aber darin, dass in Folge der Einschaltung eines grossen Widerstandes in die Galvanometer-Leitung bei jeder Schwingung des Stimmgabel-Unterbrechers der Condensator nur zum Teil entladen wurde. Ist q_0 die ganze Ladung des Condensators, q die zur Zeit t nach Beginn der Entladung noch vorhandene Ladung, R der Widerstand und S das Selbstpotential des Entladungsdrahtes, C die Capacität des Condensators (alles in elektrostatischem Mass), so ist bekanntlich

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{S}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CS} = 0,$$

woraus, wenn man

$$\alpha = \frac{R}{2S}, \quad \gamma = \alpha\sqrt{1 - \frac{4S}{CR^2}}$$

setzt,

$$q = \frac{q_0}{2\gamma}\left[(\gamma+\alpha)e^{-(\alpha-\gamma)t} + (\gamma-\alpha)e^{-(\alpha+\gamma)t}\right],$$

oder da $\frac{4S}{CR^2} = \mu$ sehr klein war,

$$q = q_0(1+\mu)e^{-\frac{t}{CR}}.$$

Ist also n die Schwingungszahl des Stimmgabel-Unterbrechers, ψ_0 die Galvanometer-Ablenkung, wenn bei jeder Schwingung der Condensator vollständig entladen wird, ψ die beobachtete Ab-

lenkung, wenn jede Entladung nur die Zeit t dauert, h eine Constante, so ist

$$\psi_0 = hnq_0, \quad \psi = hn(q_0 - q),$$

also

$$(1) \qquad \psi_0 - \psi = \psi_0(1+\mu)e^{-\frac{t}{CR}},$$

woraus sich R und damit $v^2 = \frac{R_m}{R}$, wo R_m den Widerstand in elektromagnetischem Mass bezeichnet, berechnen lässt. Der Widerstand R wurde so gewählt, dass die Capacität des Entladungsdrahtes vom Galvanometer bis zum Stimmgabel-Unterbrecher keinen merklichen Einfluss ausübte; die gefundene Zahl stimmte mit der frühern fast genau überein. Lbg.

R. Colley. Ueber einige neue Methoden zur Beobachtung elektrischer Schwingungen, und einige Anwendungen derselben. II. Wiedemann Ann. XXVIII. 1-21.

Nach der in einer früheren Abhandlung (Wied. Ann. XXVI, vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1063) beschriebenen Methode hat der Verfasser das Verhältnis v der elektrostatischen zur elektromagnetischen Stromstärke bestimmt. Bezeichnet c die Capacität des Condensators, p den Selbstinductionscoefficienten und r den Widerstand des Nebenkreises, alles in elektromagnetischem Mass, so ist die halbe Schwingungsdauer des Extrastroms

$$\tau = \frac{\pi\sqrt{pc}}{\sqrt{1-\frac{cr^2}{4p}}} = \pi\sqrt{pc},$$

da $\frac{cr^2}{4p}$ verschwindend klein war. Ist also c_s die Capacität des Condensators in elektrostatischem Mass, so ist $v^2 = \frac{c_s}{c}$, also

$$v = \frac{\pi}{\tau}\sqrt{pc_s}.$$

τ wurde nach der a. a. O. angegebenen Methode bestimmt, p und c_s durch Vergleichung mit einer Normalrolle und einem Normalcon-

densator, deren Selbstinductionscoefficient und Capacität sich theoretisch berechnen liess. Als Mittel ergab sich $v = 3{,}015 . 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Lbg.

C. A. Porges. Ueber eine Inductionserscheinung. Wien Ber. XCIV. 461-475.

Ist zwischen den ein homogenes Feld bildenden Polen eines Elektromagneten eine flache Spirale aufgehängt, sodass ihre Axe einen Winkel α mit den Kraftlinien bildet, so wird in ihr beim Erregen oder Verschwinden der Magnetkraft ein Strom inducirt, und durch die auf diesen ausgeübte ponderomotorische Kraft erhält sie eine Winkelgeschwindigkeit, vermöge deren sie, wie eine leichte Rechnung zeigt, eine mit $\sin 2\alpha$ proportionale Ablenkung erfährt. Die Versuche bestätigten die aufgestellte Formel.

Lbg.

Haentzschel. Bemerkung zu Besser „Ueber die Verteilung der Elektricität auf einem unbegrenzten elliptischen Cylinder. Schlömilch Z. XXXI. 54-55.

R. Besser. Erwiderung. Ebendaselbst.

Haentzschel will zu dem von Besser (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 1058) aufgestellten Satze, dass die Gleichung $\Delta V = 0$ für einen unbegrenzten Cylinder zweiten Grades sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen lässt, einen Zusatz gemacht wissen. Besser entgegnet mit Recht, dass dieser Zusatz längst bekannt sei.

Lbg.

L. Sohncke. Elektromagnetische Drehung natürlichen Lichts. Wiedemann Ann. XXVII. 203-219.

Dass eine drehende Kraft (z. B. Quarz oder der elektrische Strom) auf natürliches Licht ebenso wirkt wie auf geradlinig polarisirtes, hat der Verfasser auf folgende A[illegible] [illegible]ewiesen. Da zwei senkrecht zu einander polarisirte Stra[illegible] [illegible] inter-

feriren, so müssen, falls die obige Annahme richtig ist, die durch zwei neben einander stehende parallele Spalten erzeugten Interferenzfransen bei durchgehendem natürlichen Licht verschwinden, wenn man auf das eine Strahlenbündel eine drehende Kraft wirken lässt, welche einen geradlinig polarisirten Strahl um 90° drehen würde. (Für die Drehung durch Quarz hat nach einer Mitteilung an den Verfasser schon Abbe dieses Verschwinden der Fransen beobachtet). Dies fand nun der Verfasser in der That bestätigt; setzt man vor den einen Spalt eine um 45° nach rechts, vor den andern eine um 45° nach links drehende Quarzplatte, so verschwinden die Fransen; bei geringerer Drehung treten sie wieder auf, nur schwächer, und in demselben Sinne wie ohne Quarz (d. h. in der Mitte ein heller Streifen), bei grösserer Drehung in entgegengesetztem Sinne (d. h. in der Mitte ein dunkler Streifen). Ebenso treten sie, wenn man sie durch einen solchen Doppelquarz zum Verschwinden gebracht hat, wieder auf, wenn man die zwei Strahlen durch zwei genau gleiche Glasprismen gehen lässt, welche von zwei entgegengesetzten elektrischen Strömen durchflossen werden, und zwar in demselben oder im entgegengesetzten Sinne der ursprünglichen Fransen, je nachdem die magnetische Drehung der des Doppelquarz entgegengesetzt oder gleich gerichtet ist. (Vgl. den Bericht S. 1002 dieses Bandes). Lbg.

H. Jahn. Ueber die Beziehung von chemischer Energie und Stromenergie galvanischer Elemente. Wiedemann Ann. XXVIII. 21-43 und 491-497.

Ist C die chemische, G die galvanische Energie, welche in der Zeiteinheit in einem vom Strom J durchflossenen Element von der elektromotorischen Kraft E bei der Temperatur T entwickelt wird, so ist bekanntlich nach v. Helmholtz

$$(1) \qquad C-G=-JT\frac{dE}{dT}.$$

Um diese Gleichung, welche durch frühere Beobachtungen nur unvollkommen bestätigt worden war, zu prüfen, bringt der Verfasser das Element in ein Eiscalorimeter und schliesst es ausser-

halb desselben zwischen zwei Punkten a und b durch einen Draht, in welchem eine elektromotorische Kraft E_1 in gleichem Sinne wie E wirkt. Ist dann W die beobachtete, im Calorimeter beim Strom J in 1'' entwickelte Wärme, W_0 diejenige Wärme, welche im Element, wenn es in sich geschlossen wäre, beim Strom J entwickelt werden würde, ferner $\varDelta = P_a - P_b$ die Potentialdifferenz zwischen a und b, ϱ der Widerstand zwischen den Punkten a und b und dem Ein- und Austrittspunkt 1 und 2 des Stroms aus dem Calorimeter, so ist $W = W_0 + J(P_1 - P_2) = W_0 + J(\varDelta - \varrho J)$, folglich $W_0 = C = W - J(\varDelta - \varrho J)$, ferner $G = JE$, also

$$(2) \qquad C - G = W - J(E + \varDelta - \varrho J).$$

$\varDelta$ wird durch ein Galvanometer in einer zwischen a und b eingeschalteten Nebenschliessung bestimmt, gegen deren Widerstand der Widerstand des Stromkreises bE_1a verschwindet; der Temperatur-Coefficient $\frac{dE}{dT}$ wird durch zwei gleiche, einander entgegengesetzte Elemente E von verschiedener Temperatur bestimmt. Die Gleichung (1) fand sich durchgehends bestätigt. Lbg.

H. Jahn. Ueber die galvanische Polarisation. Wiedemann Ann. XXVIII. 498-508.

Ist $\varDelta$ die Potentialdifferenz an den Elektroden der Zersetzungszelle, w der Widerstand des Elektrolyten, so ist die Stromarbeit in der Zelle in 1'' $J\varDelta = J^2w + Jp$, wo Jp die zur Ueberwindung der Polarisation verbrauchte Stromarbeit bezeichnet. In einem Calorimeter, welches die Zelle enthält, wird also, wenn Q die Verbindungswärme des Elektrolyten bezeichnet, die Wärmemenge $W = J\varDelta - Q = J^2w + Jp - Q$ erzeugt; setzt man die in Folge der Elektrolyse an den Elektroden auftretende sekundäre Wärme $= W_s$, so wird

$$W = J^2w + W_s, \quad \text{wo} \quad W_s = Jp - Q.$$

Die Versuche, bei denen p direct beobachtet, Q aus den Thomsen'schen Zahlen berechnet wurde, ergab in allen Fällen $Jp > Q$, entgegen der Ansicht von Exner, wonach die z[illegible]ng

der Polarisation verbrauchte Stromarbeit gleich der Verbindungswärme des Elektrolyten sein soll. Lbg.

W. HALLWACHS. Elektrometrische Untersuchungen. Wiedemann Ann. XXIX. 1-47, Habil.-Schrift. Leipzig.

Die Abhandlung enthält eine gründliche Erörterung der verschiedenen Messungsmethoden mit dem Quadranten-Elektrometer, wodurch eine bisher sehr fühlbare Lücke in der Theorie der elektrischen Untersuchungsmethoden ausgefüllt wird.

1) Sind A, B, C die Potentiale der zwei Quadranten und der Nadel, so ist das Drehungsmoment auf die Nadel nach Maxwell

$$D = k(A-B)[C-\beta(A+B)],$$

worin man durch Bestimmung der Gestalt der Quadranten und der Nadel $\beta = \frac{1}{2}$ machen kann; dann ist also die Ablenkung

$$n = \alpha(A-B)\left(C-\frac{A+B}{2}\right),$$

und da hierin nur Potentialdifferenzen vorkommen, so kann man alle Potentiale von dem der (zur Erde abgeleiteten) Hülle an rechnen. Es seien nun V_1, V_2, V die an die zwei Quadranten und die Nadel angelegten Potentiale, p das natürliche Potential der Nadel (d. h. ihre Potentialdifferenz gegen die Hülle, wenn beide verbunden sind), q_1 und q_2 die natürlichen Potentiale der zwei Quadrantenpaare; setzt man $q_1-q_2 = k$, $p-\frac{q_1+q_2}{2} = q$, so wird

$$(1) \qquad n = \alpha(V_1-V_2+k)\left(V-\frac{V_1+V_2}{2}+q\right).$$

2) Messungsmethoden. a) Quadrantschaltung. Die Nadel befindet sich auf dem Potential V, das zu messende Potential P wird dem ersten Quadrantenpaar mitgeteilt, das zweite abgeleitet. Dann ist $n = \alpha(P+k)\left(V-\frac{P}{2}+q\right)$, und wenn n' die Ablenkung beim Potential $-P$ ist,

$$P = \frac{n-n'}{2\alpha(V+q-\frac{1}{2}k)}.$$

b) Nadelschaltung. Das zu messende Potential P wird der Nadel mitgeteilt, während die zwei Quadrantenpaare auf die Potentiale $\mp V_1$ gebracht werden; dann ist $n = \alpha(2V_1 + k)(P + q)$, und wenn n' die Ablenkung beim Potential $-P$ bezeichnet,

$$P = \frac{n - n'}{2\alpha(2V_1 + k)}.$$

c) Doppelschaltung. Das zu messende Potential P wird dem ersten Quadrantenpaar und der Nadel mitgeteilt, das zweite Quadrantenpaar abgeleitet. Dann ist $n = \alpha(P+k)\left(\frac{P}{2} + q\right)$; bezeichnet n' die Ablenkung beim Potential $-P$, n_1 und n'_1 dasselbe bei Vertauschung der Quadrantenpaare, so ist

$$\frac{n + n' - (n_1 + n'_1)}{2} = \nu = \alpha P^2, \quad \text{also } P = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}},$$

woraus sich mittels eines bekannten Potentials P die Empfindlichkeitsconstante α bestimmen, d. h. das Elektrometer graduiren lässt. Ferner ist

$$\frac{n - n' - (n_1 - n'_1)}{2} = 2\alpha q P,$$

$$\frac{n - n' + (n_1 - n'_1)}{2} = \alpha k P,$$

woraus sich dann q und k ergeben. Die Bestimmung von q giebt, wenn man die Nadel aus verschiedenen Metallen nimmt, die Contact-Potentialdifferenzen dieser Metalle gegen das Metall der Quadranten. Die Doppelschaltung gewährt den Vorteil constanter Empfindlichkeit, da hier die Ablenkung nicht noch von einem andern Potential abhängt. Lbg.

W. Hallwachs. Potentialver[illegible]ngen. Wiedemann Ann. XXIX. 300-313.

Um eine horizontale Axe ist ein[illegible] schnitt in zwei von einander und vo[illegible] geteilter Metallcylinder drehbar; jede[illegible] befindet sich in seiner [illegible]ge zwi[illegible] ihm parallelen und [illegible]

flächen, und berührt mittels eines Fortsatzes in seiner tiefsten Lage eine zur Potentialquelle führende, in seiner höchsten Lage eine zum Elektrometer führende Feder. Ist p das Potential der Quelle, P das Potential eines Halbcylinders in seiner höchsten Lage, also $\frac{P}{p}$ die Verstärkungszahl des Condensators, ferner C die Capacität des Halbcylinders in seiner höchsten Lage, γ die Capacität des Elektrometers, so ist im Moment der ersten Ladung des Elektrometers das Potential auf demselben

$$\psi_1 = \frac{C}{C+\gamma} P, \text{ im Moment der zweiten } \psi_2 = \frac{\gamma\psi_1 + CP}{C+\gamma},$$

allgemein im Moment der n^{ten} Ladung

$$\psi_n = \frac{\gamma\psi_{n-1} + CP}{C+\gamma}, \text{ woraus, wenn man } \frac{\gamma}{C+\gamma} = \nu \text{ setzt,}$$

$$\psi_n = (1-\nu^n)P.$$

ν muss so klein sein, dass während einer Schwingungsdauer der Nadel die volle Ladung P nahezu erreicht ist. Lbg.

Edm. Hoppe. Zur Theorie der unipolaren Induction. Wiedemann Ann. XXVIII. 478-491, XXIX. 544-560.

E. Edlund. Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Hoppe: „Zur Theorie der unipolaren Induction.“ Wiedemann Ann. XXIX. 420-427.

Diese Abhandlungen werden im nächsten Jahrgang besprochen. Lbg.

Himstedt. Erwiderung auf die Bemerkungen des Lord Rayleigh über meine Ohmbestimmung. Wiedemann Ann. XXVIII. 338-354.

A. Foeppl. Die Verteilung der elektrischen Ladung in Leitern. Wiedemann Ann. XXIX. 591-597.

Der Verfasser sucht die Thatsache, dass sich die Elektricität auf einem Leiter nur in einer sehr dünnen Oberflächenschicht anhäuft, auf folgende Weise zu erklären. Er nimmt an, dass ein Leiter im unelektrischen Zustand elektrisches Fluidum (er

nimmt nur ein einziges solches, z. B. positives, an) von einer bestimmten Dichtigkeit ε_0 enthält, und dass im elektrisirten Leiter die Dichtigkeit in einer dünnen Schicht unter der Oberfläche $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ ist, wo $\Delta\varepsilon$ bei positiver Elektrisirung positiv, bei negativer negativ ist. Das elektrische Fluidum besitzt Elasticität, und daher bewirkt der Zuwachs $\Delta\varepsilon$ einen nach allen Richtungen gleichen Flächendruck $p = c\Delta\varepsilon$, welcher zu den elektrischen Fernkräften hinzutritt. Ist nun x die Tiefe eines Punktes der Schicht unter der — als eben zu betrachtenden — Oberfläche, φ das hier herrschende Potential, so ist die Bedingung des Gleichgewichts in einem Volumelement $d\tau$

$$\frac{dp}{dx}\,d\tau + \varepsilon\frac{d\varphi}{dx}\,d\tau = 0 \quad \text{oder} \quad (1) \quad c\frac{d\varepsilon}{dx} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

woraus, wenn man im Innern ausserhalb der Flächenschicht, wo $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist, $\varphi = \varphi_i$ setzt,

$$\varphi_i - \varphi = c\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \text{oder} \quad (2) \quad \log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = z, \quad \text{wo} \quad z = \frac{\varphi_i - \varphi}{c}.$$

Mittels der Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\Delta\varepsilon$ oder $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi(\varepsilon - \varepsilon_0)$ folgt hieraus

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{c}(e^z - 1),$$

$$\frac{dz}{dx} = -\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0}{c}(e^z - z) + C} = -\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0}{c}(e^z - z - 1)},$$

indem C sich durch die Bedingung bestimmt, dass im Innern, d. h. für $z = 0$, $\frac{dz}{dx} = 0$ ist. Schliesslich folgt

$$x = \sqrt{\frac{c}{8\pi\varepsilon_0}}\int_z^{z_a}\frac{dz}{\sqrt{e^z - z - 1}},$$

wo z_a den Wert von z an der Oberfläche bezeichnet. Nimmt man die reine Zahl $z = \log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ als klein an und setzt demgemäss $e^z - z - 1 = \frac{1}{2}z^2$, so wird

$$(3) \quad x = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}}\log\frac{z_a}{z} = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}}\log\frac{\varphi_i - \varphi_a}{\varphi_i - \varphi} = \sqrt{\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}}\log\frac{\Delta\varepsilon_a}{\Delta\varepsilon}.$$

Hiernach ist, wenn $\frac{c}{4\pi\varepsilon_0}$ sehr klein ist, die Dichtigkeit $\Delta\varepsilon$ der freien Elektricität schon in sehr geringer Tiefe x unter der Oberfläche unmerklich. Lbg.

R. Lamprecht. Ueber die Einwirkung des Magnets auf elektrische Entladungen in verdünnten Gasen. Wiedemann Ann. XXIX. 580-591.

Aus den Gleichungen, welche Riecke (Wiedemann Ann. XXIII, vgl. F. d. M. XVI. 1884. 1010) für die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen, an seinen beiden Enden befestigten Stromleiters in einem beliebigen Magnetfelde aufgestellt hat, ergiebt sich, dass in jedem Punkt die Krümmungsebene auf der durch die resultirende Magnetkraft P und die Tangente gelegten Ebene senkrecht steht, und dass der Krümmungsradius ist

$$\varrho = \frac{T}{JN},$$

wo T die constante Spannung, $N = P\sin(P, ds)$ die auf der Tangente senkrechte Componente der Magnetkraft bezeichnet. Danach kann der Stromleiter nur dann mit einer Kraftlinie zusammenfallen, wenn entweder $\varrho = \infty$ oder $T = 0$ ist, d. h. wenn entweder die Kraftlinie eine Gerade und der Leiter geradlinig gespannt ist, oder wenn er schon ohne Wirkung der Magnetkraft die Form einer Kraftlinie ohne Spannung angenommen hat. Im letzteren Falle ist aber das Gleichgewicht labil, da bei Drehung eines Stromelements eine auf der Ebene (P, ds) senkrechte Kraft auftritt, welche den Leiter weiter deformirt. In keinem Falle kann also die Magnetkraft eine solche Gestalt des Leiters hervorrufen, und daher ist der Satz von Plücker (Pogg. Ann. CIV): „Wenn auf einen vollkommen biegsamen Stromleiter magnetische Kräfte wirken, so kann Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn der Leiter die Form einer magnetischen Curve annimmt", unrichtig.

Ist ferner ein gewichtsloser steifer Stromfaden nur am einen Ende befestigt, so muss wieder die Krümmungsebene auf der Ebene (P, ds) senkrecht sein; ist k die Constante der Biegungs-

elasticität, $w = \frac{ds}{\varrho}$ der Krümmungswinkel, so wird ein Element ds durch eine an seinem Ende angreifende Kraft $kwds = \frac{kds^2}{\varrho}$ in die Richtung des vorhergehenden Elements gedreht, während die Magnetkraft auf dasselbe nach dem Biot-Savart'schen Gesetz eine entgegengesetzte Kraft $JdsP\sin(P, ds)$ oder ein Drehungsmoment Jds^2N ausübt; die Bedingung des Gleichgewichts ist also $\frac{kds^2}{\varrho} = JNds^2$, woraus

$$\varrho = \frac{k}{JN}$$

folgt. Auch in diesem Falle also kann der Leiter nur dann mit einer Kraftlinie zusammenfallen, wenn dieselbe eine Gerade ist. Nach Hittorf soll die zweite Annahme für die Kathodenstrahlen gelten, die erste für das Anodenlicht, welches die Anode mit dem Ende eines Kathodenstrahls in seiner jedesmaligen Lage verbindet. Lbg.

A. Foeppl. Ueber die absolute Geschwindigkeit des elektrischen Stroms. Wiedemann Ann. XXVII. 410-414.

Zur Entscheidung der Frage, ob im elektrischen Strom nur eine oder beide Elektricitäten sich bewegen, hat der Verfasser eine Rolle aus zwei neben einander gewickelten Drähten, durch welche der Strom eines mitrotirenden Elements im entgegengesetzten Sinne floss, um die Axe dieser Rolle in Rotation versetzt und die Ablenkung eines Magneten durch dieselbe untersucht. Nach der dualistischen Ansicht findet in diesem Falle keine Wirkung auf den Magneten statt; nach der unitarischen Ansicht kann die Wirkung, wenn v die Stromgeschwindigkeit, u die Lineargeschwindigkeit der Rotation bezeichnet,

$$b = (v+u)c + (-v+u)c = 2uc$$

gesetzt werden, wenn die Wirkung bei gleichgeschalteten und ruhenden Drähten $a = 2vc$ gesetzt wird. Daraus folgt $\frac{b}{a} = \frac{u}{v}$.

Es ergab sich $a = 600$ Skalenteile, $b = 0$; ob dieses negative Resultat von der Richtigkeit der dualistischen Ansicht, oder nur von der Kleinheit von u gegen v herrührt, bleibt natürlich unentschieden. Lbg.

G. Kirchhoff. Zur Theorie der Gleichgewichts-Verteilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. Berl. Ber. 1886, Wiedemann Ann. XXVII. 673-679.

Schon in F. d. M. XVII. 1885. 1031 besprochen.

---

v. Waltenhofen. Ueber die Formeln von Müller und Dub für cylindrische Elektromagnete. Wiedemann Ann. XXVII. 630-643.

R. Krüger. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der vertikalen Intensität eines magnetischen Feldes. Gött. N. 199-208, Wiedemann Ann. XXVIII. 613-628.

Der Verfasser hat eine Bestimmung der Verticalcomponente des Erdmagnetismus mittels der von Riecke (Wiedemann Ann. XIII. 194) angegebenen und schon zu demselben Zweck benutzten „elektrodynamischen Drehwage" ausgeführt, deren Princip folgendes ist. An einem Draht hängt in einem Gefäss mit Kupfervitriol eine horizontale kupferne Kreisscheibe, welche auf ihrer oberen Seite ganz, auf ihrer unteren mit Ausnahme eines am Rande liegenden Ringes gefirnisst ist; ihr gegenüber steht in dem Gefäss eine gleichgrosse, feste, ebenfalls mit Ausnahme eines gleichen Ringes gefirnisste Kupferscheibe; durch den Aufhängedraht wird ein Strom i in die obere Scheibe geleitet und von der unteren abgeleitet. Die Verticalcomponente V des Erdmagnetismus übt dann, wenn vorausgesetzt wird, dass die Elektricität aus dem oberen Ringe überall mit constanter Dichtigkeit vertical ausströmt, auf die in der oberen Scheibe fliessenden radialen Ströme ein horizontales Drehungsmoment

$$M = \tfrac{1}{2} V i l^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{l^2}\right)$$

aus, wo l den mittleren Radius des Ringes, δ seine halbe Breite bezeichnet. (Der Verfasser setzt, aus einem dem Referenten nicht ersichtlichen Grunde, $\frac{1}{3}\frac{\delta^2}{l^2}$ statt wie Riecke $\frac{\delta^2}{l^2}$). Ist also φ die Ablenkung, D die Directionskraft der Torsion, so ist

$$D\varphi = \tfrac{1}{2} Vil^2\left(1 + \frac{\delta^2}{l^2}\right).$$

Lbg.

E. Budde. Ein Mittel zur Entscheidung zwischen den elektrodynamischen Punktgesetzen von Weber, Riemann und Clausius. Wiedemann Ann. XXIX. 488-490.

Vorläufige Ankündigung einer im nächsten Jahrgang zu besprechenden ausführlicheren Abhandlung. Lbg.

G. Wiedemann. Magnetische Untersuchungen. Wiedemann Ann. XXVII. 376-401.

Enthält eine Fortsetzung der frühern Untersuchungen des Verfassers über die Aenderungen des Magnetismus durch Torsion.

Lbg.

T. J. Stieltjes. Sur le nombre des pôles à la surface d'un corps magnétique. C. R. CII. 805.

Eine Bemerkung von Betti (Teorica delle forze Newtoniane) lässt sich nach einer Methode von Reech (J. de l'Éc. Pol. Cah. XXXVII) dahin verallgemeinern, dass im Falle, dass der magnetische Körper eine $(2k+1)$-fach zusammenhängende geschlossene Oberfläche hat, die Differenz zwischen der Anzahl der neutralen Pole und derjenigen der anderen Pole gleich $2k-2$ ist.

Lp.

S. Bidwell. On the changes produced by magnetisation in the length of iron wires under tension. Lond. R. S. Proc. XL. 257-266.

H. Lorberg. Bemerkung zu zwei Aufsätzen von Hertz und Aulinger über einen Gegenstand der Elektrodynamik. Wiedemann Ann. XXVII. 666-673.

L. Boltzmann. Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Lorberg über einen Gegenstand der Elektrodynamik. Wiedemann Ann. XXIX. 598-603.

H. Lorberg. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Boltzmann zu meiner Kritik zweier Aufsätze von Hertz und Aulinger. Wiedemann Ann. XXXI. 131-137. (1887).

Aus dem Umstand, dass die auf einen Punkt wirkenden Componenten der elektromotorischen Kraft eines veränderlichen Magnetrings r, mithin auch veränderlicher geschlossener Ströme überhaupt, sich als die Differentialquotienten des Potentials einer von dem Ring begrenzten elektrischen Doppelschicht d darstellen lassen, und dass daher auch die im rein mathematischen Sinne genommene Resultirende der elektromotorischen Kräfte des Magnetrings r auf eine zweite elektrische Doppelschicht δ sich durch das Potential der zwei Doppelschichten d und δ auf einander darstellen lässt, welches dem Potential der ponderomotorischen Kräfte zweier Ströme analog ist, hat Hertz (Wied. Ann. XXIII, vgl. F. d. M. XVI. 1884. 949) geschlossen, dass einmal zwei veränderliche Magnetringe r und ϱ eine ponderomotorische Kraft auf einander ausüben müssen, und dass daraus ferner nach dem Princip der Energie sich in derselben Weise eine neue Magnetkraft X_2 ergebe, wie sich aus dem Potential der ponderomotorischen Kräfte zweier Ströme eine elektromotorische Kraft ergiebt. Gegen die Beweiskraft dieses Schlusses wendet sich der erste Aufsatz; in Betreff des ersten Punktes bemerkt der Verfasser, dass jenes Potential der von r auf δ ausgeübten Kräfte eine rein mathematische Fiction ist, welcher nicht die Bedeutung des Potentials einer von r auf ϱ wirkenden Kraft zukommen kann; als Potential der von r auf die einzelnen elektrischen Pole von δ wirkenden Kräfte besitzt es gar keine physikalische Bedeutung, weil sich diese elektromotorischen Kräfte

nicht wie an einem starren System (z. B. einer magnetischen Doppelschicht oder einer Franklin'schen Tafel) wirkende Kräfte zu einer Resultirenden zusammensetzen lassen; und als Potential der von δ auf r ausgeübten Kräfte, welche allerdings vorhanden sein würden, wenn eine solche Doppelschicht δ an Stelle von ϱ wirklich vorhanden wäre, besitzt es jedenfalls nicht die Bedeutung des Potentials einer von ϱ auf r ausgeübten Kraft, weil daraus, dass ϱ hinsichtlich seiner elektromotorischen Kräfte durch δ ersetzt werden kann, noch nicht ohne eine ausdrückliche Hypothese folgt, dass eine solche Substitution in jeder Hinsicht, also auch in Betreff etwaiger von ϱ ausgehender ponderomotorischer Kräfte, gestattet ist. Hinsichtlich des zweiten Punktes bemerkt der Verfasser, dass aus der blossen Uebereinstimmung in der Form zwischen der Kraft von r auf einen elektrischen Pol und der ponderomotorischen Kraft eines Stroms auf einen Magnetpol noch nicht auf eine gleiche Anwendbarkeit des Princips der Energie geschlossen werden kann, da bei dieser Anwendung der Umstand wesentlich ist, dass bei Bewegung des Magnetpols eine ponderomotorische Arbeit geleistet wird, welche bei elektromotorischen Kräften, d. h. Kräften auf ungehindert verschiebbare elektrische Pole, nicht vorhanden ist. In dem zweiten Aufsatz bemerkt er hierzu noch, dass, falls wirklich zwischen r und ϱ ponderomotorische Kräfte wirken, eben diese die neuen Magnetkräfte X_2 sein würden, und dass die aus ihnen nach dem Princip der Energie sich ergebenden weiteren Kräfte elektromotorische, aber nicht Magnetkräfte sein müssten.

Was den Aufsatz von Aulinger (Wiedemann Ann. XXVII) betrifft, so benutzt dieser als die oben als notwendig bezeichnete Ergänzungshypothese für den Nachweis einer ponderomotorischen Kraft zwischen zwei veränderlichen Magnetringen das von Boltzmann aufgestellte Princip: „Wenn in einem elektrischen Felde in jedem Punkt die elektrostatische und die Magnetkraft bestimmt ist, so sind in demselben sämtliche elektrischen und magnetischen Kräfte bestimmt". Die in seinem ersten Aufsatz gegebene Kritik der auf dieses Princip gegründeten Schlussweise Aulinger's giebt Lorberg in seinem zweiten Aufsatz als nicht ganz zutreffend zu,

erkennt vielmehr an, dass aus diesem Princip in der That das erwähnte Resultat folgen würde, wie er auch in seinem Bericht über den Aufsatz von Aulinger (F. d. M. XVII. 1885. 1085) ausgeführt hat. Den Schluss des ersten Aufsatzes von Lorberg bildet eine Verallgemeinerung der Berechnung des von einer elektrostatisch geladenen Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen veränderlichen Strom nach dem Weber'schen Grundgesetz ausgeübten Drehungsmoments, welche Berechnung Aulinger zu dem Zweck ausgeführt hatte, um die Unvereinbarkeit des Weber'schen Grundgesetzes mit dem erwähnten Boltzmann'schen Princip nachzuweisen.

Der Aufsatz von Boltzmann bestätigt die Behauptung von Lorberg, dass die Schlussweise von Hertz ohne Anwendung einer besonderen Hypothese lückenhaft sei; dass dazu das erwähnte Boltzmann'sche Princip dienen könne, giebt Lorberg, wie schon oben bemerkt, in seiner Erwiderung zu. Einige andere von Boltzmann gegen den Aufsatz von Lorberg geltend gemachte Einwendungen weist letzterer in seiner Erwiderung als auf Missverständnis beruhend zurück. Lbg.

ROHRBECK. Vademecum für Elektrotechniker. Halle. W. Knapp.

E. MASCART. Handbuch der statischen Elektricität. Deutsche Bearbeitung von J. G. Wallentin. 2 Bde. 921 u. 690 S. Wien. A. Pichler's Wwe. und Sohn.

Das Buch enthält im wesentlichen die im ersten Bande von Maxwell behandelten Gegenstände; die Behandlungsweise schliesst sich im ganzen an die der älteren Lehrbücher an und zeichnet sich vor dem Maxwell'schen durch eine eingehendere Besprechung der Beobachtungsmethoden und eine historische Darstellung des Beobachtungsmaterials aus. Die musterhafte Klarheit und Correktheit der Darstellung macht es namentlich für Anfänger zu einem höchst wertvollen Lehrbuch, die grosse Vollständigkeit zu einem schätzbaren Handbuch. Lbg.

E. NETOLICZKA. Illustrirte Geschichte der Elektricität von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Wien. A. Pichler's Wwe & Sohn. VIII. + 283 S. 8°.

H. E. ARMSTRONG. Electrolytic conduction in regard to molecular composition, valency, and the nature of chemical change: being an attempt to apply a theory of residual affinity. Lond. R. S. Proc. XL. 268-291.

Capitel 4.

Wärmelehre*).

A. Mechanische Wärmetheorie.

L. BOLTZMANN. Neuer Beweis eines von Helmholtz aufgestellten Theorems betreffend die Eigenschaften monocyklischer Systeme. Gött. N. 209-213.

Für den v. Helmholtz'schen Satz (s. F. d. M. XVI. 1884. 854. und 863) wird ein zweiter Beweis gegeben in der Absicht, den Zusammenhang desselben mit früheren ähnlichen Untersuchungen hervortreten zu lassen. Dabei zeigt sich, dass die Frage, ob dQ einen integrirenden Factor besitzt, auf die andere hinauskommt: ob unter beständig orthogonaler Veränderung der Grenzen bei Rückkehr zu demselben Zustande immer auch eine Rückkehr zu denselben Grenzen möglich ist. Sbt.

---

*) Wegen einer mehrmonatlichen Erkrankung des Berichterstatters über dieses Capitel ist es unmöglich gewesen, die grössere Anzahl der hierher gehörigen Referate rechtzeitig zu beschaffen; es sind daher nur die Titel der betreffenden Arbeiten abgedruckt worden. Red.

L. Boltzmann. Ueber die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Kronecker J. C. 201-212.

Unter allen rein mechanischen Systemen, für welche Gleichungen bestehen, welche den aus dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden analog sind, scheinen diejenigen, welche der Verfasser und Maxwell in mehreren Abhandlungen untersucht haben, weitaus die wichtigste Rolle zu spielen. Nicht nur gilt die Analogie mit den wärmetheoretischen Gleichungen für alle derartigen Systeme ohne Ausnahme, sondern es lassen sich auch die meisten anderen Systeme, insofern sie unter mechanisch einfachen Bedingungen durchgreifende und zweifellose Analogie zeigen, den vom Verfasser und von Maxwell betrachteten als specielle Fälle unterordnen. Der allgemeinste Satz bezüglich der Verwandelbarkeit der inneren Energie in äussere Arbeitsleistung bei diesen Systemen war von Herrn Boltzmann in seiner letzten Abhandlung über diesen Gegenstand (Kronecker J. IIC. 68-94, F. d. M. XVII. 1885. 1093) ohne Beweis bloss angeführt. Diese Lücke wird durch die vorliegende Arbeit ausgefüllt. Lp.

L. Boltzmann. Ueber einige Fälle, wo die lebendige Kraft nicht integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Energie ist. Exner Rep. XXII. 135-155. S. F. d. M. XVII. 1885. 1093.

E. Cesaro. Intorno ad una precisa dimostrazione di termodinamica. Batt. G. XXIV. 158-163.

W. Siemens. Ueber die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde. Wiedemann Ann. XXVIII. 263-281.

Die Erklärung der Bewegungserscheinungen im Luftmeere der höheren geographischen Breiten durch Maxima und Minima

des Luftdrucks enthält Lücken, so lange man nicht weiss, wo die Kräfte ihren Sitz und Angriffspunkt haben, welche die gewaltige Energie in den Maximis und Minimis ansammeln. Diese Lücken sucht der Verfasser mit Hülfe der Lehre von der Erhaltung der Kraft auszufüllen. Er findet den Ursprung der in den Winden und Stürmen thätigen und lebendigen Kraft im wesentlichen in der Beschleunigung, welche die in den Tropen aufsteigende Luft infolge ihrer Ueberhitzung am Erdboden erleidet.

Auf die Einzelheiten der Theorie einzugehen, würde hier zu weit führen. Sbt.

P. de Heen. Détermination des variations que le coefficient de frottement intérieur éprouve avec la température. Considérations théoriques qui découlent de l'observation de ces grandeurs. Belg. Bull. (3) XI. 29-44.

Der Verfasser stellt die folgende Beziehung auf:

$$F^{\frac{n-1}{n}} = A\left(F + \frac{dF}{dn}\right)$$

zwischen den Reibungscoefficienten F bei einer beliebigen Temperatur und der Variation $\frac{dF}{dn}$ dieses Coefficienten für eine Temperaturänderung von 20° C. Mn. (Lp.)

G. P. Grimaldi. Sulla relazione teoretica trovata dal Dupré fra il volume, la temperatura, ed i coefficienti di dilatazione e di compressibilità dei corpi. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 238-244.

Ch. Ed. Guillaume. Sur le coefficient de pression des thermomètres et la compressibilité des liquides. C. R. CIII. 1183-1186.

A. Schrauf. Ueber die Ausdehnungscoefficienten des Schwefels. Wiedemann Ann. XXVII. 315-320.

H. Le Chatelier. Sur les lois numériques des équilibres chimiques. C. R. CIII. 253-256.

G. Chaperon. Sur la théorie de la dissociation et quelques actions de présence. C. R. CIII. 479-482.

P. de Heen. Note sur un travail de M. Robert Schiff sur la chaleur spécifique des liquides. Belg. Bull. (3) XII. 416-422.

Die Experimente des Hrn. Schiff bestätigen ein Gesetz von Hrn. P. de Heen. Mn. (Lp.)

E. Warburg. Bemerkungen über den Druck des gesättigten Dampfes. Wiedemann Ann. XXVIII. 394-400.

F. Koláček. Ueber Dampfspannungen. Wiedemann Ann. XXIX. 347-352.

Ch. Antoine. De la densité et de la compressibilité des gaz et des vapeurs. C. R. CII. 863-864.

M. Langlois. Sur le calcul théorique de la composition des vapeurs, de leurs coefficients de dilatation et de leurs chaleurs de vaporisation. C. R. CII. 1231-1233.

R. v. Helmholtz. Untersuchungen über Dämpfe und Nebel, besonders über solche von Lösungen. Diss. Berlin 1885, Wiedemann Ann. XXVII. 508-543, Berl. Phys. Ges. Verh. 20-21.

A. Schrauf. Ueber Dispersion und axiale Dichte bei prismatischen Krystallen. Wiedemann Ann. XXVIII. 433-437.

A. Schrauf. Ueber Ausdehnungscoefficienten, axiale Dichte und Parameterverhältnis trimetrischer Krystalle. Wiedemann Ann. XXVIII. 438-447.

B. Gastheorie.

G. A. Hirn. Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température. Paris. Gauthier-Villars.

G. A. Hirn. L'avenir du dynamisme dans les sciences physiques. Paris. Gauthier-Villars.

G. A. Hirn. Nouvelle réfutation générale des théories appelées cinétiques. Paris. Gauthier-Villars.

G. A. Hirn. Recherches expérimentales sur la limite de la vitesse que prend un gaz quand il passe d'une pression à une autre plus faible. Paris. Gauthier-Villars.

G. A. Hirn. La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir. Paris. Gauthier-Villars.

R. Clausius. Examen des objections faites par M. Hirn à la théorie cinétique des gaz. Belg. Bull. (3) XI. 173-193.

Die Versuche des Herrn Hirn sind in zwei Aufsätzen beschrieben, die in den Bänden XLIII und XLIV der Belg. Mém. veröffentlicht wurden. Diese Versuche sind gut erdacht und wahrscheinlich sehr gut angestellt, aber die von ihm aus denselben gezogenen Schlüsse sind nicht streng, wie man dies nachweisen kann.

Unter diesen Schlüssen ist besonders der auf den Stoss der

Gase bezügliche in präciser Weise ausgedrückt worden. Aus einem Gasometer mit comprimirter Luft liess Herr Hirn einen Luftstrom durch eine Röhrenleitung entweichen, die am Ende rechtwinklig nach unten gebogen und an diesem Ende mit einer Ausströmungsvorrichtung versehen war. In geringer Entfernung von dieser Vorrichtung befand sich auf einer der Schalen einer Wage eine horizontale Kreisplatte, die den Stoss des verticalen Luftstromes erhielt. Um dem auf die Platte ausgeübten Drucke das Gleichgewicht zu halten, wurde die zweite Wageschale mit Gewichten belastet, welche die Grösse des ausgeübten Druckes massen. Herr Hirn hat festgestellt, dass dieser Druck derselbe blieb, wenn die Luft die gewöhnliche Temperatur hatte, und wenn sie auf die Temperatur von 200° gebracht war. Er hält dieses Ergebnis für einen Widerspruch gegen die kinetische Gastheorie. Aber es lassen sich gegen die Schlussfolgerungen, auf welche er diese Ansicht stützt, gewichtige Einwände erheben.

Erstens macht er von vereinfachenden Hypothesen einen so ausgedehnten Gebrauch, dass die Erkenntnis schwer wird, ob diese Schlussfolgerungen irgend welche Kraft besitzen. So ersetzt er die allseitigen Bewegungen, die man für die Gasmolekeln in der kinetischen Gastheorie annimmt, durch Bewegungen dieser Molekeln, die nach drei zu einander senkrechten Richtungen völlig unabhängig stattfinden. Diese Bewegungen sollen bis zum Zusammentreffen mit einer festen Wand bestehen bleiben. (In der kinetischen Theorie nimmt man im Gegenteil an, dass zwischen den Molekeln sehr häufig exentrische Stösse stattfinden.)

Zweitens aber, selbst wenn man diese Hypothese von den drei in rechtwinkligen Richtungen erfolgenden Bewegungen zugiebt, enthalten die Rechnungen des Herrn Hirn einen Fehler. Wenn ein Bruchteil α von der Gesamtzahl der Molekeln sich in einer zur Platte senkrechten Richtung bewegt, so nimmt Herr Hirn an, ihre eigene Geschwindigkeit U vermehre immer die Ausflussgeschwindigkeit V, so dass ihr Druck auf die Platte zu $\alpha(U+V)^2$ proportional sei. Derjenige der anderen Molekeln sei proportional zu $(1-\alpha)V^2$. Nach ihm sei also der Gesamt-

druck auf der einen Seite der Platte proportional zu

$$\alpha(U+V)^2+(1-\alpha)V^2 = \alpha U^2+2\alpha UV+V^2;$$

der Druck der ruhenden Luft auf der anderen Seite der Platte proportional zu αU^2. Die Differenz $2\alpha UV+V^2$ sei also eine Grösse proportional zum wirklichen, von der Ausströmung des Gases auf die Platte der Wage herrührenden Drucke. Da nun das Glied $2\alpha UV$ von der Temperatur abhänge, so müsse (nach dieser von Herrn Hirn gedeuteten Gastheorie) der Druck darum verschieden sein, wenn man bei 200° oder bei gewöhnlicher Temperatur experimentire, was den Thatsachen widerspreche. Aber diese Art zu rechnen ist fehlerhaft. Augenscheinlich muss man annehmen, dass $\frac{1}{2}\alpha$ von den Molekeln mit einer Geschwindigkeit $V+U$ und $\frac{1}{2}\alpha$ mit einer Geschwindigkeit $V-U$ die Platte treffen. Demnach findet man als eine zum Drucke proportionale Grösse:

$$\tfrac{1}{2}\alpha[(V+U)^2+(V-U)^2]+(1-\alpha)V^2-\alpha U^2 = V^2,$$

also unabhängig von U und der Temperatur. Die Versuche des Herrn Hirn bestätigen somit die kinetische Gastheorie, wenn seine vereinfachende Annahme von den drei Gruppen unabhängiger Bewegungen der Molekeln zulässig ist.

Die gegen die kinetische Theorie von der Einwirkung ruhender Luft auf einen bewegten Körper hergeleiteten Einwände sind von derselben Art wie der vorige und enthalten in ihrer Entwickelung dasselbe Versehen der Schlussfolge.

Ein anderer Einwand des Herrn Hirn besteht darin, dass nach der kinetischen Theorie die Molecularbewegungen der Gase in der Luft bei der von Herrn Hirn in dem einen seiner Versuche betrachteten Temperatur nur eine mittlere Geschwindigkeit von etwa 500 Metern haben können. Nun erschliesst er aber aus diesem Versuche eine Ausflussgeschwindigkeit von mehr als 4000 Metern, was ein „argument mortel contre la théorie cinétique telle qu'elle a été établie jusqu'ici“ sein soll. Dem ist jedoch nicht so. Die Geschwindigkeit von 4000 Metern ist keine beobachtete, sondern aus gewissen Formeln gefolgert, die in dem Falle der von Herrn Hirn herbeigezogenen Versuche

offenbar nicht anwendbar sind. Auch dieser Einwurf ist folglich gegenstandslos.

Zum Schlusse macht Herr Clausius folgende Bemerkung bezüglich der rein kinematischen Theorie des Weltalls: „Nie habe ich in meinen Arbeiten über die kinetische Gastheorie die Ansicht vertreten, dass alle Kräfte durch Bewegungen erklärt werden können; im Gegenteil, ich habe einen Satz aufgestellt, der das Entgegengesetzte beweist, ich meine den Satz vom Virial. Dieser Satz sagt aus, dass jede stationäre Bewegung zu ihrem Bestande gewisser Kräfte bedarf, die ihr dynamisch das Gleichgewicht halten, und er drückt die Bedingung dieses dynamischen Gleichgewichtes durch eine Gleichung aus, deren eine Seite die lebendige Kraft der Bewegung ist, während die andere durch einen Ausdruck gebildet wird, der sich aus den Coordinaten der bewegten Massen und aus Componenten von Kräften zusammensetzt. Diese Gleichung gestattet den sicheren Schluss, dass ohne anziehende Kräfte kein stabiler Zustand in der Natur möglich wäre". (Man vergleiche die erschöpfende Darstellung der Einwürfe des Herrn Hirn gegen die kinetische Theorie und der dagegen zu machenden Erwiderungen von J. Delsaux in der Revue des questions scientifiques de Bruxelles, juillet 1887, p. 270-292). Mn. (Lp.)

Folie. Rapport sur le Mémoire intitulé: „La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir", par G. A. Hirn. Belg. Bull. (3) XII. 5-9.

Bericht über einen Aufsatz zur Erwiderung auf den Artikel des Hrn. Clausius (Vgl. das vorangehende Referat). Die Versuche des Hrn. Hirn beweisen, dass der Widerstand, den ein Gas gegen die Bewegung einer Platte leistet, oder umgekehrt, von der Temperatur dieses Gases unabhängig ist. Die kinetische Gastheorie, so wie sie Hr. Hirn auffasst, führt zum entgegengesetzten Ergebnisse; aber so wie sie Hr. Clausius auffasst, führt sie zu demselben Resultat wie der Versuch. Mn. (Lp.)

G. A. Hirn. Recherches expérimentales et analytiques sur les lois de l'écoulement et du choc des gaz en fonction de la température. Belg. Mém. XLVI. 217 S.

Man vergleiche den kritischen Bericht der Herren Folie, Melsens und Vandermensbrugghe über diese Abhandlung in Belg. Bull. (3) IX. 1885. 40-71 (F. d. M. XVII. 1885. 1097). Sie ist die Fortsetzung der in F. d. M. XIII. 1881. 811-814 besprochenen Arbeit. Mn. (Lp.)

G. A. Hirn. La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir. Réponses à diverses critiques faites par M. Clausius aux conclusions de mes travaux précédents. Belg. Mém. XLVI. 82 S.

Versuch einer Erwiderung auf die Antwort von Hrn. Clausius. (Belg. Bull. (3) XI. 173-193.) Nach Hrn. Folie (XII. 5-9) ist die von Hrn. Hirn angegriffene kinetische Gastheorie nicht die Clausius'sche. Mn. (Lp.)

G. A. Hirn. La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir. C. R. CIII. 514-516.

Begleitschreiben zu dem Werke gleichen Titels, das der Akademie übersandt wird. Lp.

E. Toepler. Zur Ermittlung des Luftwiderstands nach der kinetischen Theorie. Wien. 24 S. 8°.

Ad. Blümcke. Tabelle zu der von Clausius nach den Versuchen Andrews' entwickelten Formel für die Zustandsgleichung der Kohlensäure. Z. dtsch. Ing. XXX. 110-114.

Die fragliche Zustandsgleichung lautet:

$$p = \frac{T\,0{,}003688}{v - 0{,}000843} - \frac{2{,}0935}{T(v + 0{,}000977)^2},$$

wenn p den in Atmosphären gemessenen Druck, T die absolute Temperatur und v das Volumen bedeutet. Es wird zunächst eine graphische Darstellung dieser Gleichung durch Curven gegeben, indem T als Parameter, v als Abscisse und p als Ordinate gilt. Die Tabelle selbst ist eine solche mit doppeltem Eingang und liefert p für die ganzen Grade Celsius in dem Intervall von 0° bis 40° und die um 0,001 wachsenden Werte v von 0,001 bis 0,050. In dem Intervalle $v = 0,05$ bis 0,100 beträgt die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Werte von v 0,005, von dort ab bis $v = 0,200$ dagegen 0,010; den Schluss bilden die beiden Werte $v = 0,500$ und 1,000. F. K.

S. v. Wroblewski. Ueber die Darstellung des Zusammenhanges zwischen dem gasförmigen und flüssigen Zustande der Materie durch die Isopyknen. Exner Rep. XXII. 725-745. Abdruck aus Wien. Ber. XCIV. 257.

L. Boltzmann. Ueber die zum theoretischen Beweise des Avogadro'schen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen. Wien. Ber. XCIV. 613-643.

Herr Tait hat in Phil. Mag. (5) XXI. 343. 1886 unter einer Reihe specieller Annahmen einen exacten Beweis für den Satz geliefert, dass im Falle des Wärmegleichgewichtes die mittlere lebendige Kraft der Molecüle zweier gemischten Gase gleich sein muss. Herr Boltzmann meint, dass Herr Tait nicht bewiesen habe, die gemachten speciellen Annahmen seien zur Begründung des Satzes unentbehrlich, und verteidigt sich dagegen, dass von ihm aufgestellte Sätze nicht richtig seien. Die Verteidigung geschieht im Anschluss an seine Theorie der Gasdiffusion. 1. Teil (Wien. Ber. LXXXVI. 63. 1882).

Herr Stankewitsch hat in Wied. Ann. XXIX. 153 (Zur dynamischen Gastheorie) einen Hülfssatz (dass eine gewisse Functionaldeterminante gleich Eins ist) des Beweises für das Maxwell'sche Gesetz der Energieverteilung bewiesen. Der Beweis

ist dem von Jacobi für das Princip des letzten Multiplicators gegebenen nachgebildet. Herr Boltzmann zeigt in einem Nachtrage, dass jener Hülfssatz dem Wesen nach mit einer Gleichung der vorliegenden Abhandlung identisch ist, und giebt einen einfachen Beweis, indem er den von Maxwell angedeuteten Weg benutzt. Rs.

OSBORNE REYNOLDS. On the flow of gases. Manch. Phil. Soc. Proc. XXV. 55-71.

Handelt über den Ausfluss von Gasen durch eine Oeffnung im Falle, dass die berechneten Ergebnisse von den experimentellen abweichen, und weist auf die Voraussetzung hin, welche die gewöhnliche Theorie fehlerhaft macht. Die Schrift steht in engem Zusammenhange mit einer experimentellen Arbeit desselben Bandes (p. 17-34) von Henry Wilde über: „The velocity with which air rushes into a vacuum". Gbs. (Lp.)

HUGONIOT. Sur l'écoulement des gaz dans le cas du régime permanent. C. R. CII. 1545-1548.

G. A. HIRN. Réflexions sur une critique de M. Hugoniot, relative aux lois d'écoulement des gaz. C. R. CIII. 109-113.

PARENTY. Sur les expériences de M. G. A. Hirn, concernant le débit des gaz à travers les orifices. C. R. CIII. 125-127.

HUGONIOT. Sur la pression qui existe dans la section contractée d'une veine gazeuse. C. R. CIII. 241-244.

G. A. Hirn. Réponse à une note de M. Hugoniot sur la pression qui existe dans la section contractée d'une veine gazeuse. C. R. CIII. 371-372.

H. de la Goupillière. Écoulement varié des gaz. C. R. CIII. 661-665, 709-712, 785-788.

Hugoniot. Sur l'écoulement d'un gaz qui pénètre dans un récipient de capacité limitée. C. R. CIII. 922-925.

H. de la Goupillière. Remarque relative à une communication de M. Hugoniot sur l'écoulement d'un gaz, qui pénètre dans un récipient de capacité limitée. C. R. CIII. 925-926.

Hugoniot. Sur le mouvement varié d'un gaz comprimé dans un réservoir qui se vide librement dans l'atmosphère. C. R. CIII. 1002-1005.

G. A. Hirn. Remarques au sujet des notes de M. Hugoniot sur l'écoulement des gaz. C. R. CIII. 1232-1235.

F. Lucas. Le coefficient de dilatation et la température des gaz. C. R. CIII. 1251-1253.

F. Lucas. Sur le coefficient de détente d'un gaz parfait. C. R. CIII. 1181-1183.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

J. MAURER. Ueber die theoretische Darstellung des Temperaturganges während der Nachtstunden und die Grösse der von der Atmosphäre ausgestrahlten Wärmemenge. Ann. d. schweiz. meteorolog. Centralanst., Jahrg. 1885.

Herr Maurer behandelt die Aufgabe des zeitlichen Temperaturverlaufes in der Nacht als Folge von Strahlung und Leitung rein mathematisch nach der Fourier'schen Wärmetheorie, um den bestimmenden Grundelementen (Dichte, specifische Wärme, thermische Leitungsfähigkeit), die er in den bisherigen theoretischen Untersuchungen vermisst, gebührend Rechnung zu tragen; ohne diese Rücksicht ist nämlich eine richtige Deutung der Coefficienten in den Formeln nicht möglich. Eine erste Rechnung zeigt, dass die Leitung der Luftschichten höchstens bis zu einer Höhe von etwa 3,1 m merkbar werden kann, dass daher für die gestellte Aufgabe der Einfluss der erkaltenden Erdoberfläche, insoweit er sich durch Wärmeleitung bekundet, gegenüber den anderen einwirkenden Umständen vernachlässigt werden darf. Demnach ist der Verlauf der Temperatur während der Nachtstunden bloss von der atmosphärischen Strahlung abhängig. Nach verschiedenen Beobachtungsreihen, die von anderen Meteorologen für denselben Zweck verwertet sind, berechnet der Verfasser aus seinen Formeln den wohl definirten Strahlungscoefficienten für atmosphärische Luft. Der Zahlwert des thermischen Strahlungsvermögens zeigt im Sommer ein Maximum, im Winter ein Minimum.

Die hiernach aus der partiellen Differentialgleichung entwickelte Formel, welche die Temperatur als Function der Zeit ausdrückt, enthält alle diejenigen Grössen, welche auf die nächtlichen Temperaturänderungen irgend welchen bestimmenden Einfluss haben können. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen kommt diese Formel auf die auch früher schon, u. a. von Weilenmann, benutzte Form der Nachtgleichung zurück.

Zum Schlusse zieht Herr Maurer aus seinen Untersuchungen

die allgemeine Folgerung, dass die gesamte Strahlung der homogenen nicht erleuchteten Atmosphäre für eine Temperatur von 0° C. pro Quadratcentimeter und Minute 0,39 Calorien beträgt, also sehr wohl mit der strahlenden Energie des Sonnenkörpers vergleichbar ist. Da nun nach Stefan's Rechnung diejenige Wärmemenge, welche von einem Quadratcentimeter einer schwarzen Fläche bei der Temperatur 0° ausgeteilt wird, per Minute 0,40 Cal. ist, so würde daraus folgen, dass das Emissions- oder Absorptionsvermögen der homogenen Atmosphäre für die strahlende Wärme niedriger Temperatur, wie sie die Erdoberfläche aussendet, nahe gleich der Einheit ist, dass also beinahe die gesamte von der Erde ausgestrahlte Wärme von ihrer Atmosphäre absorbirt wird. Zuletzt wird noch darauf hingewiesen, dass alle berechneten Zahlen nur die Bedeutung vorläufiger Näherungswerte haben, dass insbesondere der Strahlungscoefficient und das Absorptionsvermögen der atmosphärischen Schichten wegen der in den unteren Luftschichten suspendirten kleinen materiellen Teilchen zu gross sein dürften. Lp.

R. Fudzisawa. Ueber eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Gleichung fortschreitende unendliche Reihe. Diss. Strassburg. 24. S. 4°.

Kirsch. Die Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine. Leipzig. Felix. IX u. 100 S.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

G e o d ä s i e.

C. BOHN. Die Landmessung. Ein Lehr- und Handbuch. Mit 370 in den Text gedruckten Holzschnitten und 2 lithographirten Tafeln. Berlin. Julius Springer.

Raum für ein Lehr- und Handbuch ist in der geodätischen Literatur wie in der jeder anderen Wissenschaft allerdings immer da; aber wir bezweifeln, dass mit dem vorliegenden das rechte getroffen und einem wirklichen Bedürfnisse abgeholfen worden ist. Hinsichtlich der Anordnung und Vollständigkeit des Stoffes im ganzen springt zunächst der Uebelstand in die Augen, dass die Theorie der Beobachtungsfehler und der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate in den Anhang gesetzt ist, während ihre Anwendung bei der Triangulirung (mit Ausnahme der Pothenot'schen Aufgabe), Nivellirung u. s. w. durchweg fehlt. Welcher Studirende ist wohl im Stande, nach der nackten, allgemeinen Theorie ohne weiteres Ausgleichungen von Dreiecksnetzen, Punkteinschaltungen, Nivellirungen u. s. w. auszuführen? Dass die Methode der kleinsten Quadrate zu sehr weitläufigen Rechnungen führe, wie auf S. 277 gesagt ist, trifft (ganz abgesehen davon, dass sie jetzt den preussischen Landmessern vorgeschrieben ist) häufig gar nicht zu, wenn die Sache

richtig angefangen wird. Ueberdies ist im Vorwort gleich zu Anfang gesagt, dass auch die grössten und schwierigsten Aufgaben der praktischen Geometrie, die grossen mathematischen Aufwand erheischen, besprochen und gelöst werden sollen. Ein weiterer Uebelstand für ein Lehrbuch zeigt sich in der Behandlung der Instrumente: Von Theodoliten, Nivellir- und manchen anderen Instrumenten ist eine übergrosse Zahl perspectivischer Abbildungen, die meist den Preisverzeichnissen der Mechaniker entnommen sind, gegeben; wohingegen mit schematischen Darstellungen und Durchschnitten, die das Wesentliche deutlich hervortreten lassen, nur zu sehr gekargt ist. Die Zeichnungen von verschiedenen wichtigen Instrumenten, wie Libellenprüfungsapparat, Schraubenmikroskop, Heliotrop, Bessel's Basisapparat u. s. w. fehlen ganz.

Das Inhaltsverzeichnis weist ausser einer Einleitung mit den geodätischen Grundbegriffen und allgemeinen Regeln über die Vermarkung und Bezeichnung und ausser einem Anhang mit Formeln und Sätzen der reinen Mathematik (einschliesslich der Methode der kleinsten Quadrate) und einigen Bemerkungen über die Instrumentenpflege folgende 14 Capitel auf:

1. Einfachste Vermessungsgeschäfte und erforderliche Hilfsmittel, und zwar: Absteckung von Geraden ohne zwischenliegende Hindernisse, Längenmessungen, Absteckung und Messung rechter Winkel, Absteckung von Geraden mit zwischenliegenden Hindernissen, Absteckung von Curven, Stückvermessung nach der Normalenmethode.
2. Pläne und Handrisse.
3. Flächenermittelungen und dahingehörende Aufgaben.
4. Rechnerisches.
5. Roh- und Augenscheins-Aufnahmen.
6. Allgemeines über Winkelmessungen.
7. Das wichtigste Winkelmessinstrument, der Theodolit.
8. Gross- und Klein-Messungen.
9. Polygonmessung und die Bussolen.
10. Triangulation (ebene).
11. Zeichnende Aufgaben und der Messtisch.

12. Distanzmesser.
13. Tachymetrie.
14. Nivelliren.
15. Trigonometrisches Höhenmessen.
16. Barometrisches Höhenmessen.
17. Geodäsie krummer Flächen.
18. Grösse und Gestalt der Erde.
19. Kartenprojectionen.

Ohne auf eine ausführliche Kritik jedes Capitels hier einzugehen, wollen wir nur auf einige Irrtümer und besonders auffallende Mängel hinweisen: Der bei der Fehlerausgleichung von Polygonzügen (S. 295) zu Grunde gelegte Satz, wonach die Verbesserungen an den einzelnen Winkeln proportional ihren mittleren Fehlerquadraten zu setzen sind, welche selbst proportional der Summe der reciproken Schenkellängen sind, ist theoretisch nicht richtig, sondern ebenso, wie auch die auf S. 296 betreffs der Verbesserungen der Coordinatenunterschiede gemachte Annahme, völlig unbegründet. Uebrigens müsste, wenn diese Annahmen zulässig wären, auf S. 296 statt $\delta s = c : \sqrt{s}$ es $\delta s = c . \sqrt{s}$ heissen. Im 10ten Capitel ist beim Vorwärtseinschneiden (S. 319) die Behauptung, dass, insofern es sich um die verhältnismässigen Seitenfehler handelt, das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck das günstigste sei, unrichtig, und falsch ist es, dass, wie S. 345 gesagt wird, die Pothenot'sche Bestimmung für den Mittelpunkt des durch die drei gegebenen Punkte gelegten Kreises am günstigsten sei. Ganz entstellt ist die aus Jordan's Handbuch entnommene Grenzcurve (Fig. 201) zur Vergleichung der Genauigkeit des Vorwärts- und Rückwärtseinschneidens wiedergegeben: beide getrennt gezeichnete Curven müssen eine einzige geschlossene Linie bilden, die durch die Ecken des Dreiecks geht. Aus den Schichtenplänen S. 454 und Tafel II hätten die sonderlichen, zum Teil in der Natur gar nicht möglichen Gebilde, bei denen sich eine Horizontalcurve in zwei Zweige teilt, herausbleiben sollen. Das barometrische Höhenmessen ist für den Geodäten etwas zu mangelhaft behandelt; auch trifft die dort S. 597 betreffs der Berechnung der Höhen

gemachte Bemerkung „Tabellen aber erscheinen ganz unnötig" durchaus nicht zu. Für denjenigen, welcher eine grosse Zahl von Höhen zu topographischen Zwecken zu messen hat, sind auf das Princip der rohen Seehöhen gegründete Tafeln sehr nützlich. Im 17ten Capitel fehlen häufig die sonst in besseren Handbüchern enthaltenen Entwickelungen von angeführten Formeln; und die Kartenprojectionen sind überhaupt nur beschreibend behandelt.

P.

F. Baur. Lehrbuch der niederen Geodäsie vorzüglich für die praktischen Bedürfnisse der Forstmänner und Landwirte, Kameralisten und Geometer, sowie zum Gebrauche an militärischen und technischen Bildungsanstalten. Vierte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 296 Holzschnitten und einer lithographirten Tafel. Berlin. Paul Parey.

Die vorliegende vierte Auflage hat eine Vermehrung durch folgende Gegenstände erfahren: die Rechenstäbe, die Lehre vom Fernrohr und vom optischen Distanzmesser, die trigonometrische Auflösung der Pothenot'schen Aufgabe und die Grundzüge der Tachymetrie. Das Werk teilt sich in die drei Teile: Flächenmesskunde, Höhenmesskunde und Planzeichnung. Der erste Teil behandelt die Masse und Massstäbe, die Bezeichnung, das Abstecken und Messen der Linien, die Vermessungsarbeiten mit Instrumenten zum Abstecken bestimmter Winkel, die Arbeiten mit dem Messtisch, dem Theodoliten und der Waldbussole, die Teilung und die Verwandlung der Flächen. Der zweite Teil enthält das geometrische, trigonometrische und barometrische Höhenmessen, das Nivelliren und die Grundzüge der Tachymetrie. Im letzten Teile endlich ist das Zeichnen, Copiren, Vergrössern und Verkleinern der Karten und die Bergzeichnungsmethode besprochen. Das Ganze entspricht seinem Zwecke.

P.

Traité de géodésie, publié avec le concours d'officiers de toutes armes et sous le patronage de la réunion des officiers. Bruxelles. 480 S. 4°.

VELTMANN und KOLL. Formeln der niederen und höheren Mathematik sowie der Theorie der Beobachtungsfehler und der Ausgleichung derselben nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn. 47 S. 8°.

H. BRUNS. Ueber eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Leipz. Abh. XIII. 517-563.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Unbekannten eines Problems, welche mit den q beobachteten Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_q$ $(q > n)$ durch Gleichungen von der Form

$$a_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta}\, x_\beta$$

verbunden sind, wo die b gegebene Zahlen bedeuten; ferner seien die den a zukommenden Gewichte p willkürlich, mit der Einschränkung, dass die Summe der p gegeben, z. B. gleich Eins sein soll; dann sind die mittleren Fehler der x, welche sich bei einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben, vollständig bestimmt, sobald über die p Verfügung getroffen ist, und das Gleiche gilt von den Elementen eines „Grössencomplexes“ $y_1, y_2, \ldots, y_r$, dessen Bestandteile y gegebene lineare Functionen der x sind. Es wird nun gefragt, welches die zur Bestimmung des Complexes (y) günstige Annahme der p ist, wenn als Mass für die Güte jener Bestimmung die Quadratsumme der m. F. der y benutzt wird. Für den Fall $r = 1$ ist die Aufgabe bereits von Herrn Schreiber (vgl. F. d. M. 1882. XIV. 914) erledigt worden, mit dem Ergebnis, dass von den p stets nur n von Null verschieden zu sein brauchen, dass also die Messung „überschüssiger“ Stücke unnötig ist. Für den allgemeinen Fall ergiebt sich das Resultat, dass die Messung überschüssiger Stücke bei der günstigsten Gewichtsverteilung unter Umständen erforder-

lich sein kann, aber nur, wenn die $b_{\alpha\beta}$ und die Coefficienten der y gewissen Bedingungen genügen, und dass ferner die Anzahl dieser überschüssigen Stücke unterhalb einer bestimmten Grenze bleibt, wie gross auch q sein mag. B.

E. Czuber. Zum Satze vom arithmetischen Mittel. Astr. Nachr. 2730.

Ein neuer Versuch, für die Herleitung der Methode der kleinsten Quadrate den Satz vom arithmetischen Mittel zu begründen. Bezüglich des Wertes solcher Versuche mag es genügen auf die Aeusserung von Gauss in dem Briefwechsel mit Bessel (pag. 523) zu verweisen. B.

Jordan. Zur Theorie der Polygonzüge. Jordan Z. f. V. XV. 332-335.

Im Anschluss an die früheren interessanten Untersuchungen über die Ausgleichung eines gestreckten gleichseitigen Zuges in der Zeitschrift für Vermessungsw. XIII. (F. d. M. XVI. 1884. 1087), ist die praktische Ausgleichung eines solchen Zuges mit Rücksicht auf Winkel- und Längenfehler behandelt. P.

Steiff. Ueber die Genauigkeit des Detaildreiecksnetzes in Württemberg. Jordan Z. f. V. XV. 177-197.

Hervorgerufen wurde die Abhandlung durch den von Hammer in der Schrift „Ueber den Verlauf der Isogonen im mittleren Württemberg, Stuttgart 1886", angenommenen grossen mittleren Fehler ($\pm$ 0,5^m) der Coordinaten der Eckpunkte des Württembergischen Dreiecksnetzes. Verfasser, der seit 1878 mit Aufnahmen und Berechnungen zur Untersuchung, Ergänzung und Vervollständigung dieses trigonometrischen Landesnetzes ständig beschäftigt ist, giebt zunächst den aus den Dreieckssummenwidersprüchen ermittelten mittleren Richtungsfehler an; nachher hat er die bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen mittleren Coordinatenfehler und die nach

der Ausgleichung noch übrig bleibenden Richtungsfehler zusammengestellt, woraus sich für den mittleren Coordinatenfehler $\pm 0,10'''$ ergiebt. Schliesslich sind noch in einer dritten Tabelle die auf Grund von drei verschiedenen Hypothesen berechneten Mittelwerte der magnetischen Declination für gewisse, in der Hammer'schen Schrift behandelte Stationen aufgeführt. P.

C. Genge. Beiträge zu graphischen Ausgleichungen. Wolf Z. XXXI. 268-312.

Sind zur Bestimmung eines Punktes in der Ebene mehr als zwei geradlinige geometrische Oerter gegeben, so muss nach der Methode der kleinsten Quadrate für die wahrscheinlichste Lage des Punktes die Summe der Quadrate der Abstände von jenen Geraden, gemessen durch die je einer Sekunde entsprechende Querverschiebung, ein Minimum sein. Wird nun für jeden beliebigen Punkt der Ebene die Summe der Quadrate aller seiner Abstände in irgend einem Massstabe als Senkrechte zur Ebene in dem betreffenden Punkte aufgetragen, so liegen die Endpunkte aller dieser Senkrechten in einem elliptischen Paraboloid, dessen tiefster Punkt sich senkrecht über dem gesuchten Punkt befindet. Die Entstehung dieser Paraboloidfläche ist sehr anschaulich dadurch erklärt, dass von einer Geraden stufenweise zu weiteren Geraden übergegangen wird. Im zweiten Teil ist dann eine numerisch-graphische Bestimmung der Projection des Scheitels des Paraboloids mit Hülfe eines geraden rechteckigen Prismas ausführlich erörtert, während im dritten Teil eine rein synthetisch-graphische Ausgleichung durchgeführt ist, die sich auf folgende Grundidee stützt:

Durch das Hinzutreten einer neuen Bestimmungsgeraden wird der Scheitel des Paraboloids nächst niederer Stufe (resp. seine Projection in der Grundebene) aus seiner Lage abgelenkt nach der Seite jener neuen Bestimmungsgeraden hin. Die Richtung der letzteren bestimmt die Richtung der Ablenkung, indem diese beiden Richtungen zusammen ein Paar conjugirter Strahlen bilden aus der Involution conjugirter Durchmesser sow

in Bezug auf den früheren als auch in Bezug auf den neuen Scheitel. Vertauscht man von den Bestimmungsgeraden die neu hinzugetretene successive mit je einer der früheren, so lassen sich zur Bestimmung des neuen Scheitels im ganzen ebenso viele geometrische Oerter desselben ableiten, als Bestimmungsgeraden vorhanden sind.

Der praktischen Anwendung dieser Ausgleichung in der Geodäsie wird leider, wie auch beim Bertot'schen Verfahren, der Umstand entgegen stehen, dass der durch die Zeichnung erreichte Genauigkeitsgrad der aufgewandten Arbeit nicht entspricht.

P.

E. Pucci. Sulle formole fondamentali della Geodesia geoidica. Brioschi Ann. (2) XIV. 193-220.

Die Arbeit stellt die im Band XIV. 269 der astronomischen Nachrichten veröffentlichte Bessel'sche Abhandlung „Ueber den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen" richtig. Auf die dort von Bessel gemachten Fehler hat auch Helmert in seinem 1880 herausgegebenen Werke „Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. I. Teil", Seite 295 und 538 hingewiesen. P.

Th. Sloudsky. La figure de la Terre d'après les observations du pendule. Moscou 1886.

Das Potential des Erdkörpers wird nach Kugelfunctionen entwickelt gedacht, die Entwickelung bis zu den Gliedern dritter Ordnung incl. ausgeführt und daraus der Ausdruck für die Schwere hergeleitet. Sodann werden die Werte der vorläufig unbestimmten Coefficienten aus den vorhandenen Pendelmessungen zu bestimmen gesucht. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass ein solches Verfahren im wesentlichen auf eine blosse Rechenübung hinausläuft, da die Werte der höheren Coefficienten ganz wesentlich von der zufälligen Verteilung der Beobachtungen abhängen. B.

. KELLER. Sul metodo di Jolly per la determinazione della densità media della Terra. Rom. Acc. L. Rend. (4) II_1. 145-149.

Es wird statt des Jolly'schen Vorschlages zur Bestimmung ·er mittleren Dichte der Erde (vgl. Wiedemann Ann. V. 133) .urch Wägung eines Gewichtsstückes unmittelbar über einer Bleimasse und dann in einer solchen Höhe darüber, dass der anziehende Einfluss dieser Bleimasse als verschwindend betrachtet werden kann, das Wägen unmittelbar über und unter der Masse empfohlen (also die Methode von A. König und Richarz. Red.), wodurch nicht nur lange Aufhängevorrichtungen und die damit verbundenen Uebel vermieden werden, sondern sich auch der Einfluss der Bleimasse in doppelter Grösse zeigt. Nachher ist mittels der früher von dem Verfasser in der Abhandlung „Sull' attrazione delle montagne etc.“ abgeleiteten Formeln für die Maximalanziehung, die von einem regulären homogenen Prisma auf einen in der Mitte einer seiner Grundflächen befindlichen materiellen Punkt ausgeübt wird, das Verhältnis der Höhe zum Grundflächenumfange und die Anziehungskraft selbst berechnet. (Vgl. F. d. M. XVI. 1884. 847). P.

A. MORGHEN. Sull' influenza che produce la densità non uniforme dei corpi sulle misure relative alla componente orizzontale del magnetismo terrestre e alla gravità. Rom. Acc. L. Rend (4) II_2. 87-92.

Bezeichnet λ die Länge des einfachen Pendels, das einem als physisches Pendel benutzten homogenen Kreiscylinder entspricht, und λ' die einem solchen Cylinder von ungleicher Dichte entsprechende Länge, so findet Verfasser durch Versuche mit einem Cylinder aus Messing, jenachdem die Aufhängungsaxe in der einen oder anderen Endfläche liegt, für $1-\frac{\lambda_1}{\lambda}$ bezüglich die Werte 0,00009795 und 0,00010151 und mit einem Cylinder aus Kupfer 0,00006723 und 0,00006891. Hieraus ginge hervor, dass der Einfluss der ungleichen Dichte des Materials auf die Pendel-

länge grösser ist, als der sonst bei der Bestimmung dieser Länge zu befürchtende Fehler. P.

K. Weihrauch. Ueber die Zunahme der Schwere beim Eindringen in das Erdinnere. Exner Rep. XXII. 396-401.

Herr Helmert hat in seinen „Mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“ II. 493 unter Voraussetzung eines bestimmten mathematischen Gesetzes über die Aenderung der Dichte des Erdkörpers mit der Tiefe unter der Oberfläche den Satz abgeleitet: „Die Schwerkraft nimmt zunächst zu, wenn man sich von der Erdoberfläche nach der Tiefe bewegt. Die Zunahme dauert an bis zur Tiefe gleich 0,18 des Erdradius, wo die Schwerkraft ein Maximum (gleich 1,05-mal der Schwere an der Oberfläche) erreicht, um von da an stetig abzunehmen bis zum Mittelpunkt.“ Um eine einfache und von wenigen Voraussetzungen ausgehende Ableitung dieses Satzes oder eines entsprechenden zu erhalten, behält Herr Weihrauch die Helmert'sche Annahme bei, dass die Erde aus concentrischen, homogenen, kugelförmigen Schichten besteht, verzichtet aber auf die Voraussetzung eines mathematischen Gesetzes über stetige Dichtigkeitsänderung mit der Tiefe. Es zeigt sich sofort, dass der Satz gilt: „Geht man innerhalb einer aus concentrischen, homogenen Kugelschalen gebildeten Kugel aus dem Centrumsabstand $a+da$ in den Abstand a, so nimmt die Schwere zu oder ab, je nachdem die Dichte der durchbrochenen Schicht kleiner oder grösser ist, als zwei Drittel der mittleren Dichte der Kugel, zu welcher man gelangt.“ Einen fast gleichlautenden Satz hat Roche in seinem Aufsatze: „La constitution intérieure de notre planète“ seinem Landsmanne Saigey zugeeignet (Flammarion, Revue mensuelle d'Astronomie II, 1883. 202). Dort steht: „Unterhalb der Erdoberfläche muss die Schwere zunächst bis zu einer gewissen Tiefe zunehmen; jenseits derselben nimmt sie ab, um im Mittelpunkte Null zu werden. Hierzu genügt es, dass die Dichtigkeit der Oberflächenschicht geringer ist als zwei Drittel der mittleren Dichte, eine Bedingung, die augenscheinlich erfüllt ist.“

Indem Herr Weihrauch sodann willkürliche Gesetze für die Verteilung der Dichte im Erdinneren annimmt, berechnet er die Tiefe für das Maximum der Schwere und die Dichte im Mittelpunkte der Erde. Wird das Wachstum der Dichte proportional der Tiefe angenommen, so stimmen die berechneten Werte ziemlich genau mit denen von Helmert überein. Nimmt man dagegen die Dichtigkeitsänderung proportional dem Quadrate der Tiefe an, so folgt ein Maximum der Schwere, gleich 1,038 der Schwere an der Oberfläche, in der Tiefe 0,13 des Erdhalbmessers.

Lp.

H. HENNESSY. On the physical structure of the Earth. Phil. Mag. (5) XX. 233 u. 328.

Während Sir William Thomson der Hauptvertreter der Meinung ist, dass die Erde im Inneren starr sei und nur nach der Oberfläche zu Ansammlungen feurig-flüssiger Masse enthalte, ist Herr Hennessy stets ein eifriger Verteidiger derjenigen Anschauung gewesen, nach welcher sich das Erdinnere noch heute im (feurig-) flüssigen Zustande befindet und die äussere feste Schale verhältnismässig nur dünn ist. Im Jahre 1878 hat dieser letztere Gelehrte (Philosophical Magazine (5) VI. 263) die physikalischen Gesichtspunkte hervorgehoben, welche in den mathematischen Arbeiten über diesen Gegenstand unberücksichtigt geblieben sind: Vor allem müsse bedacht werden, dass eine Flüssigkeit mit den idealen Eigenschaften der Incompressibilität und der absoluten Verschiebbarkeit der Molecüle in der Natur nicht vorkomme. Im Gegenteil, die Compressibilität der Flüssigkeiten ist grösser als die der festen Körper, und die Viscosität der das Erdinnere ausmachenden Flüssigkeit müsse aus der Beschaffenheit der vulcanischen Lava erschlossen, könne also z. B. mit der des Honigs verglichen werden. Ferner müsse durch den ungeheuren Druck im Inneren der Erde schon eine homogene Flüssigkeit nach innen zu eine Zunahme der Dichtigkeit erfahren. Endlich sei es eine absolut unerwiesene Annahme, dass beim Erstarren die Molecüle der ursprünglich flüssig gedacht

alle an derselben Stelle geblieben seien, welche sie in der herausgerechneten Gleichgewichtsfigur angenommen hätten.

Alle diese Gründe wiederholt Herr Hennessy in einem neuen Aufsatze im Septemberhefte des Phil. Mag. und geht noch genauer auf einzelne derselben ein. Neu ist die von ihm entwickelte Hypothese über die Anordnung der Erstarrungsschichten im Erdinnern. Nach Clairaut sind die Schichten gleicher Dichte in einer rotirenden Flüssigkeit sphäroidisch; die Ellipticität (Abplattung) dieser Schichten nimmt aber nach innen zu ab, so dass der innerste Kern grösster Dichtigkeit der Kugelgestalt am nächsten kommt. Wenn dies auch richtig ist, so meint Herr Hennessy, könne hieraus nichts über die Schichtungen in der festen Erdkruste erschlossen werden. Die im Erdinnern am Aequator aufs heftigste wirkenden Auswaschungen der reibenden, lavaähnlichen Flüssigkeit ändern die Gestalt des inneren Sphäroids, so dass die Ellipticität der inneren Fläche der Schale die der äusseren übertrifft, aber nicht kleiner sein kann als die der letzteren. Hieraus folgt dann weiter, dass die Erdkruste an den Polen dicker sein müsse als am Aequator, und hiermit stimme das häufigere Auftreten der Vulcane in den Aequatorialgegenden gut überein.

Die von dem Verfasser unternommenen Rechnungen dienen hauptsächlich dazu, den Nachweis zu führen, dass seine Theorie auf keine Widersprüche mit den Gesetzen der Mechanik führe. Insbesondere kann das Trägheitsmoment der von ihm vorausgesetzten Schale um die Erdaxe immer noch grösser sein als um einen Aequatordurchmesser, so dass die Stabilität der Rotation auch bei seiner Annahme gesichert bliebe.

In einem zweiten Artikel (Octoberheft des Phil. Mag.) wird eine Rechnung durchgeführt, die der vom Verfasser vertretenen Theorie eine Hauptstütze zu geben bestimmt ist. Nach Untersuchungen von Hopkins in den Phil. Transact. 1840 und 1842 über die Präcession der Nachtgleichen würde die Präcession von dem flüssigen Zustande des Erdinneren unbeeinflusst sein, wenn die Ellipticität der inneren und der äusseren Schale der Erdkruste dieselbe wäre (hierbei ist die Flüssigkeit als frei von

Reibung und Viscosität vorausgesetzt). Indem Herr Hennessy die Grösse der Präcession auf Grund dieser Annahmen und unter Zuhülfenahme der besten Werte für die numerischen Elemente ausrechnet, findet er 55 Bogensecunden; dieser Wert weicht vom beobachteten zu weit ab, als dass die Differenz vernachlässigt werden könnte. Daher zieht der Verfasser den Schluss: „Die Erde kann nicht aus einer ganz festen Masse bestehen, die aus äquielliptischen Schichten zusammengesetzt ist. Sie besteht also aus einer festen Kruste, die so begrenzt ist, wie ich anderswo [im ersten Artikel] angedeutet habe, und aus einer inneren viscosen Flüssigkeit, so wie man dieselbe aus den vulcanischen Oeffnungen der Kruste ausfliessen sieht; letztere ist nach den Gesetzen der Hydrostatik in Schichten angeordnet, oder mit anderen Worten, in Schichten gleicher Dichtigkeit, deren Ellipticität nach dem Erdmittelpunkte hin abnimmt."

Lp.

Ch. M. Schols. Eene equivalente projectie met Minimum-afwijking voor een cirkelvormig terrein van geringe uitgebreidheid. Amst. Versl. en Meded. (3) II. 130-145.

Siehe F. d. M. XVII. 1885. 1117. G.

Ch. M. Schols. La courbure de la projection de la ligne géodésique. Delft. Ann. d. l'Éc. Polyt. II. 179-230.

Wie frühere Arbeiten des Verfassers behandelt auch diese die Deformationen der geographischen Karten, welche sich in der Aenderung von Winkeln und in der Längenabweichung von Curven kundgeben. In der vorliegenden wird auf eine and[illegible] Deformation hingewiesen, die noch nicht besonders unters[illegible] worden ist, nämlich die Krümmung der Projection von Curv[illegible] welche auf der Erde als gerade betrachtet werden, d. h. d[illegible] geodätischen Curven. Hier wird sie eingehend untersucht u[illegible] ausgedrückt durch eine Formel von der Form

$$B_1 \sin^3 A' + B_2 \sin^2 A' \cos A' + B_3 \sin A' \text{[illegible]} B_4 \cos^3 A',$$

in welcher die Coefficienten B nur von dem Orte des Punktes, wo die Krümmung betrachtet werden soll, abhängen und A' den Winkel bedeutet, welchen die geodätische Curve mit einer festen Richtung in der Ebene der Karte macht. Nachdem diese Formel allgemein abgeleitet worden ist, wird ihre Richtigkeit speciell für eine Rotationsfläche zunächst auf analytischem, dann auf geometrischem Wege bewiesen; die erhaltenen Resultate werden auf die Untersuchung von Projectionen angewandt, bei denen die geodätischen Curven als Gerade und Kreise angenommen werden. Die ausführlichen Formeln werden in symmetrische Form gebracht, wodurch sie sehr übersichtlich werden. G.

LÜROTH. Eine Gleichung zwischen den Längen, Breiten und Azimuten dreier Erdorte. Jordan Z. f. V. XV. 529-535.

Sind zur Festlegung der gegenseitigen Lage von n Punkten auf der Erde n Polhöhen, $n-1$ Längendifferenzen und die $n(n-1)$ gegenseitigen Azimute beobachtet, also im ganzen n^2+n-1 Grössen, und sind, wenn von jeder Annahme über die Erdgestalt abgesehen wird, für jeden Ort die drei Coordinaten und die Lage der Lotlinie zu bestimmen, so wären, wenn die Z-Axe nach dem Pole gerichtet und die XZ-Ebene durch einen zweiten Punkt gelegt wird, für den ersten Punkt die Richtung der Lotlinie durch zwei Grössen, für den zweiten Punkt die Richtung der Lotlinie und zwei Coordinaten, also vier Grössen, und für jeden der $n-2$ anderen Punkte die Richtung der Lotlinie mit zwei und der Ort mit drei Coordinaten zu ermitteln. Das sind im ganzen $5n-4$ Unbekannte. Weil aber aus Winkelmessungen allein die absoluten Werte der Coornaten sich nicht finden lassen, sondern nur ihre Verhältnisse, so gehen nur $5n-5$ Unbekannte in das Problem ein. Da nun der Ueberschuss der Zahl der Beobachtungen über die der Unbekannten $(n-2)^2$ ist, so bestehen zwischen den beobachteten Grössen ebensoviel Bedingungen, die genau erfüllt sein müssen, wenn die Beobachtungen fehlerfrei vorausgesetzt werden. Für

$n = 3$ ergiebt sich eine Bedingung. Diese ist in der vorliegenden Abhandlung entwickelt. P.

N. Jadanza. Sul calcolo della distanza di due punti le cui posizioni geografiche sono note. Torino Atti. XXI. 469-488.

Bereits im XIX. Band hat Verfasser diese Aufgabe für kurze Entfernungen (innerhalb eines Trapezes von 20′ Breiten- und 30′ Längenausdehnung) mittels entsprechend abgekürzter Formeln und des Legendre'schen Satzes behandelt (F. d. M. XVI. 1884. 1085). Hier ist eine weitere Vereinfachung auf folgende für das ebene, nahezu rechtwinkelige Dreieck abgeleitete Formeln gegründet:

$$\log a = \log c - \log\cos\psi + \frac{M}{2}\sin 1''.\,\omega\sin\psi\cos\psi - \frac{M}{4}\sin 1''.\,\omega^2\sin^2\psi\cos^2\psi,$$

$$\log\sin B = \log\sin\psi - \frac{M}{2}\sin 1''.\,\omega\sin\psi\cos\psi + \frac{M}{4}\sin^2 1''.\,\omega^2\sin^2\psi\cos^2\psi - \frac{M}{2}\sin^2 1''.\,\omega^2,$$

wenn a, b, c die Seiten, A, B, C die diesen Seiten bezüglich gegenüberliegenden Winkel, wobei A von 90^0 um $\frac{\omega}{2} < 30'$ abweicht, bezeichnen; ferner ψ einen Hülfswinkel gemäss der Beziehung $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{b}{c}$ und M den Modul der gemeinen Logarithmen bedeutet. Die Formeln geben die Werte bis auf die siebente Decimalstelle genau. Es ist die Berechnung der Länge der geodätischen Linie und ihrer Azimute in den Endpunkten dann an mehreren Beispielen erläutert und zur Bequemlichkeit noch eine Hülfstafel beigegeben. P.

Jordan. Flächenteilung nach Seitenverhältnissen. Vortrag im Hannoverschen Feldmesserverein im December 1885. Jordan Z. f. V. XV. 465-473.

Zunächst ist von einem Viereck mit Benutzung der Formel, die den Inhalt durch drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel ausdrückt, ein Stück von bestimmter Grösse abgeschnitten, so dass die Teilungslinie die geschnittenen Seiten nach gleichem Verhältnis teilt, und für dieses Verhältnis ausserdem noch ein Näherungswert abgeleitet. Nachher ist die strenge Formel auf ein Zahlenbeispiel (durch die Coordinaten der Eckpunkte gegebenes Zehneck) angewandt, und ein zweites Beispiel einmal mit Hülfe von Construction und planimetrischer Bestimmung, dann nach der Näherungsformel, die bei einem Grundstück mit nahezu parallelen Langseiten anwendbar ist, behandelt. P.

VOIGT. Flächenteilung. Jordan Z. f. V. XV. 20-22.

An einem einfachen praktischen Beispiel der Grenzregulirung mit Rücksicht auf die Bonität ist die Anwendung der Differentialrechnung gezeigt. P.

JORDAN. Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer pothenotischen Bestimmung. Jordan Z. f. V. XV. 140-145.

Es handelt sich darum, ob eine pothenotische Berechnung mit willkürlich angenommenen Winkeln, die zu drei gegebenen Punkten gehören sollen, möglich oder unmöglich ist. (Vgl. auch Jordan, Handbuch der Vermessungskunde I. Bd. S. 321). Ein von einem unbekannten Einsender aus Paris aufgestelltes einfaches Kriterium der Möglichkeit ist wiedergegeben, dem der Verfasser noch ein etwas anderes, mit Benutzung des durch die drei Punkte gelegten Kreises, beigefügt hat. P.

HATT. Emploi des coordonnées azimutales. C. R. CII. 485-487.

Es sind nur die mittels des Legendre'schen Satzes abgeleiteten Correctionen des Azimuts und der Länge beim Uebergang von der Kugel in die Ebene und die Transformationsformeln für rechtwinklige ebene Coordinaten angegeben. P.

JORDAN. Zur Geschichte der Theodolit-Polygonzüge. Jordan Z. f. V. XV. 535-537.

Ein kurzer Ueberblick über die allmähliche Einführung der Polygonzüge in den verschiedenen Teilen Deutschlands. Das Formular für Berechnung polygonaler Züge der ältesten deutschen Vermessungsanweisung aus dem Jahre 1882 ist mit angegeben.

P.

JORDAN. Ueber die Genauigkeit der Winkelabsteckung mit der Kreuzscheibe, dem Winkelspiegel und ähnlichen Instrumenten. Jordan Z. f. V. XV. 26 u. 27.

Es sind die durch Versuche ermittelten Genauigkeitswerte für die Kegelkreuzscheibe mit Spalten, das Winkelkreuz mit Fadendioptern, die Winkeltrommel mit Fadendioptern und den Winkelspiegel aufgeführt, wonach der mittlere Zielfehler mit diesen Instrumenten etwa $= \pm 2'$ angenommen werden kann.

P.

SCHREIBER. Sinus- und Cosinus-Quadrant. Jordan Z. f. V. XV. 197-200.

Das vom Verfasser construirte Instrument ist namentlich zur Ermittelung der Seigerteufen und Sohlen bei bergmännischen Aufnahmen bestimmt. Die wesentlichen Vorzüge dieser Einrichtung gegen die bis jetzt beim Markscheiden gebräuchlichen Tafeln sind angeführt. Hierauf folgt eine durch Zeichnung erläuterte Beschreibung des Quadranten und eine Tabelle damit gewonnener Sinus- und Cosinuswerte, welchen die durch eine 5-stellige Logarithmentafel erhaltenen gegenübergestellt sind.

P.

FENNER. Einfache Vorrichtung zur Untersuchung der Teilungsfehler von Nivellirlatten nebst Mitteilung von Untersuchungsresultaten. Jordan Z. f. V. XV. 321-332.

Die Untersuchung erfolgt mit einem Normalmessingmeter, auf dem ein Schieber mit Nonius angebracht ist. P.

C. Wagner. Ueber die Hülfsmittel der Tachymetrie, insbesondere über die Vorzüge der schiefen Lattenaufstellung. Jordan Z. f V. XV. 337-356, 369-378.

Die in der Tachymetrie schon viel besprochene Frage, ob senkrechte oder schiefe Stellung der Distanzlatte vorzuziehen sei, ist wieder vom Verfasser, der zwar die Unparteilichkeit für sich in Anspruch nimmt, in sehr einseitiger Weise zu Gunsten der schiefen Stellung erörtert worden, wobei gleichzeitig dem Wagner-Fennel'schen Tachymeter mit Projectionsapparat das Wort geredet wird. Der einzige anzuerkennende Vorteil des vorgeschlagenen Verfahrens besteht in der leichteren Kontrolle vom Theodoliten aus; im übrigen treffen, abgesehen von der Rechnung, die Ausführungen nicht zu. Namentlich hätte die kühne Behauptung (S. 373), „dass die Feldarbeiten mit dem Tachygraphometer nicht mehr, sondern, strenge beurteilt, eher weniger Zeit in Anspruch nehmen, als diejenigen mit dem Tachymeter-Theodoliten oder irgend einem anderen, zu tachymetrischen Aufnahmen geeigneten Instrument u. s. w.", wegbleiben sollen. P.

O. Fennel. Die Wagner-Fennel'schen Tachymeter des mathematisch-mechanischen Instituts von Otto Fennel in Cassel. Cassel. Kommissions-Verlag von Julius Springer. Berlin.

Der Wagner-Fennel'sche Tachymeter ist zur Reduction der geneigten Entfernungen auf den Horizont und zur Ermittelung der Höhen der anvisirten Punkte mit einem Projectionsapparat in folgender Weise versehen: An dem zum Distanzmessen eingerichteten Fernrohr ist durch zwei Arme ein mit einem Längenmassstabe versehenes Lineal so befestigt, dass dessen Oberkante parallel zur Visirlinie des Fernrohrs ist, während die Seitenflächen in verticalen Ebenen parallel zu derselben Visirlinie liegen. Auf diesem Lineal lässt sich ein durch selbstwirkende Federhemmung verstellbarer Schieber bewegen, an dem zwei Nonien angebracht sind. Der obere Nonius ist um eine Axe drehbar, so dass er bei jeder Lage des Fernrohres vertical gestellt werden

kann, wohingegen der untere Nonius parallel dem Längenmassstabe ist. Nahezu senkrecht unter dem genannten Lineal ist ein zweites, ebenfalls mit einem Längenmassstabe versehenes Lineal horizontal befestigt. Auf der Oberkante des letzten Lineals ist mittels Rollen ein rechtwinkeliges Dreieck verschiebbar, dessen verticale Kathete wieder einen Massstab trägt, der in der Ebene des oberen Nonius liegt und so gestellt werden kann, dass mit diesem Nonius gleich die Höhe des anvisirten Punktes über irgend einem angenommenen Horizont abgelesen wird. Mittels eines Nonius neben dem horizontalen Massstabe werden die auf den Horizont reducirten Entfernungen abgelesen. Das Fernrohr von 35^{cm} Brennweite und einer 31-maligen Vergrösserung kann sowohl leicht umgelegt als auch mit dem Ocularende durchgeschlagen werden und ist, damit das Instrument auch zum genauen Nivelliren benutzt werden kann, noch mit einer Reversionslibelle versehen. Der zum Repetiren eingerichtete Horizontalkreis ist entweder sexagesimal in Drittelgrade mit 30″ Noniusangabe oder centesimal in halbe Grade mit 1′ Noniusangabe geteilt. Ausserdem werden in demselben Institut noch Instrumente mit Bussole statt des Horizontalkreises und Tachygraphometer (eine Verbindung des erläuterten Projectionsapparates mit der Messtischkippregel) angefertigt. Alle drei Arten sind mit ihrer Prüfung und Berichtigung ausführlich beschrieben. P.

R. Wagner. Ueber die mit dem Reichenbach'schen Distanzmesser erreichbare Genauigkeit und einige Erörterungen über die Fehlerursachen desselben. Jordan Z. f. V. XV. 49-60, 81-90, 97-104.

Es sind die Resultate von 18 Beobachtungsreihen, die unter günstigen äusseren Verhältnissen erhalten wurden, mitgeteilt, woraus weiter der Schluss gezogen ist, dass der mittlere Fehler der mit einem Distanzmesser mit 25-facher Vergrösserung und der Constante = 100 gemessenen Längen 0,05—0,06 % der Länge beträgt. Die dazu benutzten mittleren Fehler der einzelnen Beobachtungsreihen wären noch zuverlässiger, wenn statt

der Abweichung einer einzelnen Beobachtung vom arithmetischen Mittel der wahre Fehler — Abweichung von dem mit Latten gemessenen Wert — in Rechnung genommen worden wäre. So würde sich z. B. in der Tabelle 2 der mittlere Fehler $m = \pm 6{,}23$ cm um fast 20% grösser herausstellen.

Am Ende sind noch Ergebnisse von Zielgenauigkeits- und Sehgenauigkeitsversuchen angegeben. P.

Börsch. Der Cerebotani'sche Distanzmesser. Auszug aus der Abhandlung in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1886. S. 125-134. Jordan Z. f. V. XV. 129-137, 214-216.

Nachdem von Jordan in der Z. f. V. 1884. S. 389-396 über die mit dem Cerebotani'schen Instrument auf der Versammlung des deutschen Geometervereins in Schwerin gemachten Messungen ein Bericht veröffentlicht worden war, welcher die Mängel des damaligen Verfahrens deutlich aussprach, hat der Verfertiger jenes Distanzmessers sich weiter mit der Sache beschäftigt und ein Instrument aus Stahl mit 1^m langer Schiene (gegen $0{,}5^m$ früher) hergestellt, mit welchem im Herbst 1885 bei Berlin Versuche angestellt worden sind. Dabei wurde von der unzulässigen Distanztabelle Abstand genommen, so dass constante Fehler wegfielen, und der unregelmässige Zielfehler, der früher $\pm 6{,}5''$ betrug, auf $\pm 2{,}5''$ herabgebracht. P.

A. Grünzweig von Eichensieg. Die Teletopometrie von L. Cerebotani. Mitt. üb. Art. u. Genie. XVII. Not. 223-226.

J. Tomse. Distanzmesser des russischen General-Majors Martuscheff. Mitt. üb. Art. u. Genie. XVII. Not. 181-186.

Der Distanzmesser gehört in die Klasse jener mit constanter Basis und besteht im wesentlichen aus einem linksseitigen Winkelkreuz mit Distanzscala, aus dem rechtsseitigen Winkelkreuz

und aus einer Schnur. Jedes Winkelkreuz wird durch zwei Fernrohre gebildet, deren Axen sich senkrecht schneiden.

Lp.

Capitel 2.

Astronomie.

J. Merrifield. A treatise on nautical astronomy for the use of students. London. Sampson Low, Marston, Searle, and Rivington.

Referat in Nature XXXIV. 262-263. („Ein ausgezeichnetes Werk für den Studirenden, augenscheinlich mit beträchtlicher Mühe zusammengestellt, auch von Seeleuten mit Vorteil zu benutzen“.) Lp.

Th. d'Oppolzer. Traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes. Édition française, publiée d'après la deuxième édition allemande par E. Pasquier. Vol. I. Paris. Gauthier Villars. XXVI u. 491 S. 4° u. CCIX S. Taf.

Nach der Vorrede des Uebersetzers unterscheidet sich die französische Uebersetzung von der deutschen Ausgabe in folgenden Punkten: 1) Was das Zeit- und Längenmass anbetrifft, so hat der Uebersetzer gemäss den Festsetzungen der Washingtoner Versammlung die bürgerliche Zeit und die Weltstunde angenommen, giebt jedoch in einer Note die Mittel an, die Angaben in das alte System zu verwandeln. 2) Der vorliegende Band bildet ein abgeschlossenes Ganzes; es finden keine Verweise auf Bd. II. statt, da der Uebersetzer diesem letzteren die Tafeln VId und XIV sowie die Methode entnommen hat, Normalörter zu bilden. 3) In Folge einer sorgfältigen Durchsicht durch die Herren von Oppolzer, Schram und Pasquier haben der Text und die Tafeln verschiedene Verbesserungen und Hinzufügungen er-

fahren. Die verbesserten Tafeln sind Xd col. B_{II} und X_k. Als Verbesserung des Textes sind die neuen Kriterien zu bezeichnen bezüglich des Zeichens des Winkels ϑ, der bei der Bestimmung der parabolischen Bahnen vorkommt. Unter den Hinzufügungen ist der Artikel *k* des Capitels V im ersten Teile und das Beispiel des Kometen Cruls von 1882 bemerkenswert, weil es die vielfachen Lösungen betrifft.

Die Uebersetzung ist unter Mitwirkung der Herren von Oppolzer, R. Schram und C. Dusausoy gefertigt. Mn. (Lp.)

G. Pein. Die Verbesserung des Julianischen Kalenders. Hoffmann Ztschr. XVII. 321-330.

Die Arbeit macht auf einen Fehler aufmerksam, welcher sich in den meisten Lehrbüchern der astronomischen Geographie bei der Darstellung der Gregorianischen Kalenderverbesserung findet. Von Caesar bis Gregor XIII. ist die Nachtgleiche um 13 Tage zurückgegangen. Es ist also falsch, wenn angegeben wird, dass durch das thatsächliche Ueberspringen von 10 Tagen 1582 die Nachtgleiche wieder auf das Datum gebracht worden sei, wie es zu Caesar's Zeiten war; es muss heissen: wie es zur Zeit des Concils zu Nicaea war, d. i. 21. März. Lg.

A. Saporetti. Metodo analitico della determinazione dell' equazione del tempo. Bologna Mem. (4) VI. 481-500.

Analytische Behandlung eines elementaren Gegenstandes. B.

A. Gaillot. Détermination de l'erreur de la constante de la réfraction astronomique, par les observations méridiennes. C. R. CII 200-202, 247-250.

Berechnet man die Polhöhe eines Ortes aus den Culminationen zweier Circumpolarsterne, die nahezu dieselbe Rectascension haben, so weist eine Differenz zwischen beiden Resul-

taten darauf hin, dass die Refractionsconstante und die Constante der Biegung des Instruments einer Correction bedürfen. Aus einer Reihe von Beobachtungen kann man beide Correctionen ableiten. Durch entsprechende Beobachtungen an mehreren Sternen ergeben sich etwaige Aenderungen der Refractionsconstante, sowie auch ein genauer mittlerer Wert derselben.

Wn.

LOEWY. Nouvelle méthode pour la détermination des éléments de la réfraction. C. R. CII. 74-78.

LOEWY. Détermination des éléments de la réfraction. C. R CII. 290-297.

LOEWY. Détermination des éléments de la refraction. Solution pratique la plus favorable. C. R. CII. 380-385, 533-539.

LOEWY. Nouvelles méthodes pour la détermination directe de la valeur absolue de la réfraction à divers degrés de hauteur. C. R. CII. 887-888, 1196-1202, 1273-1279.

Der Grundgedanke der Methode, deren Theorie nach verschiedenen Richtungen hin ausführlich entwickelt wird, ist folgender. Vor dem Objectiv des Beobachtungsfernrohrs sei ein Glasprisma mit versilberten Flächen so angebracht, dass die Fernrohraxe zur brechenden Kante senkrecht steht und den brechenden Winkel halbirt. Bei passender Stellung von Fernrohr und Prisma erhält man dann gleichzeitig im Gesichtsfelde die Bilder von zwei Sternen, deren Winkelabstand am Himmel (nahezu) gleich dem Doppelten des brechenden Winkels ist. Die Distanz der beiden Bilder wird mikrometrisch gemessen; die Aenderungen dieser Distanz hängen offenbar von den Aenderungen der Refractionen für die beiden Sterne ab, können also, wenn das Gesetz der Refraction der Form nach bekannt ist, zur Bestimmung der eingehenden Constanten benutzt werden.

B.

GRUEY. Sur les formules de M. Loewy pour la réduction des circompolaires. C. R. CII. 966-970.

Herleitung der Loewy'schen Formeln zur Ermittelung der Coordinaten von polnahen Sternen aus Mikrometerbeobachtungen in einem Meridiankreise von grossem Gesichtsfeld. B.

P. HARZER. Ueber ein dreiflächiges, nach Herrn Scheibner's Principien berechnetes Objectiv. Astr. Nachr 2751.

Enthält die ausführliche Mitteilung der Berechnung eines Objectivs, welches bestimmt war, als praktische Probe für die Zweckmässigkeit der von Herrn Scheibner (Leipz. Abh. XVIII) aufgestellten Constructionsbedingungen zu dienen. B.

F. PLATO. Beiträge zur Behandlung der Distanzmessungen am Himmel unter besonderer Berücksichtigung der Längenbestimmung durch Monddistanzen. Diss. Marburg. 47 S. 4°.

C. PRILCHARD. Researches in stellar photography. 1) In its relation to the photometry of the stars. 2) Its applicability to astronomical measurements of great precision. Lond. R. S. Proc. XL. 449-450, XLI. 159-212. Cly.

L. BIRKENMAJER. Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten in der Bewegung der physischen Doppelsterne. Analyse der Bahn ξ Ursae majoris (Struve 1523). Wien. Ber. XCIII. 1-76.

Unter teilweiser Vervollständigung einer früheren Arbeit von Villarceau (Connaissance d. T. 1878) werden die Formeln für die genannten Ungleichungen ausführlich entwickelt, wobei namentlich die interessanten Beziehungen zwischen diesen Ungleichungen und den Bestimmungsstücken der wahren Bewegung erörtert werden. Die Anwendung auf denjenigen Doppelstern,

an welchem seinerzeit der erste Versuch einer Bahnbestimmung (von Savary) gemacht wurde, zeigt allerdings, welchen Schwierigkeiten man hierbei selbst in einem relativ günstigen Falle begegnet. B.

HOUZEAU et FOLIE. Rapport sur un mémoire de M. Ch. Lagrange intitulé: „Méthode pour la détermination des parallaxes par des observations continus. Application à la parallaxe solaire“. Belg. Bull. (3) XII. 239-244.

Darstellung eines äusserst geistreichen Verfahrens, welches sich auf die Bemerkung stützt, dass der Winkelabstand eines Gestirns ohne eigene Bewegung, welches von der Erdoberfläche aus beobachtet wird, von der Stellung, wenn es vom Erdmittelpunkte aus beobachtet würde, eine bekannte Function der Parallaxe ist. Um die Methode in die Praxis umzusetzen, muss man ein Mittel ersinnen, einem Fernrohre eine unveränderliche Richtung zu geben. Während des Tages ist dies schwierig wegen des Einflusses der Sonnenwärme; vielleicht dürfte es jedoch während der Nacht gelingen; und man käme dadurch zu einer strengen Bestimmung der Differenz der Parallaxe zweier Planeten. Mn. (Lp.)

HOUZEAU et F. FOLIE. Rapport sur un travail de M. L. de Ball relatif à la détermination de la parallaxe relative à l'étoile principale du couple optique Σ 1516 A. B. Belg. Bull. (3) XII. 609-611.

Bestimmung der Parallaxe nach zwei verschiedenen Methoden. Der Verfasser findet eine Entfernung von 31 Lichtjahren. Mn. (Lp.)

HOUZEAU. Rapport sur un travail de M. L. de Ball concernant la planète (181) Eucharis. Belg. Bull. (3) XII. 487-488.

Nach dem Berichterstatter enthält die tüchtige Arbeit des Herrn de Ball die erste Anwendung der Schönfeld'schen Methode zur Berichtigung der provisorischen Elemente einer Bahnlinie.

Mn. (Lp.)

B. MATTHIESSEN. Ueber die Bahn des Planeten (107) Camilla. Diss. Kiel. 34 S. 8°.

J. RAHTS. Berechnung der Elemente des Tuttle'schen Cometen für seine Erscheinung im Jahre 1885. (Sep.-Abdr. a. d. Astr. Nach.) Diss. Königsberg. 20 S. 4°.

R. POKNISCH. Definitive Bahnbestimmung des Cometen 1877 III. Diss. Leipzig. 20 S. 4°.

B. BUSZCZYNSKI. Ueber die Bahnen der am 11. December 1852 und am 3. December 1861 in Deutschland beobachteten hellen Meteore. Halle a. S. H. W. Schmidt. 8°. 32 S.

Der wesentliche Inhalt der Arbeit besteht in der Discussion des für die beiden genannten Meteore vorhandenen Beobachtungsmaterials, wobei als Hauptresultat hervorzuheben ist, dass die Rechnung für die Bahnen ausserhalb der Atmosphäre auf Hyperbeln führt, deren Excentricität merklich von Eins verschieden ist.

B.

O. JESSE. Ueber die Bestimmung der Höhe der Sternschnuppen in bekannten Bahnen durch Beobachtungen von einem Orte aus. Astr. Nachr. 2722.

G. D. E. WEYER. Elementare Berechnung der Sternschnuppenbahnen um die Sonne. Astr. Nachr. 2744.

Der mathematische Inhalt der Arbeit wird durch den Titel erschöpft. B.

A. Seydler. Geschichte des Dreikörperproblems. Casop. XV. 7, 65, 102. (Böhm.)

Enthält eine für weitere Kreise berechnete, formgewandte wie sachkundige Darstellung der historischen Entwickelung dieses interessanten mechanischen Problems unter Beibringung der wichtigsten literarischen Quellen. Std.

O. Backlund. Dr. Harzer's Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper. Bericht an die Akademie der Wissenschaften. Pétersb. Bull XXXI. 125-138.

P. Harzer. Ueber eine von Herrn Tschebyscheff angegebene Interpolationsformel. Astr. Nachr. 2757.

Die Arbeit giebt zunächst eine Reproduction der im allgemeinen wenig bekannten Interpolationsmethode von Tschebyscheff (Petersb. Mem. (7) I. No. 5) und erläutert dann die Anwendung derselben in ausführlicher Weise an zwei Beispielen, von denen das eine in der That als eine sehr strenge Probe der Brauchbarkeit bezeichnet werden darf. B.

A. Weiler. Ueber die Form der Integrale in dem Problem der drei Körper. Astr. Nachr. 2762.

B.

B. Baillaud. Mémoire sur le développement de la fonction perturbatrice. Annales de l'Observatoire de Toulouse. II.

Für die Entwickelung wird zunächst das Quadrat der

Distanz der beiden Planeten in der Form

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + D,$$

$$\Delta_0^2 = A + B\cos(u - u' + \beta) + C\sin(u + u' + \gamma),$$

$$D = a\cos(u + \alpha_1) + b\cos(u' + \beta_1) + c\cos 2u + d\cos 2u'$$

angesetzt, wo u und u' die beiden excentrischen Anomalien bedeuten und die übrigen Grössen von den Bahnelementen abhängen. Die Störungsfunction wird dann erst nach den Potenzen der in Δ^2 auftretenden kleinen Coefficienten und die hierbei entstehenden Nenner mittels der Lagrange'schen Reihe nach den mittleren Anomalien entwickelt. B.

B. Baillaud. Sur le nombre des termes d'un certain développement de la fonction perturbatrice. Toul. Mém. (8) VIII. 73-85.

In der von Herrn B. gegebenen Entwicklung der Störungsfunction (Annales de l'Observatoire de Toulouse II, siehe das voranstehende Referat) erscheinen die einzelnen Glieder als abhängig von acht ganzzahligen Indices, welche die Ordnung und das Argument jedes Gliedes bestimmen. Diese Indices, von denen die Hälfte stets positiv ist, müssen für alle Glieder einer bestimmten Ordnung oder mit einem bestimmten Argument gewissen linearen Gleichungen und Ungleichungen mit ganzzahligen Coefficienten genügen. Es handelt sich darum, die Anzahl der Terme bis zu einer bestimmten Ordnung hin allgemein anzugeben. Diese Aufgabe wird in einfacher Weise gelöst. B.

O. Callandreau. Simplifications qui se présentent dans le calcul numérique des perturbations pour certaines valeurs de l'argument. Applications. C. R. CII. 598-601.

Es wird darauf hiegewiesen, dass sich die Integrale der Form

$$\int dx \cos nx\, \Delta^{-5}, \qquad \int dx \sin nx\, \Delta^{-5},$$

$$\Delta^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos x, \qquad n \text{ incommensurabel},$$

direct auswerten lassen, wenn die Grenzen 0 und $2k\pi$, resp.

$-\pi$ und $(2k-1)\pi$ sind, dass man also in den Störungsreihen für die Epochen, welche den angegebenen oberen Grenzen entsprechen, direct die Werte der betreffenden Glieder erhält.

B.

F. Tisserand. Sur un cas remarquable du problème des perturbations. C. R. CIII. 446-451.

Es wird gezeigt, dass zwei Planeten, welche angenähert in wenig gegen einander geneigten Kreisbahnen um den Centralkörper laufen, und deren mittlere Bewegungen sehr nahe das Verhältnis $(n+1):n$ besitzen, durch ihre gegenseitigen Störungen eine Libration in Länge und Radiusvector erzeugen, die zusammengenommen mit der ungestörten Bewegung den Anschein hervorruft, als sei eine merkliche Excentricität nebst einer nahezu gleichförmigen Drehung der Apsidenlinie vorhanden. B.

Th. von Oppolzer. Entwurf einer Mondtheorie. Wien. Denkschr. LI. 69-105.

Da ein Referat, welches eine deutliche Vorstellung von dem Gedankengange der vorliegenden Arbeit giebt, die hier gesteckten Grenzen erheblich überschreiten würde, so beschränkt sich Referent darauf, auf den ausführlicheren Bericht in Astr. Viertschr. XXII. 1887 zu verweisen und hier nur die charakteristischen Merkmale aufzuzählen. Der Ansatz der Bewegungsgleichungen lehnt sich zunächst an Hansen's Darstellung an, jedoch werden nachher die Mondcoordinaten von sechs abweichend gewählten Daten abhängig gemacht; die mittleren Bewegungen von Knoten und Perigaeum sowie deren Differentialquotienten werden als vorläufig disponible Parameter eingeführt, deren Werte nachher sich durch die Bedingung bestimmen, dass gewisse saeculare Glieder fortfallen sollen; zu demselben Zwecke wird in den Bewegungsgleichungen der Masse „Erd-Mond" ein vorläufig disponibles Increment erteilt. Eigentümlich und sinnreich ist endlich das Integrationsverfahren, dessen Brauchbarkeit aller-

dings von der im Grunde genommen willkürlichen Gruppirung aller auftretenden Glieder in bestimmte Grössenordnungen abhängt. B.

G. W. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and the Moon. Acta Math. VIII. 1-36.

Die Arbeit ist im wesentlichen ein Abdruck einer früheren aus dem Jahre 1877 (vgl. F. d. M. IX. 795). Es mag deshalb hier nur bemerkt werden, dass das an sich sinnreiche, aber wenig strenge Verfahren des Herrn Verfassers zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x . X = 0,$$

$$X = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots,$$

seitdem durch strenge Entwickelungen ersetzt worden ist (vgl. F. d. M. 1883. XV. 980-981). B.

P. Ubaghs. Formules de la nutation annuelle. Belg. M. S. É. XLVII. 42 S.

Man vergleiche den Bericht über diese Arbeit in Belg. Bull. (3) VIII. 173-177 (F. d. M. XVI. 1884. 1109).

Die Arbeit des Hrn. Ubaghs ist eine Ergänzung zu der des Hrn. Folie über denselben Gegenstand. Hr. Ubaghs hat die Formeln des Hrn. Folie entwickelt, indem er die Glieder von der vierten Ordnung und diejenigen berücksichtigte, welche von den hauptsächlichsten Ungleichheiten des Mondes herrühren.

Mn. (Lp.)

H. Keutzer. Berechnung von Finsternissen. Pr. Realgymn. Offenbach a. M. (No. 588). 15 S. 4° u. 1 Taf.

Der Verfasser giebt die Art und Weise der Berechnungen in kurzem Zusammenhange an; er will keine neuen Gesichtspunkte bieten, sondern nur sich bemühen, den Gang der Rech-

nung zu erläutern und, soweit dies zum Verständnis notwendig scheint, die in Betracht kommenden Grössen nebenbei erklären.

Lp.

Th. Wittram. Zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten. Dorpat. Karow.

Der Grundgedanke der angewandten Methode besteht in der Benutzung der Hansen'schen Partition, jedoch mit vier ein für alle mal festgesetzten Teilpunkten (excentrische Anomalie $= 0^\circ$, 90°, 180°, 270°), um gewisse numerische Entwickelungen für alle kleinen Planeten gemeinsam benutzen zu können. Dies festgesetzt, werden die Rechnungsvorschriften unter Zugrundelegung der Hansen'schen Störungsformeln vollständig entwickelt und an einem Beispiel (Planet Diana) erläutert, wobei sich das nicht unwichtige Resultat ergiebt, dass unter Umständen es nicht gleichgültig ist, ob man die wahren Oerter des Jupiters oder die aus einem mittleren resp. osculirenden Elementensystem berechneten benutzt.

B.

C. Mönnichmeyer. Eine genäherte Berechnung der absoluten Störungen der Themis durch Jupiter. Diss. Kiel. 32 S. 8°.

G. Lorentzen. Theorie des Gaussischen Pendels. Astr. Nachr. 2728.

H. Samter. Theorie des Gaussischen Pendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Hoppe Arch (2) IV. 1-99.

Das Gaussische Pendel ist ein Pendel, welches in einer Compassaufhängung schwingt, dessen Bewegung also zwei Grade der Freiheit besitzt. Dasselbe wurde von Gauss angegeben, um die Foucault'schen Versuche über den Einfluss der Erdrotation anzustellen. Der Hauptzweck einer für die Vergleichung mit den Beobachtungen brauchbaren Theorie besteht nun darin festzustellen, in welcher Weise die mechanische Ausführung des

physischen Pendels auf den Verlauf der Schwingungen einwirkt. Diese Untersuchung bietet zwar keine principiellen Schwierigkeiten, da es genügt, die Bewegungsgleichungen durch successive Annäherung zu integriren, erfordert dagegen eine ziemlich umständliche Entwickelung, weil die Anzahl der in Betracht kommenden Bestimmungsstücke nicht unerheblich ist. Diese Entwickelung ist in den beiden vorliegenden Arbeiten, welche nahezu gleichzeitig und unabhängig von einander entstanden sind, vollständig soweit durchgeführt, als die praktische Anwendung erfordert. Als wesentliches Ergebnis ist hier anzuführen, dass gewisse Abweichungen des physischen Pendels von seiner einfachsten mathematischen Idee sehr merklich auf den Verlauf der Schwingungen einwirken, und dass deshalb das Gaussische Pendel für die gedachten Versuche weniger geeignet erscheint, als ein mit den nötigen Vorsichtsmassregeln construirtes Fadenpendel.

B.

W. Wislicenus. Beitrag zur Bestimmung der Rotationszeit des Planeten Mars. Diss. Strassburg. Leipzig. W. Engelmann.

Nach einer historischen Einleitung wird zunächst das dem Verfasser zugänglich gewesene Beobachtungsmaterial zusammengestellt und die Identificirung der von mehreren Astronomen benutzten Namen mit den Bezeichnungen der Schiaparelli'schen Karte gegeben. Hieran schliesst sich die Darlegung der Methode, welche zur Bestimmung der areocentrischen Coordinaten der in Betracht kommenden Flecken benutzt wird, sowie eine Untersuchung über die Lage der Marsaxe während der Opposition von 1877. Hiermit sind dann die Vorbereitungen für die im letzten Abschnitte ausgeführte Ermittelung der Rotationszeit selber erledigt.

B.

F. Tisserand. Mémoire sur l'anneau de Saturne. Annales de l'Observatoire de Toulouse. T. I. (1880.)

Enthält den Beweis, dass, wie bereits Laplace zu zeigen

suchte, die Annahme eines flüssigen ungeteilten Ringes mit der Forderung des Gleichgewichts unvereinbar ist. B.

F. TISSERAND. Sur les déplacements séculaires du plan de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). Annales de l'Observatoire de Toulouse. T. I. (1880.)

Unter der Voraussetzung, dass die Ebene der Saturnsbahn und die Ringebene fest seien, und dass letztere mit dem Saturnsäquator zusammenfalle, werden die Säcularänderungen der Ebene der Japetusbahn aufgesucht, soweit dieselben herrühren von der Sonne, der Saturnsabplattung, dem Ring und den sieben inneren Satelliten. Es ergiebt sich, dass der Pol der Japetusbahn in diesem Falle eine sphärische Ellipse beschreibt. B.

F. TISSERAND. Sur le mouvement des apsides des satellites de Saturne et sur la détermination de la masse de l'anneau. Annales de l'Observatoire de Toulouse. T. I. (1880.)

A. SVEDSTRUP. Les petites planètes entre Mars et Jupiter. (Une recherche statistique). Astr. Nachr. 2740.

Man denke sich durch die Sonne senkrecht zur Ekliptik sechs gleichmässig verteilte Halbebenen gelegt, deren Spur auf der Ekliptik resp. die Längen 30°, 90°, ..., 330° besitzt. Die Durchschnitte der Bahnen der kleinen Planeten mit jeder Ebene geben dann eine Vorstellung von der räumlichen Anordnung der Bahnen an der betreffenden Stelle. Die Discussion der Verteilung in diesen Punktsystemen (Lage des Schwerpunktes und Dispersion) zeigt, dass im Grunde genommen einfache Gesetzmässigkeiten nicht vorhanden sind. B.

H. CRANZ. Zur geometrischen Theorie der Dämmerung. Schlömilch Z. XXXI. 158-165.

Es wird gezeigt, dass die Aufgaben über die Dämmerung sich graphisch in sehr einfacher Weise erledigen lassen. Der erste Abschnitt benutzt hierbei Constructionen auf der Kugel direct, der zweite Constructionen in der Ebene unter Zugrundelegung der stereographischen Projection. Der dritte Abschnitt giebt eine Ableitung der entsprechenden Formeln. B.

F. Folie. Rapport sur un mémoire intitulé: Détermination de la direction et de la vitesse de transport du système solaire dans l'espace, par M. C. Ubaghs. Belg. Bull. (3) XI. 136-139.

O. Struve hat die Bemerkung gemacht, dass die systematische Aberration, d. h. die von derjenigen Bewegung herrührende, mit welcher die Sonne und nebst ihr die Erde behaftet sind, nicht constant ist, sondern in Rectascension und Declination mit der Zeit sich ändert, zufolge der Variation selbst dieser Coordinaten. Folie hat daraus geschlossen, man müsse dieser Variation bei der Untersuchung der Bewegung des Sonnensystems Rechnung tragen. Indem man so verfährt, wird man die Richtung und Grösse dieser Bewegung, ja sogar die mittlere Entfernung der Sterne bestimmen können, die man benutzt, wenn diese Sterne in Abständen stehen, die wenig vom mittleren abweichen. Hr. Ubaghs hat diesen Gedanken auf die Bestimmung der Rectascension und Declination des Punktes angewandt, gegen den die Sonne sich hinbewegt, ferner auf das Verhältnis ihrer Bewegung zu ihrem mittleren Abstande. Dazu hat er drei Gruppen von Sternen benutzt, die bezw. 56, 145 und 263 Sterne umfassen, und diese haben ihn zu hinlänglich übereinstimmenden Ergebnissen geführt. Mn. (Lp.)

F. Ubaghs. Détermination de la direction et de la vitesse du transport du système solaire dans l'espace (Première partie). Belg M. S. É. XLVII. 43 S.

Vgl. den voranstehenden Bericht. Mn.

H. Seeliger. Ueber den neuen Stern im Andromedanebel. Astr. Nachr. 2710.

In dem mathematischen Teile der Arbeit wird gezeigt, dass der Gang der Lichtcurve des genannten Objectes in befriedigender Weise mit der Annahme übereinstimmt, dass man es mit der Abkühlung eines plötzlich zu hoher Temperatur erwärmten Körpers zu thun habe. B.

Wolf. Ueber die Bestimmung der Sonnenparallaxe mittelst der Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe, für die Schule zurecht gelegt. Pr. Lyceum Metz.

C. Wolf. Les hypothèses cosmogoniques. Examen des théories scientifiques modernes sur l'origine des mondes, suivi de la traduction de la Théorie du ciel de Kant. Paris. Gauthier-Villars.

H. Gyldén. Om ett bevis för planetsystemets stabilitet. Stockh. Öfv. 45-49.

G. Dillner. Om integrationen af differentialeqvationerna i N-kroppars-problemet. II und III. Stockh. Öfv. 173-184, 217-222.

Fortsetzung einer Abhandlung mit demselben Titel (F. d. M. XIV. 1882. 751).

Capitel 3.
Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. Günther. Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauche in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. 2. Aufl. München. Th. Ackermann. XII u. 157 S. 8°.

Das für bayerische Studienanstalten (Gymnasien) 1878 geschriebene Büchelchen hat durch den Umstand ein besonderes Gepräge erhalten, dass in diesen Schulen Physik nicht gelehrt werden soll. Der Verfasser, dem ja ein reiches historisches Wissen zur Verfügung steht, nötigt den Leser, dem historischen Verlaufe sich zu accommodiren. Ausser vielen als notwendig gefundenen Besserungen im einzelnen ist am Plane des Lehrbuchs in der neuen Auflage nichts geändert. Lp.

G. Effert. Grundriss der mathematischen und physikalischen Geographie. Zweite Auflage. 94 S. Würzburg. Stahel.

Dieses Büchlein ist genau dem Unterrichtsgange der bayerischen Realschule angepasst; in dieser werden die Anfangsgründe der beiden genannten Disciplinen Schülern vorgetragen, welche gerade erst mit den Elementen der Geometrie, Algebra und Physik bekannt geworden sind. Dadurch ist dem Verfasser seine Aufgabe natürlich sehr erschwert; was aber mit den erwähnten beschränkten Hülfsmitteln geleistet werden kann, das hat der Verfasser redlich geleistet, und insbesondere wurden auch die wichtigsten Thatsachen der Erdphysik in recht ansprechender Weise auseinandergesetzt. Der Unterschied zwischen Drift- und anderen Meeresströmungen (S. 91), der hier gemacht wird, hat seine Bedeutung heutzutage wohl fast ganz verloren.
Gr.

C. S. Cornelius. Grundriss der physikalischen Geographie. Sechste Auflage. 257 S. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Das Buch entspricht seinem Zwecke aufs beste. Mathematische Entwicklungen fehlen darin keineswegs, stehen aber nirgends im Vordergrunde. Der Verfasser fasst den Begriff der von ihm zu lehrenden Disciplin im denkbar weitesten Sinne, er trägt gern dem historischen Werden Rechnung, was sich besonders bei der Gegenüberstellung der älteren (Dove'schen) und der neueren (Buys-Ballot'schen) Windtheorie als sehr vorteilhaft erweist, und lässt es auch nicht an Literaturverweisen fehlen. Gr.

Kozonn-Jarz. Allgemeine Grundzüge für den ersten geographischen Unterricht. 9. Aufl. Wien und Olmütz. Hoelzel.

Die astronomische und physikalische Geographie, letzteres Wort im weitesten Sinne genommen, sind auf 68 Octavseiten behandelt. Die Darstellung ist eine sachliche und klare, muss jedoch, da an mathematischen Kenntnissen nur ein Minimum vorausgesetzt wird, bei den ersten Anfangsgründen stehen bleiben. Gr.

S. Günther. Erdkunde und Mathematik in ihren gegenseitigen Beziehungen. München. Theodor Ackermann.

Auf 30 Seiten sind die an sich einleuchtenden gegenseitigen Beziehungen zwischen Erdkunde und Mathematik besprochen und mit sehr zahlreichen, dem Leser recht willkommenen Literaturangaben versehen. P.

F. S. v. Seefeld. Astronomische Aufsätze eines Amateurs der Naturwissenschaft. Graz. Selbstverlag. 54 S.

Es sind wesentlich vier Aufgaben, denen der Amateur sein Interesse zuwendet. Zuerst begegnen wir einer populären Darstellung der bekannten statischen Theorie des Gezeitenphänomenes,

hierauf einigen Versuchen, auf ungewöhnlichem Wege den Erdhalbmesser zu berechnen, hierauf einer Verallgemeinerung der Fallgesetze unter der Voraussetzung sehr grosser Fallhöhen und endlich einer Abschätzung des Volumzuwachses, welchen Sonne und Mond stetig durch den Fall von Meteoriten erfahren, und der gegen das Ende aller Dinge hin die Vereinigung der beiden genannten Himmelskörper bewirken soll. Auf die Ausführungen des Verfassers im einzelnen einzugehen, ist hier nicht der Ort; erwähnt sei nur, dass jener den Beweis für die Richtigkeit von Falb's bekannten Prophezeiungen für durchaus erbracht ansieht und den Physikern einen Vorwurf daraus macht, dass sie die Fallgeschwindigkeit der Körper als von deren Masse unabhängig betrachten. Gr.

GUJOU. Sur un nouveau système de projection de la sphère. C. R. CII. 308-310.

Der Grundzug dieser Methode, über welche ihr Erfinder im Jahrgange 1887 der „Revue maritime et coloniale" eine ausführlichere Abhandlung veröffentlicht hat, besteht in einem leicht zu beweisenden Satze der Sphärik. Vier Punkte liegen auf einer Kugelfläche derart, dass sie die Ecken eines ebenen Rechteckes bilden; dann giebt es zwei sphärische Ellipsen von der Beschaffenheit, dass jeder zwei bestimmte Paare dieser vier Punkte als Brennpunkte zugehören, und zwar durchschneiden sich beide Ellipsen unter rechten Winkeln. Die Bogen zweier normalen Hauptkreise, welche gegen deren einen Schnittpunkt hin von den durch einen beliebigen Punkt M der Kugel hindurchgehenden beiden Ellipsen abgeschnitten werden, dienen zur Festlegung des fraglichen Punktes und werden vom Autor als „elliptische Länge und Breite" bezeichnet, die Begriffe „elliptischer Meridian und Parallel" sind jetzt ebenfalls ohne weiteres verständlich. Diese elliptischen Meridiane und Parallelen gehen bei der Abbildung in je ein System von parallelen geraden Linien über; damit die Projection eine conforme werde, müssen die der Länge γ und der Breite λ entsprechenden Parallelen vom Anfangs-

meridian und Aequator Entfernungen haben, welche, unter K eine gewisse Constante verstanden, resp. durch die Ausdrücke

$$\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{1-(1-K^2)\sin^2\gamma}}, \quad \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-K^2\sin^2\lambda}}$$

gegeben sind. Fallen je zwei Punkte in einen Pol hinein, so hat man $K = 1$ zu setzen und bekommt als Distanzen resp.

$$\int_0^\gamma d\gamma = \gamma, \quad \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\cos\lambda} = \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda).$$

Man sieht hieraus, dass Mercator's Projection als besonderer Fall in der Gujou'schen enthalten ist. Gr.

Heymann. Coordinaten zur Darstellung der Erdhalbkugel in stereographischer Aequatorealprojection. Jordan Z. f. V. XV. 385-390.

Nach Vorausschickung der nötigen Formeln ist eine Tabelle für die rechtwinkeligen Coordinaten der Schnittpunkte der Meridiane und Parallelkreise von 10 zu 10° berechnet. P.

Chr. Sandler. Johann Baptista Homann. Ein Beitrag zur Geschichte der Kartographie. (Aus Ztschr. d. Ges. f. Erdkunde 1886. H. 4/5.) Diss. München. 59 S. 8°.

G. Egidi. Lettera al R. P. Ferrari intorno ad un problema di gnomonica. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXVIII. 101-105.

Das Problem, um welches es sich handelt, ist dieses: Wenn die Polhöhe eines Ortes bekannt ist, soll man durch blosse Messungen von Sonnenhöhen sowohl die Zeit als auch die mittlere Declination der Sonne für den Beobachtungstag bestimmen. Es wird angenommen, dass den drei ungleichen Zenitdistanzen Z, Z', Z'' resp. die Stundenwinkel h, h', h'' entsprechen, dass δ

das Complement der Declination, λ dasjenige der Polhöhe ist, und dass auf einer äquatorialen Sonnenuhr die Differenzen $(h-h')$ und $(h'-h'')$ abzulesen sind. Der Cosinussatz führt zu den folgenden beiden Gleichungen:

$$\cos\lambda\cos\delta = \frac{\cos h'\cos z - \cos h\cos z'}{\cos h' - \cos h};$$

$$\cos\lambda\cos\delta = \frac{\cos h''\cos z' - \cos h'\cos z''}{\cos h'' - \cos h'}.$$

Daraus folgt wieder leicht

$$\sin\delta\sin\lambda = \frac{\sin\frac{z+z'}{2}\sin\frac{z-z'}{2}}{\sin\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h-h'}{2}}; \quad \sin\delta\sin\lambda = \frac{\sin\frac{z'+z''}{2}\sin\frac{z'-z''}{2}}{\sin\frac{h'+h''}{2}\sin\frac{h'-h''}{2}}.$$

Durch Vergleichung und geeignete Abkürzung folgt hieraus:

$$M\sin\frac{h+h'}{2} = N\sin\frac{h'+h''}{2}.$$

Unter α, α', α'' die gnomonische Ablesung, unter ε den Uhrfehler verstehend, setzt der Verfasser $h = \alpha+\varepsilon$, $h' = \alpha'+\varepsilon$, $h'' = \alpha''+\varepsilon$ und zuletzt

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{M\sin\alpha_1 - N\sin\alpha_2}{M\cos\alpha_1 - N\cos\alpha_2}.$$

Der Wert von δ geht dann unmittelbar aus jeder der beiden ursprünglichen Gleichungen hervor. Gr.

J. Plassmann. Beiträge zur Astrophysik. Pr. Gymn. Warendorf.

Die Abhandlung zerfällt in drei unter sich nicht direct zusammenhängende Teile.

I. Versuch, das Rotationsgesetz und die Fleckenperiode der Sonne zu erklären. Die Formeln, welche Carrington, Faye, Spörer und Zöllner für die tägliche Bewegung eines Sonnenfleckes unter verschiedenen heliographischen Breiten aufgestellt haben, werden discutirt und als unzureichend erkannt. Der Ver-

fasser geht von der Annahme aus, dass am Aequator der Sonne der Meteorsteinfall ein weit reichlicherer sein müsse als in höherer Breite, und dass hiedurch auch den äquatorialen Partien eine beschleunigte Eigenbewegung erteilt werde. In einer Breite von 35° 16′ trete das Maximum der Verschiebung und Reibung ein. Allerdings liege die Zone der hauptsächlichsten Flächenentwickelung dem Sonnengleicher thatsächlich noch näher; vielleicht werde man deshalb, so meint der Verfasser, der Wahrheit aber auch noch näher kommen, wenn man nicht die Faye'sche Formel ($m - n \sin^2\varphi$) für die Winkelgeschwindigkeit unter der Polhöhe φ, sondern eine auch höhere gerade Potenzen von $\sin\varphi$ in sich aufnehmende Formel zugrunde lege.

II. Selenologische Fragmente. Der Verfasser sucht die Entwickelungsgeschichte der Oberfläche unseres Trabanten physikalisch zu skizziren, indem er sich teilweise den Ansichten von Carpenter und Nasmyth anschliesst. In den Rillen erblickt er Sprünge, in den „Meeren“ des Hevelius wirklich alten Seeboden; hier sei die Aufsaugung des Wassers durch das Gestein mit grösserer Langsamkeit als sonst erfolgt. Das Vorhandensein minimaler Wasserlachen auch in der Jetztzeit sei nicht ausgeschlossen.

III. Verzeichnis von Meteorbahnen. Diese Zusammenstellung, grossenteils auf eigenen Beobachtungen beruhend, repräsentirt eine dankenswerte Ergänzung der bekannten Kataloge von Heis und J. Schmidt. Gr.

G. H. Darwin and H. H. Turner. On the correction to the equilibrium theory of the tides for the continents. Lond. R. S. Proc. XL. 303-315.

In der Gleichgewichtstheorie der Gezeiten, wie sie durch Newton und Bernoulli geschaffen ist, wird angenommen, dass die Gestalt des Oceans in jedem Augenblicke eine Gleichgewichtsfläche ist. Dagegen hat Sir W. Thomson ermittelt, dass, wenn Teile des Erdballs vom Land eingenommen werden, das in der

gebräuchlichen Theorie gegebene Gesetz des Steigens und Sinkens des Wassers nicht durch ein constantes Wasservolumen befriedigt werden kann. (Thomson and Tait's Nat. Phil. 1883, § 808). Im ersten Teile wird durch Hrn. Darwin die Arbeit des Sir W. Thomson in ein neues Licht gestellt und ihre Schlüsse leichter verständlich gemacht. Der zweite Teil von Hrn. Turner enthält die nötigen Zahlenrechnungen zur Anwendung der Ergebnisse auf den Fall der Erde. Cly. (Lp.)

G. H. Darwin. On the dynamical theory of tides of long period. Lond. R. S. Proc. XLI. 337-342.

In dieser Note wird gegen die Laplace'sche Methode der Behandlung dieser Gezeiten ein Einwand erhoben und eine auf einer Schrift des Sir W. Thomson beruhende dynamische Lösung der Aufgabe unterbreitet. Cly. (Lp.)

F. Folie. Une simple remarque fort utile pour la détermination en voyage, de la déclinaison magnétique. Belg. Bull. (3) XI. 90-95.

Zur Auffindung der magnetischen Declination hat man den Meridian des Ortes oder ein beliebiges Azimut zu bestimmen. Die Bemerkung, welche eine Vereinfachung dieser Bestimmung gestattet, ist die folgende: Wenn die Höhe eines Gestirns seiner Declination gleich ist, letztere mit ihrem Zeichen oder dem entgegengesetzten genommen, je nachdem sie nördlich oder südlich ist, so ist sein Azimut das Supplement seines Stundenwinkels oder auch diesem Winkel selber gleich. Mn. (Lp.)

J. Liagre. De l'influence de l'attraction lunaire sur le baromètre à mercure. Belg. Bull. (3) XI. 86-87.

F. Folie. Réponse à la note précédente. Belg. Bull. (3) XI. 87-89.

Der erstere von beiden Forschern behauptet, dass die Mondanziehung eine unbedeutende Depression erzeugt, kleiner als ein Zehntausendstel Millimeter, nach den Angaben von Hrn. Folie selbst. Dieser dagegen hält eine gegenteilige Abschätzung aufrecht. Mn. (Lp.)

K. Weihrauch. Ueber die Berechnung meteorologischer Jahresmittel. Dorpat. Mattiesen. 11 S.

Der meteorologische Congress zu Wien bestimmte, es sollten die Jahresmittel irgend eines meteorologischen Elementes (Temperatur, Niederschlagsmenge u. s. w.) in der Weise ermittelt werden, dass man für jeden bürgerlichen Monat den Mittelwert und aus diesen zwölf Werten wiederum das arithmetische Mittel nähme. Wie gross etwa der durch diese Anordnung entstehende Fehler sei, wusste man nicht. Herr Weihrauch untersucht daher diese nicht unwichtige Frage auf Grund der Bessel'schen Formel; er nennt M_ω das wahre, M_c das nach obiger Festsetzung erhaltene Tagesmittel, k die Ordnungszahl eines Jahrganges, y_k das zugehörige Tagesmittel des betreffenden Elementes und erhält so zunächst in bekannter Weise

$$y_k = M_\omega + p_1 \cos\frac{2\pi k}{365} + q_1 \sin\frac{2\pi k}{365},$$

dann aber, nach mehreren Umformungen,

$$M_c = M_\omega + 0{,}00365 p_1 + 0{,}00449 q_1.$$

Die Discussion dieser Formel ergiebt u. a., dass die nach der Congress-Vorschrift berechneten Jahresmittel der Lufttemperatur auf der nördlichen Halbkugel zu klein, auf der südlichen zu gross ausfallen. Der Fehler ($M_\omega - M_c$) gehört eben nicht, wie man offenbar angenommen hatte, zu den zufälligen, die im Zeichen ganz nach den Umständen wechseln, sondern zu den systematischen, die stets nach derselben Seite hin fallen. Und damit ist auch festgestellt, dass es als bedenklich erachtet werden muss, wenn man von der allerdings sehr bequemen Regel der Wiener Versammlung Gebrauch macht. Gr.

STRACHEY. On the computation of the harmonic components etc. Lond. R. S. Proc. XL. 367-368.

Vorschlag einer Methode zur Berechnung der harmonischen Componenten von Formeln, welche die täglichen und jährlichen Aenderungen in der Temperatur oder dem Druck der Atmosphäre oder bei anderen wiederkehrenden Erscheinungen darstellen sollen. Dieselbe ist weniger mühsam als die gewöhnliche Methode, obschon sie praktisch keine merkbar grösseren Fehler mit sich bringt. Cly. (Lp.)

H. WRONSKI. Application nautique de la nouvelle théorie des marées. Oeuvre posthume, propriété de M. Ladislas Zamoyski de Kornick. Paris. Gauthier-Villars.

CHR. ZELLER. Kalender-Formeln. Acta Math. IX. 131-136.

Regeln zur Bestimmung des Wochentags und des Ostertermines, die nichts wesentlich Neues enthalten. M.

FRIEDRICH MAYER. Das Barometer und seine Anwendung. Nebst einem Anhang: Die Grundzüge der neueren Witterungslehre. Pr. Studienanstalten Dillingen.

Anhang.

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Entlassungsprüfungen an preussischen Gymnasien und Realgymnasien gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Resultate zu einem Uebungsbuche vereint. Erster Teil: Aufgaben. 7te Aufl. Zweiter Teil: Ergebnisse. 6te Aufl. Leipzig. C. A. Koch's Verl. (J. Sengbusch.) XVI u. 210 S. (1886), II u. 301 S. (1887). gr. 8°.

Es genügt, auf das Erscheinen einer neuen Auflage des viel gebrauchten Werkes hinzuweisen, das in der ihm gegebenen Form sich auf einem weiten Gebiete innerhalb Deutschlands und über Deutschland hinaus eingebürgert hat. Ref. möchte indessen diesmal einen Wunsch hinzufügen, den er schon öfter hat äussern hören, nämlich den Wunsch nach einer kritischen Prüfung der Ergebnisse mancher Zahlenrechnungen. Es ist ein bekannter Fehler, dass ein Schüler in einer Rechnung eine Zahl, wie z. B. π, mit einer geringen Anzahl von Stellen verwendet, das Endergebnis aber mit einer viel grösseren Anzahl von Stellen angiebt. Wenn nun in physikalischen Aufgaben Zahlenwerte für Constanten benutzt werden, die durch Messung gefunden sind, so können im allgemeinen nicht mehr Stellen des Resultates Anspruch auf Gültigkeit haben, als die in die Rechnung eingeführte Constante

besessen hat. In den Aufgaben über den freien Fall ist z. B. g immer 9,81 gerechnet; daher hat die Angabe eines Rechnungsergebnisses auf neun geltende Stellen wie in No. 1418[a] keinen Sinn. Gerade die physikalischen Aufgaben können also dazu dienen, den Sinn für Genauigkeit auch in dieser Hinsicht zu wecken, und eine Durchsicht der Ergebnisse unter diesem Gesichtspunkte könnte in einer neuen Auflage wohl noch geschehen.

Lp.

J. P. Gram. Om Logarithmer og Antilogarithmer. Zeuthen T. (5) IV. 1-15.

Um die elementare Theorie der Logarithmen möglichst zu vereinfachen, empfiehlt der Verfasser, bei dem Unterricht die Rechnung mit Antilogarithmen zuerst einzuüben, weil sowohl die Construction der Antilogarithmentafeln als der Gebrauch derselben sich als einfache Anwendung des vorher Gelehrten darbietet. Schliesslich giebt er eine kurze Darstellung der von Briggs benutzten Berechnungsweise der Logarithmen, insbesondere von seiner „Quinquisectio“ des Intervalles. Gm.

K. Bryk. Ueber die für den Schulgebrauch zweckmässigsten logarithmischen Tafeln. Pr. Jaroslau (polnisch).

Der Vergleich der Tafeln von Schrön, Vega, Köhler und Gerverth führt den Verfasser zur Ueberzeugung, dass die letztgenannten für den Gebrauch an den Realschulen als die besten zu betrachten sind. Dn.

H. Prytz. Tables d'anti-logarithmes. Copenhague. Lehmann et Stage. 27 S.

Auf den Seiten 10-17 werden die fünfzehnstelligen Antilogarithmen der dreistelligen Zahlen gegeben, auf Seite 18 und 19 die Werte von $\log(1+10^{-L})$ für $L = 2{,}64$ bis $7{,}63$ auf ebensoviel Decimalen. Mit Hülfe dieser Tafeln kann man sowohl die fünfzehnstelligen Logarithmen wie Antilogarithmen durch

Aufschlagen in denselben und durch einfache Additionen berechnen. Seite 20 bis 24 geben die entsprechenden Werte auf zehn Decimalen, Seite 26 und 27 auf fünf. Seite 25 enthält eine Reihe Werte für $\log\cos a$ ebenfalls auf fünfzehn Decimalen und damit die Mittel, um auch die Logarithmen der trigonometrischen Functionen zu berechnen. (Vergl. F. d. M. XIII. 1881. 865.)

Hch.

H. Gravelius. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimalteilung des Quadranten mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Teilung des Quadranten in die alte und umgekehrt nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Functionen sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Berlin. G. Reimer. XV u. 203 S.

Das Buch ist mit einem Vorwort des Herrn W. Foerster versehen, in dem der Nutzen der Decimalteilung der Quadranten erörtert wird. Der Inhalt der Tafeln ist durch den Titel ziemlich vollständig gegeben; besonders zu bemerken wäre noch, dass der Centigrad des Quadranten mit $^{\circ}$, die Centiminute mit $^{-}$, die Centisecunde mit $^{=}$ bezeichnet ist, Zeichen, die sich der Bezeichnung für die alten Grade, Minuten und Secunden eng anschliessen und doch auch wieder von derselben genügend unterscheiden. Ausstattung und Druck sind vorzüglich.

Hch.

V. Jarolímek. Tafel der Brigg. $\log. n!$ Casop. XV p. 70. (Böhmisch)

Weil diese Logarithmen bei gewissen Aufgaben der Combinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Verwendung kommen, wie der Verfasser an einem speciellen Falle zeigt, so hat er sie für die Argumente 1-100 siebenstellig mitgeteilt.

Std.

Fenner. Beitrag zur Theorie des Rollplanimeters. Jordan Z. f. V. XV. 216-219 u. 242-249.

Zunächst ist nachgewiesen, dass der Einfluss einer Verschiebung der Integrirrolle auf ihrer Axe unschädlich ist; nachher sind folgende Fehlerursachen untersucht: Die Ebene der Drehaxe der (Celluloid-) Scheibe und der Drehaxe des Fahrarmes bilden mit der Laufrollenaxe einen Winkel; die Axe der Integrirrolle ist dem Fahrarme nicht parallel; die Bewegung erfolgt nicht genau rechtwinkelig, sondern unter einem Winkel gegen die Laufrollenaxe, und schliesslich die Rollenaxe macht ausser einer beliebig gerichteten Bewegung noch eine Drehung. P.

Günther. Der Mass-Planimeter für schmale, langgestreckte Figuren. Vortrag, gehalten auf der XIV. Hauptversammlung des Mecklenburgischen Geometervereins zu Schwerin. Jordan Z. f. V. XV. 506-512.

Ausser der Beschreibung und Theorie dieses einfachen Instruments sind noch in einer Tabelle die durch Versuche erzielten Resultate mit den nach anderen Methoden erhaltenen Werten zusammengestellt. P.

Ch. Lallemand. Sur une nouvelle méthode générale de calcul graphique au moyen des abaques hexagonaux. C. R. CII. 816-819.

Ankündigung einer neuen der Akademie in kurzem vorzulegenden Methode „graphischer Tafeln“ (abaques), welche dazu dient, die für viele Probleme erforderliche wiederholte Anwendung einer und derselben Formel und die damit verbundenen langen Rechnungen zu vermeiden. Derartige Abaci wurden bereits angewandt von L. Lalanne in seiner „Géométrie anamorphique“ (Appendice à la Météorologie de Kaemtz, 1843; Mémoire sur les tables graphiques et la géométrie anamorphique, Ann. d. P. et Chaussées, 1846). Die hier zur Eintragung der Werte notwendigen Scalen sind parallel den drei Durchmessern

eines regelmässigen Sechsecks, daher der Name „abaques hexagonaux". Diese Tafeln werden zur Ausgleichungsrechnung bei Nivellements mit Vorteil angewandt. M.

HAMMER. Der drehbare Rechenschieber. (Deutsches Reichs-Patent No. 31889). Jordan Z. f. V. XV. 382-385.

Das dem Ingenieur A. Beyerlen unter obigem Namen patentirte Rechenrad, bei dem die logarithmischen Teilungen auf gegen einander verdrehbaren Kreisumfängen aufgetragen sind, ist beschrieben. P.

A. V. BÄCKLUND. Bidrag till theorien för vågrörelsen i ett gasartadt medium. Stockholm. Öfv. XLIII. 3-23, 67-78, 327-353.

Die Reihe der Abhandlungen über dies Thema ist noch nicht abgeschlossen. Wenn dies der Fall sein wird, soll ein Referat hier erstattet werden. M. L.

G. D. E. WEYER. Heinrich Ferdinand Scherk. Gedächtnisschrift. Kiel. 19 S. 8°.

J. WOISIN. De Graecorum notis numeralibus. Diss. Leipzig. 54 S. 8°.

J. KVACSALA. Ueber J. A. Comenius' Philosophie insbesondere Physik. Diss. Leipzig. 43 S. 8°.

K. SCHULZE. Herbart's *ABC* der Anschauung. Diss. Bonn. 70 S. 8°.

J. HECKER. Ueber Ruffini's Beweis für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der al' Gleichung von einem höheren als dem vie Diss. Bonn. 29 S. 8°.

Heinr. Müller. Ueber die unendliche Potenzkette $x^{x^{x^{\cdots}}}$. Diss. Tübingen. 31 S. 8°.

F. Rinecker. Ueber Substitutionsfunctionen modulo 11 und die analytische Darstellung der Permutationen von 5, 7, 11 Elementen. Diss. Erlangen. 29 S. 8°.

S. Eichenberg. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz und einige quadratische Zerfällungen der Primzahlen. Diss. Göttingen. 54 S. 8°.

J. Schubert. Ueber die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$ für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden. Diss. Königsberg. 57 S. 8°.

P. Nimsch. Ueber die Perioden der elliptischen Integrale I. und II. Gattung als Functionen der rationalen Invarianten. Diss. Leipzig. 47 S. 4°.

F. Rohde. Zur Transformation der Thetafunctionen. Diss. Rostock. 76 S. 8°.

M. N. Teplow. Die Schwingungsknoten-Theorie der chemischen Verbindungen. Aus dem Russischen übersetzt von L. Gawein. St. Petersburg. 1. Lieferung 1885, 72 S. 2. Lieferung 1886, IV u. 64 S. gr. 8° nebst je 1 Taf.

Die theoretischen Untersuchungen über die Structur der chemischen Verbindungen beruhen auf der folgenden Hypothese, welche der Verfasser aus dem Wesen des elektrischen Zustandes

gefolgert hat: „Alle uns umgebenden Gegenstände und folglich auch alle Körper, von welchen die Chemie handelt, bestehen aus passivem Stoffe, der von einem activen Mittel umspült und durchdrungen wird. Dieses Mittel ist der Lichtäther, dessen Activität in seiner von Ewigkeit her unabnehmbaren schwingenden Bewegung besteht. Die lebendigen Kräfte dieser Schwingungen dienen sowohl als Quelle als auch zur Aufnahme aller Energien." Ein näheres Eingehen auf die Entwickelungen des Verfassers würde über die dem Jahrbuche gesteckten Grenzen hinausführen.

Lp.

Namenregister.

Berichtigungen.

Seite 28 Zeile 17 von oben lies Pellerano statt Pallerano.
„ 28 „ 11 „ „ „ P. Mansion statt S. Mansion.
„ 94 „ 5 „ unten „ Batt. G. XXIV statt Bonc. Bull. XIX.
„ 223 „ 9 „ oben füge hinzu: wenn n ein Vielfaches von m ist.
„ 322 „ 15 „ „ lies Wien Denkschr. LIII statt Wien Denkschr. LXII.
„ 448 „ 3 „ unten „ m'' statt m'.
„ 448 „ 2 „ „ „ m' statt m''.
„ 448 „ 1 „ „ „ ferner statt folglich und umgekehrt.
„ 583 „ 7 „ „ „ Klein Ann. XXVI statt Klein Ann. XXV.
„ 620 „ 12 „ oben „ in einem statt in jedem.

Zu Band XVII.

Seite 731 Zeile 2 von unten lies 726 statt 729.
„ 741 „ 11 „ „ „ deren statt den.
„ 856 „ 14 „ „ „ 306-309 statt 306-399.



